Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2009-06-01

DAG: Måndag 1 juni 2009 TID: 14.00 - 18.00 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 15 juni, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att för en ortogonal matris A gäller antingen $det(A) = 1$ eller $det(A) = -1$. **(2p)**
b) Visa att om A och B är två ortogonala matriser med $det(A) = -det(B)$ så är matrisen $A + B$ singulär. **(3p)**
c) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **(3p)**
d) Bestäm alla singulära värden till matrisen A i c)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 2. Betrakta det linjära rummet V av funktioner på R, där $V = Span(t,\ sin^2t,\ cos^2t)$ med de angivna funktionerna som standardbas.
a) Visa att även $\{1,\ t,\ sin^2t\}$ är bas för V. **(2p)**.
b) Bestäm koordinaterna i basen enligt a)-uppgiften för den vektor som i standardbasen har koordinatvektorn $(2\ \ 4\ \ 1)^T$. **(1p)**
c) Betrakta avbildningen derivering på rummet V. Bestäm dimension och en bas för värderummet till denna avbildning. **(2p)**
d) Bestäm matrisen för avbildningen i c)-uppgiften i båda baserna för V och för basen i värderummet enligt c)-uppgiften. **(3p)**
e) Använd en av matriserna för avbildningen i d)-uppgiften för att bestämma derivatan av $sin^2t - cos^2t$. Jämför med analytisk derivering. **(2p)**

Uppgift 3.
a) Visa att egenvärdena till en reell symmetrisk matris är reella. **(4p)**
b) Visa allmänt för en reell matris med reella egenvärden att även egenvektorerna kan väljas reella. **(2p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden

$$\begin{cases} x_1'(t) = -10x_1(t) + 3x_2(t) & x_1(0) = -3.1 \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) & x_2(0) = -2.3 \\ x_3'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) - 4x_3(t) & x_3(0) = 2 \end{cases} . \quad \textbf{(4p)}$$

b) Ange en gräns för hur stort steget h kan vara i Eulers framåtmetod för att den ska vara stabil vid lösning av systemet i a)-uppgiften. **(2p)**
c) Ange två metoder som är A-stabila för systemet i a)-uppgiften. **(1p)**
d) Bestäm approximationsordningen för trapetsmetoden. **(3p)**

Uppgift 5.
a) Härled en metodoberoende feluppskattning för ekvationslösning i en variabel vid multipelrot med multiplicitet m. **(3p)**
b) Betrakta följande system av icke-linjära ekvationer:

$$\begin{cases} x_1^3 - 2x_2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^3 + 2x_1 = 2 \end{cases} .$$

Gör en iteration med Newtons metod utgående från startapproximation $x_0 = (0 \;\; 0)^T$. **(3p)**

Uppgift 6.
a) Bestäm en **kvadratisk** spline $s(x)$ med nod i punkten $x = 0.5$, som interpolerar $f(x) = x^3$ i punkterna $x = 0,\ x = 0.5,\ x = 1$ och som uppfyller $s'(1) = f'(1)$. **(4p)**
b) Anta att vi approximerar med **linjär** spline. Ta fram en feluppskattning som anger hur känslig approximationen är för fel i funktionsvärdena $f(x)$. **(3p)**

Uppgift 7. Betrakta följande kvadratiska optimeringsproblem med linjära bivillkor:

$$\begin{cases} \textit{minimera} \;\; x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 \\ \textit{under bivillkor} \; \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vi vill studera en projicerad gradientmetod för att lösa problemet.
a) Ta $x_0 = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T$ som startapproximation. Bestäm negativa gradienten till objektfunktionen i startpunkten. Projicera denna riktning på nollrummet till bivillkorsmatrisen. Denna projicerade negativa gradientriktning ska användas som sökriktning i nästa deluppgift. **(3p)**
b) Formulera linjesökningsproblemet längs den riktning som bestämts i a)-uppgiften. Har du inte löst a)-uppgiften, så formulera allmänt. Lös linjesökningsproblemet (enligt a)-uppgiften) analytiskt och bestäm nästa approximation x_1. **(3p)**

Uppgift 8. Följande differentialekvation används inom ergometri vid studium av mekanisk påverkan på ryggraden:

$$\begin{cases} y'' = p^2(y-a)(0.5(y')^2-1), \quad 0 \le x \le L \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = v \\ a = -qy'(L) - y(L) \end{cases}$$

Här är L, p, q och v givna konstanter och a är en parameter (variabel), som beror på lösningen $y(x)$. Lös problemet med inskjutningsmetoden med avseende på a. Skriv upp den ekvation i variabeln a som ska lösas genom inskjutningen. Teckna lämplig iterativ metod för att lösa denna ekvation. Vari består det tyngsta beräkningsarbetet vid en iteration av metoden? **(5p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 1 juni 2009

1a) A ortogonal dvs $A^TA = I$. Produktformel för determinant ger $det(A)det(A^T) = det(I) = 1$ och $det(A^T) = det(A)$ så $det(A)$ är 1 eller -1.
1b) $A^T(A+B) = I + A^TB = B^TB + A^TB = (B+A)^TB$ med $det(A)det(A+B) = det(A+B)det(B)$ och om $det(A) = -det(B)$ ger då $det(A+B) = 0$ dvs $(A+B)$ är singulär.
1c) De två första kolonnerna är ortogonala. Ortogonalisera den tredje mot dessa med Gramm-Schmidt: $q_3 = [0\ 1\ 1\ 1]^T - 2/3[1\ 1\ 1\ 0]^T = 1/3[-2\ 1\ 1\ 3]^T$. Normering av kolonnerna ger $Q = 1/\sqrt{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2/\sqrt{5} \\ -1 & 1 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 3/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ och $R = Q^TA = 1/\sqrt{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$.
1d) Singulära värdena till A är roten ur egenvärdena till $A^TA = R^TR = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.
Denna matris har egenvärdena 1, 3 och 5, singulära värdena till A är allstå 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.
2a) $sin^2t + cos^2t = 1$. Överföringsmatrisen mellan den nya basen C och standardbasen B blir då $P_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och eftersom denna matris är reguljär så är C en korrekt bas.
2b) Vi löser ekvationssystemet med $P_{B\leftarrow C}$ som matris och $(2\ 4\ 1)^T$ som högerled och får lösningen $(1\ 2\ 3)^T$, som ger de aktuella koordinaterna.
2c) Derivatan av baselementen i standardbasen är $t' = 1$, $(sin^2t)' = 2\ sint\ cost$, $(cos^2t)' = -2\ sint\ cost$ och vi ser att dimensionen är 2 och $D = \{1,\ sint\ cost\}$ kan tas som bas för värderummet.
2d) Matrisen för avbildningen i baserna B och D blir $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ och matrisen för avbildningen i baserna C och D blir $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
2e) Med matrisen M_1 blir det matris-vektor multiplikation $M_1[0\ 1\ -1]^T = [0\ 4]^T$, som är den sökta derivatans koordinater i basen M_1, dvs derivatan är 4 $sint\ cost$.

3a) $Ax = \lambda x,\ x \in C^n, \lambda \in C$. Multiplicera från vänster med $\bar{x}^T$ och vi får
(1) $\bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x$
Här är vänsterledet skalären $\alpha = \bar{x}^T Ax = (\bar{x}^T Ax)^T = x^T A^T \bar{x} = x^T \bar{A}\bar{x} = \bar{\bar{x}}^T \bar{A}\bar{x} = \bar{\alpha} \Rightarrow$ $\alpha = \bar{x}^T Ax$ reell. Vidare är i (1) $\bar{x}^T x$ reellt och därmed är λ reellt ty det är kvoten mellan två reella tal.
3b) $Av = \lambda v,\ v \in C^n, \lambda \in R$. Låt $v = x + iy$ för reella x och y. Då gäller $A(x+iy) = \lambda(x+iy)$ och identifikation av real och imaginärdelar ger $Ax = \lambda x$ och $Ay = \lambda y$ och eftersom inte både x och y kan vara nollvektorn så duger minst en av dem som egenvektor.

4a) Problemet är på matrisform $x' = Ax$, där $A = \begin{bmatrix} -10 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_3 = -4$ samt egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} -10 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, som är $\lambda_1 = -11,\ \lambda_2 = -1$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem
$(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (-2.1, 0.7, 1)^T,\ v_2 = (1,3,0)^T$ och $v_3 = (0,0,1)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-11t} \begin{bmatrix} -2.1 \\ 0.7 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet
$\begin{bmatrix} -2.1 & 1 & 0 \\ 0.7 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.1 \\ -2.3 \\ 2 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = e^{-11t} \begin{bmatrix} -2.1 \\ 0.7 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4b) Eulers framåtmetod är stabil (för reella egenvärden) om $h\lambda \geq -2$ för alla egenvärden λ. Egenvärdet $\lambda = -11$ ställer störst krav och ger $h \leq 2/11$.
4c) Eulers bakåtmetod och trapetsmetoden.
4d) Metoden tillämpad på testproblemet blir: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda y_{k+1}]$ med $y_{k+1} = \frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}} y_k$. Tillväxtfaktorn blir $\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}} = (1 + \frac{h\lambda}{2})(1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{4} + \frac{(h\lambda)^3}{8} + ...) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{4} + ...$ att jämföra med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + ...$, som stämmer med tre termer, alltså är metodens approximationsordning 2.

5a) Taylorutveckla f runt roten x^* och uttryck $f(\hat{x})$, där $\hat{x}$ är en approximation till roten med fel δx, med hjälp av Taylorutvecklingen:
$f(\hat{x}) = f(x^* + \delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x + \frac{1}{2}f''(x^*)(\delta x)^2 + ... + \frac{1}{m!}f^{(m)}(x^*)(\delta x)^m + ...$
Roten har multiplicitet m så alla $f^{(i)} = 0, i = 0, 1, ..., m-1$. Vi får alltså
$f(\hat{x}) = \frac{1}{m!}f^{(m)}(x^*)(\delta x)^m + ...$ och om vi bortser från lägre ordnings termer får vi
$(\delta x)^m \approx m!\frac{f(\hat{x})}{f^{(m)}(x^*)})$ som ger uppskattningen $|\delta x|^m \lesssim m!|\frac{f(\hat{x})}{f^{(m)}(\hat{x})}|$.

5b) Vi ska lösa $f(x) = 0$ där $f = \left\{ \begin{array}{l} x_1^3 - 2x_2 - 1 \\ x_1^2 - x_2^3 + 2x_1 - 2 \end{array} \right.$. Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & -2 \\ 2x_1 + 2 & -3x_2^2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = -f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$.

6a Splinen har två delar: $s_1(x),\ 0 \le x \le 0.5$ och $s_2(x),\ 0.5 \le x \le 1$
$s_2 = 1 + a(x-1) + b(x-1)^2$ med $s_2' = a + 2b(x-1)$. Villkor $s_2(1) = 1$ uppfyllt genom ansatsen, $s_2'(1) = f'(1) = 3$ ger $a = 3$ och villkor $s_2(0.5) = 1/8$ ger $b = 5/2$.
$s_1 = 1/8 + c(x-0.5) + d(x-0.5)^2$ med $s_1' = c + 2d(x-0.5)$. Villkor $s_1(0.5) = 1/8$ uppfyllt genom ansatsen, $s_1'(0.5) = s_2'(0.5) = 0.5$ ger $c = 0.5$ och villkor $s_1(0) = 0$ ger $d = 0.5$.
Vi får alltså spline-delarna:
$s_1 = 1/8 + 0.5(x-0.5) + 0.5(x-0.5)^2$ och $s_2 = 1 + 3(x-1) + 2.5(x-1)^2$.
6b) Allmänt för linjär interpolation mellan x_1 och x_2 med funktionsvärden $f_1 = f(x_1)$ och $f_2 = f(x_2)$ blir det:
$s_1(x) = f_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(f_2 - f_1)$. Approximationer $\hat{f}_1$ och $\hat{f}_2$, båda med felgräns δf ger den approximativa splinen:
$\hat{s}_1(x) = \hat{f}_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(\hat{f}_2 - \hat{f}_1)$. Felet i splinen blir då
$\hat{s}_1 - s_1 = \hat{f}_1 - f_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(\hat{f}_2 - f_2 - (\hat{f}_1 - f_1)) = (1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1})(\hat{f}_1 - f_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(\hat{f}_2 - f_2)$ och feluppskattningen
$|\hat{s}_1 - s_1| \le |1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1}|\delta f + |\frac{x-x_1}{x_2-x_1}|\delta f$.
Om nu $x_1 \le x \le x_2$ så gäller $|\hat{s}_1 - s_1| \le (1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1} + \frac{x-x_1}{x_2-x_1})\delta f = \delta f$

7a) Objektfunktionen är $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3$ med gradient $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bivillkorsmatrisen är $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ med nollrum $Nul(A) = Z = \frac{1}{\sqrt{2}}[0 \ \ 1 \ \ 1]^T$. I startpunkten $x_0 = [1 \ \ 1 \ \ 1]^T$ blir negativa gradienten $-\nabla f_0 = -[2 \ \ 2 \ \ 3]^T$ och dess projektion på Z blir $-ZZ^T\nabla f_0 = -\frac{1}{2}[0 \ \ 5 \ \ 5]^T$.

7b) Vi ska minimera längs riktningen $d_0 = -[0 \ \ 1 \ \ 1]^T$. Linjesökningsproblemet blir: $min_\alpha f(x_0+\alpha d_0)$. För att lösa linjesökningsproblemet inför vi envariabel-funktionen $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha d_0)$. Vi har $g(\alpha) = 1 + (1-\alpha)^2 + 3(1-\alpha)$ med $g'(\alpha) = -2(1-\alpha) - 3 = 2\alpha - 5$. Lösningen till linjesökningsproblemet ges av $g'(\alpha) = 0$ dvs $\alpha = 2.5$. Nästa approximation blir alltså $x_1 = x_0 + \alpha d_0 = [1 \quad -1.5 \quad -1.5]^T$.

8a) Skriv om problemet som ett system av första ordnings begynnelsevärdesproblem genom att införa $y_1 = y$ och $y_2 = y'$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = p^2(y_1 - a)(0.5y_2^2 - 1), 0 \leq x \leq L \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = v \\ a = -qy_2(L) - y_1(L) \end{cases}$$

Vi får en lösning $y = [y_1 \quad y_2]^T$ som beror på x och α. Inskjutning på a innebär att lösa ekvationen $g(a) = 0$, där $g(a) = a + qy_2(L,a) + y_1(L,a)$.
En iterativ metod för att lösa ekvationen kan vara sekantmetoden: $a_{k+1} = a_k - \frac{g(a_k)(a_k - a_{k-1})}{g(a_k) - g(a_{k-1})}$.
Varje nytt $g(a_k)$, dvs varje iteration, kräver att begynnelsevärdesproblemet löses på nytt och detta är det tunga arbetet.