Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2009-01-16

DAG: Fredag 16 januari 2009 TID: 14.00 - 18.00 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Anslås vid sal MVF21 senast 2 februari, resultat tillsänds dig.
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Låt $\{v_i\}_{i=1}^m$ vara linjärt oberoende vektorer i det linjära rummet V och antag att $u \notin Span\{v_i\}_{i=1}^m$. Visa att då är mängden $\{v_1,\ v_2,\ ,\dots\ v_m,\ u\}$ linjärt oberoende. **(4p)**
b) Visa att polynomen $1-2t+3t^2,\ 2-t+t^2$ och $1+4t-7t^2$ är linjärt beroende i P_2, mängden av polynom av grad ≤ 2. **(3p)**

Uppgift 2.
Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
a) Bestäm ortogonala projektionen av $x = [1\ \ 2\ \ -1]^T$ på nollrummet $Nul(A)$. **(3p)**
b) Bestäm ortogonala projektionen av $y = [1\ \ -1\ \ 1\ \ -1]^T$ på kolonnrummet $Col(A)$. **(4p)**

Uppgift 3. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$.
a) Karakterisera den kvadratiska formen - är den positivt definit, negativt definit eller indefinit? **(1p)**
b) Bestäm största och minsta värde på $Q(x)$ då $\|x\|_2 = 1$. Bestäm alla vektorer u med $\|u\|_2 = 1$ sådana att $Q(u)$ blir maximal resp. minimal. **(4p)**
c) Låt u_1 vara en vektor sådan att $u_1^T u_1 = 4$ och $Q(u_1)$ är maximal. Bestäm största värdet på $Q(x)$ under villkoren $\|x\|_2 = 1$ och $x^T u_1 = 0$. **(2p)**

Uppgift 4. Låt A vara en $m \times n$-matris med $m > n$, $rang(A) = r$ och singulära värden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r \geq 0$.
a) Definiera en full SVD-faktorisering (singulärvärdesfaktorisering) av A. **(2p)**
b) Ange bästa approximation A_k av rang k, $k < r$ till matrisen A. **(2p)**
c) Visa att $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$ då A_k är approximationen enligt b). **(4p)**

Uppgift 5. En funktion $f(x)$ är beräknad i fyra punkter enligt tabellen:

x	-1	0	1	2
f	0	-1	-2	-1

a) Bestäm, som approximation till f, det polynom av grad 2 som ansluter till punkterna $(x,\ f(x))$ i minsta-kvadrat-mening. **(3p)**
b) Bestäm, som approximation till f, interpolationspolynomet genom punkterna. **(3p)**
c) Bestäm, som approximation till f, en kvadratisk spline s genom punkterna, med noder i de inre punkterna $(0,\ -1)$ och $(1,\ -2)$ och som uppfyller $s'(0) = 0$. **(4p)**

Uppgift 6.
a) Vi vill bestämma b så att $\int_0^b \{sin(t) + t^2\}\ dt = 2$ approximativt med Newtons metod. Teckna en iterationsformel som inte innehåller integralberäkning. **(3p)**
b) Anta att du har ett litet fel δb i en approximation $\tilde{b}$ till b i a)-uppgiften. Ange hur stort felet i integralens värde ungefär blir på grund av felet δb. Din formel får innehålla approximationen $\tilde{b}$. **(3p)**

Uppgift 7.
a) Ange sökriktning och optimal steglängd vid steepest descent-metoden på ett kvadratiskt optimeringsproblem i flera variabler utan bivillkor. **(3p)**
b) Gör en iteration med steepest descent-metoden på problemet
$\min x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - x_2$ för $x \in R^2$ med start i origo. **(3p)**

Uppgift 8. Betrakta begynnelsevärdesproblemet
$y'' + y' + cy = t^2 - 1,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$ för $t \geq 0$ och där c är en positiv parameter.
a) Skriv om problemet till ett system av första ordningens differentialekvationer. **(2p)**
b) Undersök för vilka värden på c som problemet är stabilt. **(2p)**
c) Välj $c = 1$ och gör ett steg med Eulers framåtmetod med steglängd $h = 0.1$ på systemet i a)-uppgiften. **(2p)**
d) Anta att vi vill bestämma c så att $y'(1) = -0.5$. Skriv upp den ekvation som ska lösas samt formulera en lämplig iterativ numerisk metod för att lösa ekvationen. Vari består det tyngsta arbetet under en iteration av metoden? **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 16 januari 2009

1a) Undersök en linjärkombination som ger nollvektorn: $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i + du = 0$. Vi ska visa att alla $c_i,\ i = 1, ..., m = 0$ och $d = 0$. Om $d \neq 0$ så gäller $u = -\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{m} c_i v_i \in Span\{v_i\}_{i=1}^{m}$ vilket motsäger antagandet. Alltså är $u = 0$. Men då är $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0$. Antagandet att $\{v_i\}_{i=1}^{m}$ är linjärt oberoende ger nu $c_i = 0,\ i = 1, ...,\ m$.
1b) Koordinatvektorerna i standardbasen för P_2, dvs $\{1,\ t,\ t^2\}$, sätts som kolonner i matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$. Radreduktion på denna matris ger att kolonnerna är linjärt beroende, rangen är 2, dvs de aktuella polynomen är linjärt beroende.

2a) Lös homogena systemet $Ax = 0$, ger $Nul(A) = Span\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. En bas blir alltså $U = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Projektionen blir $\hat{x} = U(U^T U)^{-1} U^T x = \frac{1}{3} U U^T x = \frac{2}{3} U = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
2b) Dimensionen på $Col(A)$ blir enligt dimensionssatsen $3 - 1 = 2$. Exempelvis är, som man lätt ser, kolonnerna 1 och 2 linjärt oberoende så vi kan ta dem som bas för $Col(A)$ och sätta dem som kolonner i matrisen $V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Det gäller att $V^T y = 0$ så projektionen blir $V(V^T V)^{-1} V^T y = 0$.

3) Den kvadratiska formen kan skrivas $Q(x) = x^T A x$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.
Egenvärden och egenvektorer bestäms. Karakteristiska ekvationen $(1 - \lambda)[(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 20]$ har lösningarna $\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ med motsvarande egenvektorer $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.
3a) Egenvärden med olika tecken ger att den kvadratriska formen är indefinit.
3b) Enligt sats i Lay gäller $-3 \leq \frac{Q(x)}{x^T x} \leq 6$, där övre gränsen antas för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{45}}[2\ \ 5\ \ 4]^T$ och undre gränsen antas för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{9}}[1\ \ -2\ \ 2]^T$.

3c) Enligt sats i Lay blir $max\frac{Q(x)}{x^Tx}$ under givna villkor det näst största egenvärdet dvs 1 och antas för motsvarande egenvektor, normerad, dvs för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}[2 \quad 0 \quad -1]^T$.

4a) $A = U\Sigma V^T$ där U och V är ortogonala och Σ är en $m \times n$ kvasi-diagonal med de singulära värdena på diagonalen, $\Sigma_{ii} = \sigma_i, i = 1, .., \ r, \ \Sigma_{ii} = 0, i = r+1, ..., n$.
4b) $A_k = U\Sigma_k V^T$ där Σ_k är kvasi-diagonal med de singulära värdena $(\Sigma_k)_{ii} = \sigma_i, i = 1, .., \ k, \ (\Sigma_k)_{ii} = 0, i = k+1, ..., n$.
4c) Från a) och b) får vi $A - A_k = U(\Sigma - \Sigma_k)V^T$. Tvånormen är invariant under ortogonal transformation så $\|A - A_k\|_2 = \|\Sigma - \Sigma_k\|_2$. Normen för en kvasidiagonal matris är maximala diagonalelementet till belopp. De är alla ickenegativa, de positiva är $\sigma_{k+1}, ..., \sigma_r$ och det största är σ_{k+1}, vsv.

5a) Låt $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Villkoret $p(x) = f(x)$ i givna punkter ger ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Normalekvationerna motsvarande detta system blir $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$. Lösningen till detta system är
$a_0 = -1.3, \ a_1 = -0.9, \ a_2 = 0.5$ så polynomet är $p(x) = -1.3 - 0.9x + 0.5x^2$.
5b) Sätt $p_3 = a + b(x+1) + c(x+1)x + d(x+1)x(x-1)$ (Newtons form).
Bestäm koefficienterna en efter en:
$p_3(-1) = 0$ ger $a = 0$
$p_3(0) = -1$ ger $0 + b = -1$, dvs $b = -1$
$p_3(1) = -2$ ger $0 - 2 + 2c = -2$ dvs $c = 0$
$p_3(2) = -1$ ger $0 - 3 - 0 + 6d = -1$ dvs $d = 1/3$.
Interpolationspolynomet blir: $p_3 = -(x+1) + \frac{1}{3}(x+1)x(x-1)$
5c) Det blir tre spline-delar:
$s_1 = -1 + ax + bx^2$ mellan -1 och 0: $s_1' = a + 2bx$. Villkor $s_1'(0) = 0$ ger $a = 0$ och villkor $s_1(-1) = 0$ ger $b = 1$.
$s_2 = -1 + cx + dx^2$ mellan 0 och 1: $s_2' = c + 2dx$. Villkor $s_2'(0) = s_1'(0) = 0$ ger $c = 0$ och villkor $s_2(1) = -2$ ger $d = -1$.
$s_3 = -2 + e(x-1) + f(x-1)^2$ mellan 1 och 2: $s_3' = e + 2f(x-1)$. Villkor $s_3'(1) = s_2'(1) = -2$ ger $e = -2$ och villkor $s_3(2) = -1$ ger $f = 3$.
Vi får alltså spline-delarna:
$s_1 = -1 + x^2, \ s_2 = -1 - x^2, \ s_3 = -2 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$.

6a) Betrakta ekvationen $f(b) = \int_0^b \{sin(t) + t^2\} \, dt - 2 = 0$. Newtons metod är:
$b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}, \ i = 0, 1, ...$ med startapproximation b_0. Beräkna integralen analytiskt $f(b) = -cos(b) + \frac{b^3}{3} - 1$ och derivatan $f'(b) = sin(b) + b^2$. Iterationsformeln blir alltså $b_{i+1} = b_i - \frac{\frac{b_i^3}{3} - cos(b_i) - 1}{b_i^2 + sin(b_i)}$.
6b) Felfortplantningsformeln ger $\delta f \approx f'(\tilde{b})\delta b = (sin(\tilde{b}) + \tilde{b}^2)\delta b$.

7a) Vi minimerar $f(x)$. Sökmetoden är $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$. I steepest descent är $d_k = -\nabla f(x_k)$. Optimal steglängd vid kvadratisk f är $\alpha_k = -\frac{\nabla f(x_k)^T d_k}{d_k^T H d_k}$. Här är ∇f gradienten och H är Hessianen.

7b) Vi har $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 1 \end{bmatrix}$ och $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Med $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ blir $\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $d_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vidare blir $\alpha_0 = \frac{2}{2} = 1$ och $x_1 = x_0 + d_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8a) Sätt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$ så blir systemet på matrisform
$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ t^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

8b) Egenvärdena till matrisen i a)-uppgiften är $0.5(-1 \pm \sqrt{1-4c})$ och det gäller att realdelen för egenvärdena är icke-positiva då $c > 0$, alltså är problemet alltid stabilt.

8c) Euler framåt på system $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ ser ut: $y_{k+1} = y_k + h(Ay_k + b_k)$. Här får vi $y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Med $h = 0.1$ och $c = 1$ får vi: $y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix}$.

8d) Ekvationen att lösa blir $y_2(1,c) = -0.5$ eller $q(c) \equiv y_2(1,c) + 0.5 = 0$. Sekantmetoden är lämplig: $c_{k+1} = c_k - \frac{(y_2(1,c_k)+0.5)(c_k - c_{k-1})}{y_2(1,c_k) - y_2(1,c_{k-1})}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,$ med två startapproximationer c_0 och c_1. Det tyngsta arbetet i en iteration är all lösa ode-systemet.