Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2008-01-19

DAG: Lördag 19 januari 2008 TID: 8.30-12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Anslås vid sal MVF21 senast 1 februari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm ortogonala projektionen av $x = [1\ 2\ 1]^T$ på nollrummet $Nul(A)$. **(3p)**
b) Bestäm ortogonala projektionen av $y = [1\ 1\ 1\ 1]^T$ på kolonnrummet $Col(A)$. **(5p)**

Uppgift 2.

a) Bestäm en Cholesky-faktorisering dvs en symmetrisk faktorisering $A = LL^T$, med L nedåt triangulär, av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. **(3p)**

b) Egenvärdena till A i a)-uppgiften är $1,\ 4 + 2\sqrt{3}$ och $4 - 2\sqrt{3}$. Bestäm de singulära värdena till L. **(4p)**

Ledning: Visa först att L och L^T har samma singulära värden.

c) Låt $A \in R^{m \times n}$ med $m > n$ och $rang(A) = n$. Visa hur man kan få en Cholesky-faktorisering av matrisen $A^TA + \alpha I$, där $\alpha > 0$ genom att QR-faktorisera matrisen $\begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\alpha} I \end{bmatrix}$. **(4p)**

Uppgift 3.

a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + x_2(t) & x_1(0) = 0 \\ x_2'(t) = -x_2(t) & x_2(0) = -1 \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t) - 3x_3(t) & x_3(0) = 2 \end{cases} . \textbf{ (4p)}$$

b) Vad blir det för problem med metoden om andra ekvationen ändras till $x_2'(t) = -x_2(t)x_3(t)$? **(1p)**

c) Bestäm en approximation av lösningen till problemet, med ändringen enligt b-uppgiften, i punkten $t = 0.2$ genom att använda Eulers framåtmetod och steglängd $h = 0.1$. **(3p)**

Uppgift 4. Betrakta avbildningen

$F(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (a_1 - a_2) + (a_0 - 2a_3)t + (a_1 + a_2)t^2 + (2a_3 - a_1)t^3$

från P_3 till P_3, där P_3 är rummet av polynom av grad ≤ 3.

a) Visa att $p_1 = 1 + 2t,\ p_2 = -t,\ p_3 = 2 + t + t^2,\ p_4 = 1 - t + 2t^2 + t^3$ är bas i P_3. **(2p)**

b) Bestäm matrisen för avbildningen F i basen enligt a-uppgiften. **(4p)**

Uppgift 5.

Betrakta funktionen $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ på intervallet $-1 \leq x \leq 2$.

a) f har ett nollställe mellan 1.5 och 2. Bestäm en approximation av nollstället genom att göra en Newton-iteration med start i $x_0 = 1.5$. Gör en feluppskattning på den erhållna approximationen. **(3p)**

b) Gör en en grov approximation av $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ med Trapetsformeln och steglängd $h = 1$. Bestäm felet exakt. **(2p)**

c) Bestäm en kvadratisk spline-approximation $s(x)$ till $f(x)$ med nod i $x = 0$, som interpolerar i punkterna $x = -1,\ x = 0$ och $x = 2$ och som uppfyller villkoret $s'(0) = f'(0)$. Hur stort blir maximala felet $|\ s(x) - f(x)\ |$ på intervallet $-1 \leq x \leq 2$? **(4p)**

Uppgift 6.

a) Definiera matematiskt vad som menas med en tillåten riktning vid optimering. **(2p)**

b) Definiera matematiskt vad som menas med en descentriktning vid optimering. **(2p)**

c) Formulera sekantmetoden vid optimering av en deriverbar funktion av en variabel. **(2p)**

Uppgift 7. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$y' = -y^3 + ty, \quad y(0) = 1.$

a) Anta att du vill använda Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.1$ för att bestämma en approximation till $y(0.1)$. Skriv upp den tredjegradsekvation som du får att lösa. **(3p)**

b) Man behöver inte lösa tredjegradsekvation om man använder Eulers framåtmetod som prediktor och gör fixpunktsiteration i Eulers bakåtmetod (korrektorn). Gör **en** fixpunktsiteration för att approximera $y(0.1)$. **(3p)**

Uppgift 8. Betrakta ett tvåpunkts randvärdesproblem

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = t, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

Välj steglängd $h = 0.25$ och sätt upp det linjära ekvationssystem som differensapproximation av derivatorna med centraldifferenser ger. Systemet behöver inte lösas. **(6p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 19 januari 2008

1a) Lös homogena systemet $Ax = 0$, ger $Nul(A) = Span \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. ON-bas blir $U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Projektionen blir $\hat{x} = UU^T x = \frac{2}{\sqrt{3}} U = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Radreduktion på A ger $Col(A) = Span\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \}$. Ortogonalisering genom Gramm-Schmidt på andra basvektorn ger $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{5}{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. ON-bas blir $V = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{10} & 0 \\ 2/\sqrt{10} & -2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}$. Projektionen blir $\hat{y} = VV^T y = V \begin{bmatrix} 6/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{14} \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 42 \\ 32 \\ 26 \\ 35 \end{bmatrix}$.

2a) Genom enkel variant på vanlig Gausselimination finner vi att $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Bevis av ledning: Om $L = U\Sigma V^T$ är SVD av L så är $L^T = V\Sigma U^T$ eftersom Σ är kvadratisk och diagonal. Alltså har vi L^T på SVD-form med samma singulära värden som L.
Vidare är, enligt SVD-teorin, de singulära värdena till L^T roten ur egenvärdena till $LL^T = A$. Alltså är de sökta singulära värdena 1, $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ och $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

c) QR-faktorisering: $B = \begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\alpha} I \end{bmatrix} = QR$. Då blir $A^T A + \alpha I = B^T B = (QR)^T (QR) = R^T Q^T QR = R^T R$ ty Q ortogonal. Alltså är R^T motsvarande Cholesky-faktor L till matrisen $A^T A + \alpha I$.

3a) Problemet är på matrisform $y' = Ay$, där $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -3$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = [1\ 0\ 1]^T,\ v_2 = [1\ 1\ 1]^T$ och $v_3 = [0\ 0\ 1]^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 2$.

Lösningen blir alltså $x = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3b) Metoden fungerar bara för linjära system.
3c) Euler framåtmetod på ett system $x' = f(x,t)$ kan skrivas
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + hf(x^{(k)}, t^{(k)}),\ k = 0,\ 1, \ldots.$
Två steg med $h = 0.1$ från $x^{(0)} = x(0)$ ger:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.8 \\ 1.3 \end{bmatrix},\ x^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.8 \\ 1.3 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -0.6 \\ 1.04 \\ -4.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.16 \\ -0.696 \\ 0.82 \end{bmatrix}.$$

4a) Överföringsmatrisen mellan den givna basen och standardbasen $\{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$ är
$P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, som är reguljär ty egenvärdena är 1, -1, 1 och 1, alltså är basen ok!

4b) Matrisen för avbildningen blir i standardbasen $M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Matrisen i den givna basen blir då $M = P_{C \leftarrow B} M' P_{B \leftarrow C}$, där $P_{C \leftarrow B} = P_{B \leftarrow C}^{-1}$= (med Gausselimination) $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Matrismultiplikation ger $M = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -7 & 4 \\ -9 & 4 & -11 & 1 \\ 6 & -3 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

5a) $f'(x) = 3x^2 - 4x$. Newtons metod ger: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 + \frac{-1/8}{3/4} = \frac{5}{3}$.
Feluppskattning: $\mid x_1 - x^* \mid \leq \frac{|f(5/3)|}{|f'(5/3)|} = \frac{2}{45}$.
5b) Trapetsformeln ger $T(1) = f(-1)/2 + f(0) + f(1) + f(2)/2 = \frac{1}{2}$.
Exakt blir integralen $[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x]_{-1}^{2} = \frac{3}{4}$ och felet blir då $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
5c) Splinen har två delar: $s_1(x) = 1 + ax + bx^2, \quad -1 \leq x \leq 0$. Då gäller $s_1(0) = 1$.
$s_1'(x) = a + 2bx$ och villkoret $s_1'(0) = f'(0) = 0$ ger $a = 0$.
Vidare ger $s_1(-1) = -2$ att $b = -3$ så första delen är $s_1(x) = 1 - 3x^2$.
För den andra delen ansätts $s_2 = 1 + cx + dx^2, \quad 0 \leq x \leq 2$. Då gäller $s_2(0) = 1$.
$s_2'(x) = c + 2dx$ och villkoret $s_2'(0) = 0$ ger $c = 0$.
Vidare ger villkoret $s_2(2) = 1$ att $d = 0$ och andra delen är bestämd till $s_2(x) = 1$.
För felet får vi $f - s_1 = x^3 + x^2$ med största värde för $x^* = -2/3$ med $\mid f(x^*) - s_1(x^*) \mid = 4/27$ resp. $f - s_2 = x^3 - 2x^2$ med största värde för $x^* = 4/3$ med $\mid f(x^*) - s_2(x^*) \mid = 32/27$, som alltså blir största felet.

6a) En riktning d är tillåten riktning i punkten x om $x + \alpha d$ är tillåtna punkter för $0 < \alpha < \delta_1$ för något $\delta_1 > 0$.
6b) En riktning d är en decsentriktning för funktionen f i punkten x om $f(x + \alpha d) < f(x)$ för $0 < \alpha < \delta_2$ för något $\delta_2 > 0$.
6c) $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k-1)})}, \quad k = 1,\ 2,\ ....$

7a) Eulers bakåtmetod blir: $y_1 = y_0 + 0.1(-y_1^3 + 0.1y_1) = 1 - 0.1y_1^3 + 0.01y_1$
Tredjegradsekvationen kan skrivas: $0.1y_1^3 + 0.99y_1 - 1 = 0$.
b) Eulers framåtmetod: $y_1^{(0)} = 1 + 0.1(-1 + 0) = 0.9$
Fixpunktsiteration: $y_1^{(1)} = 1 + 0.1(-0.9^3 + 0.1 \cdot 0.9) = 0.9361$.

8) Med $y_i \approx y(t_i), t_1 = 0, \quad t_i = (i-1)h, \ i = 2,\ ...,\ 5$ får vi differensekvationerna:
$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) - 2y_i = t_i, \quad i = 2, 3, 4, \quad y_1 = 0, \quad y_5 = 1.$
Ekvationssystemet blir:

$$\begin{bmatrix} -34 & 18 & 0 \\ 14 & -34 & 18 \\ 0 & 14 & -34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 - 18 \end{bmatrix}.$$