Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2010-08-25

DAG: Onsdag 25 augusti 2010 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Ida Säfström, tel 0703-088304
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 10 september, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
a) Bestäm rangen Rank(A). **(2p)**
b) Gör en LU-faktorisering (utan pivotering) av A. **(2p)**
c) Bestäm de singulära värdena till A. **(2p)**
d) Bestäm konditionstalet i 2-norm till A med hjälp av de singulära värdena. **(2p)**.

Uppgift 2.
a) Definiera normen av en matris utgående från en vektornorm. **(2p)**
b) Ge en formel för 2-normen av en matris. **(1p)**
c) Visa att 2-normen av en vektor är invariant under ortogonal transformation dvs visa att $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ för $x \in R^n$ och $Q \in R^{n\times n}$ ortogonal matris. **(2p)**
d) Visa att alla egenvärden till en reell ortogonal matris har beloppet lika med 1. **(2p)**

Uppgift 3.
Låt avbildningen $T : P_2 \rightarrow P_4$, där P_n är rummet av polynom av grad $\leq n$, vara definierad av $T(p(t)) = tp(t) + t^2 p(t)$.
a) Visa att T är linjär. **(2p)**
b) Bestäm matrisen för avbildningen i standardbaserna för P_2 och P_4. **(2p)**
c) Visa att $B = \{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$ är bas i P_2. **(2p)**
d) Bestäm matrisen för avbildningen i basen B (från c-uppgiften) för P_2 och standardbasen för P_4. **(2p)**

Uppgift 4.
a) låt $Q(x) = x^T Ax$, med $A \in R^{n \times n}$ symmetrisk, vara en kvadratisk form. Visa att $\lambda_{min} \leq \frac{x^T Ax}{x^T x} \leq \lambda_{max}$, där λ_{min} och λ_{max} är minsta och största egenvärde till A. Visa att gränserna antas med likhet då x är egenvektor hörande till λ_{min} respektive λ_{max}. **(3p)**
b) Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 12x_1x_3$.
Karakterisera den kvadratiska formen.
Bestäm största och minsta värde på $Q(x)$ då $\|x\|_2 = 1$. Bestäm alla vektorer u med $\|u\|_2 = 1$ sådana att $Q(u)$ blir maximal resp. minimal. **(4p)**

Uppgift 5.
a) Betrakta ett minsta-kvadrat-problem $min_x \|Ax - b\|_2$, där $A \in R^{m \times n}$, $m > n$, har full rang och $b \in R^m$, $x \in R^n$. Visa med hjälp av normalekvationerna att lösningen till problemet ges av systemet $Rx = Q^T b$, där $A = QR$ är en QR-faktorisering av A. **(3p)**
b) Vid icke-linjär minsta-kvadrat kan Gauss-Newtons metod användas. Härled den metoden. **(3p)**
c) Anta att du vill anpassa parametrarna α, β och γ i modellen $\Psi(t) = \alpha + e^{\beta t} + sin(\gamma t)$ till mätdata enligt tabellen:

t	0	1	2	3	4
Ψ	0	1	2	2	3

Ange explicit det ekvationssystem som ska lösas i varje iteration i Gauss-Newtons metod. **(3p)**

Uppgift 6.
Betrakta följande tabell över funktionsvärden av en funktion $f(t)$ i fem punkter:

t	0	1	2	3	4
f	-1	0	0	1	2

a) Bestäm en approximation till $\int_0^4 f(t)\, dt$ med trapetsformeln. **(2p)**
b) Bestäm interpolationspolynomet genom de fem punkterna. **(3p)**

Uppgift 7.
Betrakta optimeringsproblemet i två variabler utan bivillkor: $min\ x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_1$.

a) Lös problemet genom iteration med Newtons metod från $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. **(2p)**

b) Gör en iteration med Steepest Descent metoden från $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och exakt linjesökning. **(3p)**

c) Ge exempel på ett linjärt programmeringsproblem (LP-problem) som kommer från en relevant tillämpning. Formulera LP-problemet matematiskt. **(2p)**

Uppgift 8.
Betrakta prediktor/korrektorparet Eulers framåtmetod som prediktor och Eulers bakåtmetod som korrektor för att lösa begynnelsevärdesproblem för system av ordinära differentialekvationer.

a) Anta att man gör *två* fixpunktsiterationer i korrektorn. Skriv upp den explicita metod man då får. **(3p)**

b) Bestäm approximationsordning för metoden i a-uppgiften. **(2p)**

c) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i a-uppgiften. **(2p)**

d) Anta att du vill använda metoden på systemet $y' = -Ay$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$.

Blir metoden säkert stabil om du väljer steglängd $h = 1/50$? **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 25 augusti 2010

1a) Gausselimination: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Vi ser alla tre kolonnerna är pivotkolonner och spänner värderummet som då är av dimension 3, dvs rangen av matrisen är 3.
1b) LU-faktorisering är en variant på Gausselimination, där räkningarna administreras så att $A = LU$, där U är den uppåt triangulära matris som är resultatet av eliminationen och L är nedåt triangulär med ettor i diagonalen. Från a)-uppgiften får vi då $A = LU$ med
$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1c) De singulära värdena är roten ur egenvärdena till matrisen $A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Egenvärdena är $\lambda_1 = 4$ samt egenvärdena till delmatrisen $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. De senare är $\lambda_2 = 3 + \sqrt{5},\ \lambda_3 = 3 - \sqrt{5}$. De singulära värdena är alltså 2, $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ och $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$.
1d) Konditionstalet är kvoten mellan största och minsta singulära värde dvs $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}]$.

2a) $\|A\| = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
2b) $\|A\|_2 = \sqrt{max(\lambda(A^T A))}$ (roten ur största egenvärde till $A^T A$).
2c) $\|Qx\|_2^2 = x^T Q^T Qx$=(Q ortogonal)= $x^T x = \|x\|_2^2$.
2d) $Qx = \lambda x \Rightarrow \|Qx\|_2 = |\lambda| \|x\|_2 \Rightarrow |\lambda| = \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = 1$ (enligt c)-uppgiften).

3a) $T(p + q) = t(p + q) + t^2(p + q) = tp + t^2 p + tq + t^2 q = T(p) + T(q)$
$T(cp) = t(cp) + t^2(cp) = c(tp + t^2 p) = cT(p)$.
3b) Standardbasen är $\mathcal{B} = \{b_i = t^{i-1}\}_{i=1}^{n+1}$. Avbildningen på baselementen blir $T(b_1) = t + t^2 = b_2 + b_3,\ T(b_2) = t^2 + t^3 = b_3 + b_4,\ T(b_3) = t^3 + t^4 = b_4 + b_5$ Matrisen blir
$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3c) Den nya basen är $\mathcal{C} = \{1,\ 1+t, 1+t+t^2\}$. Överföringsmatrisen till bas $\mathcal{B} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Denna matris är reguljär så basen $\mathcal{C}$ är ok!

3d) För avbildningens matris i denna bas beräknar vi $T(c_1) = T(1) = t + t^2 = b_2 + b_3,\ T(c_2) = T(1+t) = t + t^2 + t^2 + t^3 = b_2 + 2b_3 + b_4,\ T(c_2) = T(1+t+t^2) = t + t^2 + t^3 + t^2 + t^3 + t^4 = b_2 + 2b_3 + 2b_4 + b_5$. Matrisen blir då $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4a) Eftersom A är symmetrisk är den ortogonalt diagonaliserbar. Vi kan alltså skriva $x^T Ax = y^T Dy,\ y = P^T x \Leftrightarrow x = Py$, där D är diagonal med egenvärden på diagonalen och P är ortogonal med egenvektorer som kolonner. Vi får då

$$Q(x) = Q(Py) = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2 \geq \lambda_{min}(y_1^2 + ... + y_n^2) = \lambda_{min} y^T y = \lambda_{min} x^T x$$

Likhet får vi om $y_i = 0$ för alla $\lambda_i > \lambda_{min}$ dvs för

$$x = Py = \sum_{\lambda_i = \lambda_{min}} y_i u_i$$

där u_i är egenvektor motsvarande λ_i. Då är

$$Ax = \lambda_{min} \sum_{\lambda_i = \lambda_{min}} y_i u_i = \lambda_{min} x$$

dvs x är egenvektor hörande till λ_{min}. På samma sätt visas övre gränsen.

4b) Den kvadratiska formen kan skrivas $Q(x) = x^T Ax$ med $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Egenvärden och egenvektorer till A bestäms. Karakteristiska ekvationen $(3-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda) - 36]$ har lösningarna $\lambda = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$ med motsvarande egenvektorer $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Egenvärden har olika tecken så den kvadratiska formen är indefinit.
Enligt sats i Lay gäller $-4 \leq \frac{Q(x)}{x^T x} \leq 8$, där övre gränsen antas för $x = u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ \ 0\ \ -1]^T$ och undre gränsen antas för $x = u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ \ 0\ \ 1]^T$.

5a) Normalekvationerna är $A^TAx = A^Tb$. Med $A = QR$ där Q är ortogonal och R är uppåt triangulär och reguljär (eftersom A har full rang), får vi
$(QR)^T(QR)x = (QR)^Tb \Leftrightarrow R^TQ^TQRx = R^TQ^Tb \Leftrightarrow Rx = Q^Tb$ (eftersom Q är ortogonal och R^T reguljär).
5b) Det icke-linjära minsta-kvadrat-problemet formuleras $min_x\|f(x)\|_2$. Taylorutveckla f kring en approximation x_k: $f(x) \approx f(x_k) + J(x_k)(x - x_k)$. Den linjära modellen för ett iterationssteg blir då: $min_x\|f(x_k) + J(x_k)(x - x_k)\|_2$, där lösningen x tas som nästa approximation x_{k+1}, som alltså fås ur det överbestämda linjära systemet
$J(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k)$. Ett sådant system ska alltså lösas i varje iteration av Gauss-Newtons metod. Det kan göras med exempelvis QR-faktorisering som i a)-uppgiften.
5c) Låt $f_i = \Psi(x, t_i) - \Psi_i$ vara residualerna där Ψ_i är uppmätt värde i tid t_i enligt tabellen och $x = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)^T$.
Vi får då $f(x) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha + e^{\beta} + sin\gamma - 1 \\ \alpha + e^{2\beta} + sin2\gamma - 2 \\ \alpha + e^{3\beta} + sin3\gamma - 2 \\ \alpha + e^{4\beta} + sin4\gamma - 3 \end{bmatrix}$. Jacobianen blir $J(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & e^{\beta} & cos\gamma \\ 1 & 2e^{2\beta} & 2cos2\gamma \\ 1 & 3e^{3\beta} & 3cos3\gamma \\ 1 & 4e^{4\beta} & 4cos4\gamma \end{bmatrix}$.
Gauss-Newtons metod skrivs: $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + s_k \\ J(x_k)s_k = -f(x_k) \end{cases}$

6a Integralen approximeras med
$0.5(f(0) + 2f(1) + 2f(2) + 2f(3) + f(4)) = 0.5(-1 + 0 + 0 + 2 + 2] = 1.5$

6b Ansätt polynomet som $p(t) = c_0 + c_1t + c_2t(t-1) + c_3t(t-1)(t-2) + c_4t(t-1)(t-2)(t-3)$.
Bestäm koefficienterna successivt genom att sätta in interpolationsvillkoren:
$p(0) = -1 \Rightarrow c_0 = -1$
$p(1) = 0 \Rightarrow c_0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 1$
$p(2) = 0 \Rightarrow c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1/2$
$p(3) = 1 \Rightarrow c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 1/3$
$p(4) = 2 \Rightarrow c_0 + 4c_1 + 12c_2 + 24c_3 + 24c_4 = 2 \Rightarrow c_4 = -1/8$
Interpolationspolynomet blir
$p(t) = -1 + t - \frac{1}{2}t(t-1) + \frac{1}{3}t(t-1)(t-2) - \frac{1}{8}t(t-1)(t-2)(t-3)$

7a) Objektfunktionen är $f(x) = x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-3x_1$ med gradient $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 3 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$ och Hessian $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Objektfunktionen är kvadratisk så det bli en iteration med Newtons metod: $x_1 = x_0 - H\backslash\nabla f_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \backslash \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1.5 \end{bmatrix}$.
7b) Vi ska minimera längs riktningen $d_0 = -\nabla f_0 = [3 \quad 0]^T$. Exakt linjesökning vid kvadratisk funktion ges av steglängden: $\alpha_0 = -\frac{\nabla f_0^T d_0}{d_0^T H d_0} = -\frac{-9}{18} = 0.5$. Nästa approximation blir alltså $x_1 = x_0 + \alpha d_0 = [1.5 \quad 0]^T$.
7c) Exempelvis dietproblem: Du ska äta av n varor som kostar $c_1,\ c_2,\ ...,\ c_n$ och innehåller $a_{ij}, i = 1,\ ...\ m,\ j = 1,\ ...,\ n$ enheter av m kvaliteter (protein, vitaminer mm). Du ska äta till minsta kostnad men få minst $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m$ enheter av kvaliteterna. Problemet blir: $min_x c^T x$ då $Ax \geq b$.
8a) (p) $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$
(k) $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$
En fixpunktsiteration ger: $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))$.
Två fixpunktsiterationer ger: $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)))$
8b) Metoden på testproblemet $y' = \lambda y$ blir
$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k + (h\lambda)^2 y_k + (h\lambda)^3 y_k = y_k[1 + h\lambda + (h\lambda)^2 + (h\lambda)^3]$.
Formeln stämmer till två termer med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda} = 1+h\lambda+\frac{h^2\lambda^2}{2}+...$ och metoden är då av ordning 1.
8c) Stabilitetsområdet är de $z = h\lambda$ som ger begränsade lösningar.
Från b)-uppgiften ger detta: $\{z \in C; |1 + z + z^2 + z^3| \leq 1\}$.
8d) Största egenvärde (till belopp) är $\lambda = -100$ med $z = h\lambda = -2$. Insatt i stabilitetskravet i c)-uppgiften får vi $|1 - 2 + 4 - 8| = 5$ som inte uppfyller kravet att vara ≤ 1. Vi kan inte garantera stabilitet i det långa loppet.