Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2010-01-15

DAG: Fredag 15 januari 2010 TID: 14.00 - 18.00 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 1 februari, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Låt $A \in R^{n\times n}$ vara symmetrisk.
a) Visa att A har n st reella egenvärden. **(4p)**
b) Visa att egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala. **(2p)**
c) Visa att om alla egenvärden är 0 så är A noll-matrisen **(2p)**

Uppgift 2.
Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
a) Utför första steget i QR-faktorisering av A med hjälp av en Householdertransformation. **(3p)**
b) Definiera allmänt en matrisnorm för A utgående från en given vektornorm. **(1p)**
c) Egenvärdena till matrisen A^TA är 1, 3 och 6. Bestäm $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ och $\|A\|_\infty$. **(2p)**
d) Gör en LU-faktorisering av A. **(3p)**

Uppgift 3.
Låt P_p vara det linjära rummet av polynom av grad $\leq p$ och betrakta den linjära avbildningen $F:\ P_2 \to P_3$ definierad av $F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 + (a_1 - a_2)t + a_0 t^2 + a_2 t^3$.
a) Visa att $B = \{1+t,\ 1-t,\ t+t^2\}$ är bas i P_2. **(2p)**
b) Bestäm matrisen för F i standardbaserna för P_2 och P_3. **(2p)**
c) Bestäm matrisen för F i basen B för P_2 och standardbasen för P_3. **(2p)**
d) Kontrollera genom basbytesformel att matriserna i b) och c) är rätt. **(1p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden

$$\begin{cases} x_1'(t) = -10x_1(t) + 3x_2(t) & x_1(0) = 0.3 \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) & x_2(0) = 9.9 \\ x_3'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) & x_3(0) = 3 \end{cases}. \quad \textbf{(4p)}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om andra ekvationen i a)-uppgiften ändras till $x_2'(t) = -2x_2(t) \quad x_2(0) = 9.9$? **(2p)**
c) Ange en stabil lösningsteknik som fungerar för problemet i b)-uppgiften. **(1p)**

Uppgift 5.
a) Visa att Newtons metod för ekvationslösning i en variabel konvergerar linjärt vid dubbelrot och att den asymptotiska felkonstanten är 0.5. **(3p)**
b) Betrakta följande system av icke-linjära ekvationer:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2^2 = 1 \\ x_1^2 + 3x_2 = 2 \end{cases}.$$

Gör en iteration med Newtons metod utgående från startapproximation $x_0 = (0\ \ 0)^T$. **(3p)**
c) Betrakta systemet i b)-uppgiften. Lös ut x_1 ur första ekvationen och x_2 ur den andra och bilda på så sätt en fixpunktsiteration. Gör två iterationer med metoden utgående från $x_0 = (0\ \ 0)^T$. **(3p)**

Uppgift 6.
a) Definiera vad som menas med en kubisk spline. Diskutera några olika ändpunktsvillkor. **(3p)**
b) Betrakta följande punkter i planet

t	1	2	3	4	5
y	1	2	3	3	4

Vi vill bestämma en kvadratisk spline med nod i $t = 3$ och som i minsta-kvadratmening bäst ansluter till punkterna. Sätt upp det kvadratiska ekvationssystem som skall lösas. Systemet behöver inte lösas. **(4p)**

Uppgift 7. Betrakta följande kvadratiska optimeringsproblem med linjära bivillkor:

$$\begin{cases} \textit{minimera} \;\; 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \textit{under bivillkor} \;\; \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vi vill studera en projicerad gradientmetod för att lösa problemet.

a) Ta $x_0 = (1 \quad 1 \quad 1)^T$ som startapproximation. Bestäm negativa gradienten till objektfunktionen i startpunkten. Projicera denna riktning på nollrummet till bivillkorsmatrisen. Denna projicerade negativa gradientriktning ska användas som sökriktning i nästa deluppgift. **(3p)**

b) Formulera linjesökningsproblemet längs den riktning som bestämts i a)-uppgiften. Har du inte löst a)-uppgiften, så formulera allmänt. Lös linjesökningsproblemet (enligt a)-uppgiften) analytiskt och bestäm nästa approximation x_1. **(3p)**

Uppgift 8. Betrakta prediktor/korrektorparet Eulers framåtmetod som prediktor och Trapetsmetoden som korrektor för att lösa begynnelsevärdesproblem för system av ordinära differentialekvationer.

a) Anta att man gör *en* fixpunktsiteration i korrektorn. Skriv upp den explicita metod man då får. **(3p)**

b) Bestäm approximationsordning för metoden i a-uppgiften. **(2p)**

c) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i a-uppgiften. **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 15 januari 2010

1a) $Ax = \lambda x,\ x \in C^n, \lambda \in C$. Multiplicera från vänster med $\bar{x}^T$ och vi får
(1) $\bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x$
Här är vänsterledet skalären $\alpha = \bar{x}^T Ax = (\bar{x}^T Ax)^T = x^T A^T \bar{x} = x^T \bar{A}\bar{x} = \bar{\bar{x}}^T \bar{A}\bar{x} = \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha = \bar{x}^T Ax$ reell. Vidare är i (1) $\bar{x}^T x$ reellt och därmed är λ reellt ty det är kvoten mellan två reella tal.
1b) $Av_1 = \lambda_1 v_1,\quad Av_2 = \lambda_2 v_2$ med $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Betrakta skalärprodukten $\lambda_1 v_1^T v_2 = (Av_1)^T v_2 = v_1^T(A^T v_2) =$ (symmetri) $= v_1^T(Av_2) = \lambda_2 v_1^T v_2$. Nu ger $\lambda_1 \neq \lambda_2$ att $v_1^T v_2 = 0$, alltså är de ortogonala.
1c) Spektralsatsen ger $PAP^T = D$ där D är diagonal med egenvärdena på diagonalen och P är ortogonal. Alltså är $D = 0$ och därmed $A = P^T DP = 0$.

2a) Låt $\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, som normerad blir $u = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Householdermatrisen blir $H = I - 2uu^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ som ger första steget i QR-faktorisering: $HA = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
2b) $\|A\| = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
2c) $\|A\|_1 =$ (maximal kolonnsumma) $= 4$, $\|A\|_2 =$ (roten ur största egenvärde till $A^TA) = \sqrt{6}$, $\|A\|_\infty =$ maximala radsumman $= 3$.

2d) LU-faktorisering är en variant av Gauss-elimination sådan att $LU = PA$, där P är permutationsmatris. Den genomförs stegvis med radreduktion för att få U samtidigt som L bestäms:
$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \text{ radbyte } \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} = U.$$
Kolonnerna i L bestäms så att motsvarande radoperationer skulle ha gett enhetskolonner i U dvs

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}.$$ P är enhetsmatrisen med de två sista raderna ombytta.

3a) $E = \{1,\ t,\ t^2\}$ är standardbasen. Basbytesmatrisen $P_{E \leftarrow B} = [b_1,\ b_2,\ b_3]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är reguljär så basen är ok!

3b) $Fe_1 = t^2,\ Fe_2 = 1 + t,\ Fe_3 = -t + t^3$ ger $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3c) $Fb_1 = 1 + t + t^2,\ Fb_2 = -1 - t + t^2,\ Fb_3 = 1 + t^3$ ger $M' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3d) $MP_{E \leftarrow B} = M'$ stämmer!

4a) Problemet är på matrisform $x' = Ax$, där $A = \begin{bmatrix} -10 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_3 = -2$ samt egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} -10 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, som är $\lambda_1 = -11,\ \lambda_2 = -1$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (-2.7, 0.9, 1)^T,\ v_2 = (1, 3, 0)^T$ och $v_3 = (0, 0, 1)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-11t} \begin{bmatrix} -2.7 \\ 0.9 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet $\begin{bmatrix} -2.7 & 1 & 0 \\ 0.9 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 9.9 \\ 3 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ c_3 = 2$.

Lösningen blir alltså $x = e^{-11t} \begin{bmatrix} -2.7 \\ 0.9 \\ 1 \end{bmatrix} + 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4b) Matrisen blir nu $\begin{bmatrix} -10 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ med ett dubbelt egenvärde $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Till detta egenvärde hör egenrummet $Span\{[0\ 0\ 1]^T\}$ av dimension 1, matrisen är alltså inte diagonaliserbar.

4c) Problemet är stabilt, en stabil ode-metod, exempelvis trapetsmetoden som är A-stabil, fungerar för alla steglängder.

5a) Låt x_k vara approximation och Taylorutveckla funktion och derivata runt lösningen x^*: $f(x_k) = f(x^*)+f'(x^*)(x_k-x^*)+\frac{1}{2}f''(x^*)(x_k-x^*)^2+...$ $f'(x_k) = f'(x^*)+f''(x^*)(x_k-x^*)+....$ Dubbelrot ger $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ och för Newtons metod får vi $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\frac{1}{2}f''(x^*)(x_k-x^*)^2}{f''(x^*)(x_k-x^*)} + ... = x_k - \frac{1}{2}(x_k - x^*) + ...$ vilket ger $|\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}| \to 1 - \frac{1}{2} = 0.5$ dvs konvergensen är linjär med asymptotisk felkonstant 0.5.

5b) Vi ska lösa $f(x) = 0$ där $f = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2^2 - 1 \\ x_1^2 + 3x_2 - 2 \end{bmatrix}$ är residualen och $J = \begin{bmatrix} 2 & -6x_2 \\ 2x_1 & 3 \end{bmatrix}$ är Jakobianen. Med startvärdena $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $J_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ blir iterationen $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$ Ekvationssystem $J_0 s_0 = -f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har lösningen $s_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ och iterationen blir $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + s_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$.

5c) Ekvationssystemet skrivs $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2^2 \\ x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = g(x)$. Fixpunktsiteration enligt $x_{k+1} = g(x_k),\ k = 0,\ ,1,\ ...$ med $x_0 = (0\ \ 0)^T$ ger $x_1 = (1/2\ \ 2/3)^T$, $x_2 = (7/6\ \ 7/12)^T$.

6a En kubisk spline är ett styckvis polynom av grad 3, med kontinuitet hos splinen, dess första och andra derivata i knutpunkterna (noderna). Det blir två fria villkor. Man kan använda naturliga ändpunktsvillkor (andraderivatorna = 0), rätta ändpunktsvillkor (derivator stämmer med den funktion som ska approximeras med splinen) eller periodiska ändpunktsvillkor (första och andraderivator överensstämmer i vänster och höger ändpunkt).

6b) Splinen har två delar: $s_1(t),\ 1 \le t \le 3,\ \ s_2(t),\ 3 \le t \le 5$.
Ansätt $s_1 = a + b(t-3) + c(t-3)^2$ och $s_2 = a + b(t-3) + d(t-3)^2$. Då är splinevillkoren uppfyllda i $t = 3$, dvs spline och dess derivata är kontinuerliga där.

Anpassning till data ger ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Minsta kvadratlösning innebär att lösa normalekvationssystemet, som blir

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & -9 & 9 \\ 5 & -9 & 17 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 6 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

7a) Objektfunktionen är $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ med gradient $\nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$. Bivillkorsmatrisen är $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ med nollrum $Nul(A) = Z = \frac{1}{35}[1 \;\; 3 \;\; 5]^T$. I startpunkten $x_0 = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ blir negativa gradienten $-\nabla f_0 = -[4 \;\; 2 \;\; 2]^T$ och dess projektion på Z blir $-ZZ^T\nabla f_0 = -\frac{20}{35}[1 \;\; 3 \;\; 5]^T$.
7b) Vi ska minimera längs riktningen $d_0 = -[1 \;\; 3 \;\; 5]^T$. Linjesökningsproblemet blir: $min_\alpha f(x_0+\alpha d_0)$. För att lösa linjesökningsproblemet inför vi envariabel-funktionen $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha d_0)$. Vi har $g(\alpha) = 2(1-\alpha)^2 + (1-3\alpha)^2 + (1-5\alpha)^2 = 4 - 20\alpha + 36\alpha^2$ med $g'(\alpha) = -20 + 72\alpha$. Lösningen till linjesökningsproblemet ges av $g'(\alpha) = 0$ dvs $\alpha = 5/18$. Nästa approximation blir alltså $x_1 = x_0 + \alpha d_0 = 1/18[13 \;\; 3 \;\; -7]^T$.

8a) Trapetsmetoden är: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$
Med en fixpunktsiteration från Eulers framåtmetod blir metoden:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$.

8b) Metoden på testproblemet $y' = \lambda y$ blir
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2})$.
Formeln stämmer till tre termer med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + ...$ och metoden är då av ordning 2.

8c) Stabilitetsområdet är de $z = h\lambda$ som ger begränsade lösningar.
Från b)-uppgiften ger detta: $\{z \in C; |1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1\}$.