Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2007-06-02

DAG: Lördag 2 juni 2007 TID: 14.00-18.00 SAL: VV

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad 22 juni, resultat tillsänds dig.
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall motiveras väl

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Definiera begreppen **nollrum, värderum** och **rang** för en allmän matris. Vad menas med att matrisen har full rang? Vad kallas en kvadratisk matris som inte har full rang? **(3p)**

b) Bestäm baser för värderum och nollrum samt rangen för matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(3p)
c) Bestäm en LU-faktorisering med pivotering av matrisen i b-uppgiften. **(3p)**

Uppgift 2.
a) Visa att $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ för alla $x \in R^n$ då och endast då U är en ortogonal matris. **(4p)**
b) Visa hur SVD ger minsta-kvadratlösningen till ett överbestämt linjärt ekvationssystem. Visa att om lösningen inte är entydig så får man den lösning som har minsta 2-norm. **(4p)**

Uppgift 3.

a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + x_2(t) & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = -x_2(t) & x_2(0) = 2 \\ x_3'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - 3x_3(t) & x_3(0) = 3 \end{cases} \quad \textbf{(4p)}$$

b) Är systemet stabilt? **(1p)**

c) Utgå från $x(0)$ och gör ett steg med Eulers framåtmetod för att få en approximation till $x(0.5)$. Är metoden stabil för denna steglängd $h = 0.5$? **(3p)**.

Uppgift 4.

Låt P_k vara rummet av polynom av grad $\leq k$.

a) Bestäm en ortogonal bas för P_2 med avseende på skalärprodukten $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ på $C[0, 1]$. **(3p)**

b) Betrakta avbildningen $F : P_2 \to P_4$ så att $Fp(t) = p(t) - t^2 p(t)$. Bestäm matrisen för avbildningen i basen för P_2 enligt a-uppgiften och standardbasen för P_4. **(3p)**

Uppgift 5.

Betrakta algoritmen $y = a/b$ i ett flyttalssystem med dubbel precision i IEEE standard (2,53,-1022,1023).

a) Använd bakåtanalys för att avgöra om algoritmen är stabil eller inte. Ta hänsyn till avrundningen när indata a och b lagras i flyttalssystemet. **(4p)**

b) Antag att $a = 1$. Bestäm det minsta positiva flyttalet b som inte ger overflow i flyttalssystemet. Vi antar att gradual underflow inte tillämpas. **(3p)**

Uppgift 6.

a) Definiera linjesökningsproblemet vid optimering i flera variabler utan bivillkor. **(3p)**.

b) Formulera en numerisk metod för att lösa linjesökningsproblemet. **(2p)**

c) Gör en iteration med Steepest Descentmetoden på det kvadratiska problemet $min_{x \in R^2} \ \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ där $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ med start i $x_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$. **(3p)**

Uppgift 7.

Betrakta funktionen $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 5$, som har ett nollställe $x^* = (\sqrt{5} + 1)/2$.

a) Approximera x^* med en iteration av Newtons metod och start i $x_0 = 1.5$. **(2p)**

b) Bestäm interpolationspolynomet till f i punkterna 0, 0.5 och x^*. **(3p)**

c) Approximera $\int_0^{x^*} f(x)\, dx$ med trapetsformeln och funktionsvärdena $f(0)$, $f(0.5)$ och $f(x^*)$. **(2p)**

Uppgift 8.

Betrakta prediktor/korrektorparet Eulers framåtmetod som prediktor och trapetsmetoden som korrektor för att lösa begynnelsevärdesproblem för system av ordinära differentialekvationer.

a) Anta att man gör **en** fixpunktsiteration i korrektorn. Skriv upp den explicita metod man då får. **(3p)**

b) Bestäm approximationsordning för metoden i a-uppgiften. **(2p)**

c) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i a-uppgiften. **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 2 juni 2007

1a) $A \in R^{m\times n}$, $Nul(A) = \{x \in R^n : Ax = 0\}$, $Col(A) = \{b \in R^m : Ax = b\}, rank(A) = dim(Col(A))$

b) Lös homogena systemet $Ax = 0$, ger $Nul(A) = Span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\}$. Radreduktion på A ger $Col(A) = Span\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Rangen är $dim(Col(A)) = 2$.

c) Genom enkel variant på vanlig Gausselimination finner vi att $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2a) U ortogonal ger $\|Ux\|_2^2 = x^TU^TUx = x^Tx = \|x\|_2^2$. Å andra sidan anta $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ för alla x och låt U:s kolonn nr j vara u_j. Valet $x = e_j$, j:te kolonnen i enhetsmatrisen, ger $(Ux)^T(Ux) = u_j^Tu_j = x^Tx = 1$ och valet $y = e_i + e_j$, $i \neq j$ ger då $(Uy)^T(Uy) = u_i^Tu_i + u_j^Tu_j + 2u_i^Tu_j = y^Ty = 1 + 1$ som ger $u_i^Tu_j = 0$, alltså är Uortogonal.
b) Låt $A = U_1\Sigma_rV_1^T$ vara kompakt SVD-faktorisering av A. Då ges minsta-kvadrat-lösningen till överbestämda systemet $Ax = b$, med minsta norm på x, av $\hat{x} = V_1\Sigma_r^{-1}U_1^Tb$. Kolonnerna i U_1 och V_1 är ortonormala och $Col(A) = Col(U_1)$.
Då gäller $A\hat{x} = U_1\Sigma_rV_1V_1^T\Sigma_r^{-1}U_1^Tb = U_1U_1^Tb$, dvs $A\hat{x}$ är bästa approximation till b i $Col(A) = Col(U_1)$. För att visa att $\hat{x}$ har minsta norm, betrakta en allmän lösning $\hat{x} + h$ med $h \in Nul(A)$, dvs $h = V_2y_2$, för något y_2, där V_2 är bas för $Nul(A)$ och därmed ortogonal mot $Col(V_1) = Col(A^T)$. Vidare är enligt ovan $\hat{x} = V_1y_1$ med $y_1 = \Sigma_r^{-1}U_1^Tb$. Vi har alltså $\|\hat{x} + h\|_2^2 = \|V_1y_1 + V_2y_2\|_2^2 = \|[V_1\ V_2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\|_2^2 = \|y_1\|_2^2 + \|y_2\|_2^2$, som minimeras om $y_2 = 0$, dvs om $h = 0$.

3a) Problemet är på matrisform $y' = Ay$, där $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Blockindela matrisen och finn enkelt egenvärdena är $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -3$.

Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (1,0,1)^T,\ v_2 = (2,2,3)^T$ och $v_3 = (0,0,1)^T$.

Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = -1,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = -e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Alla egenvärden har negativ realdel, alltså är systemet stabilt.

c) Eulers framåtmetod blir: $y_1 = y_0 + hAy_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Metoden är stabil eftersom $|1 + h\lambda_j| \leq 1$ för alla λ_j.

4a) Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess tillämpas utgående från standardbasen $\{1,\ t,\ t^2\}$: $p_1 = 1,\ p_2 = t - \frac{\int_0^1 t\ dt}{\int_0^1 1\ dt} = t - \frac{1}{2},\ p_2 = t^2 - \frac{\int_0^1 t^2\ dt}{\int_0^1 1\ dt} - \frac{\int_0^1 t^2(t-0.5)\ dt}{\int_0^1 (t-0.5)^2\ dt}(t - 0.5) = t^2 - t + \frac{1}{6}$.

b) Vi undersöker avbildningen på baselementen enligt a-uppgiften: $Fp_1 = 1 - t^2,\ F(t - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}t^2 - t^3,\ F(t^2 - t + \frac{1}{6}) = \frac{1}{6} - t + \frac{5}{6}t^2 + t^3 - t^4$. Matrisen för avbildningen blir i standardbasen för P_4: $M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5a) Standardteknik för undersökning av stabilitet hos algoritm med hjälp av bakåtanalys, där för alla ϵ_i gäller $|\epsilon_i| \leq \mu$, där μ är avrundningsenheten: $\hat{x}_1 = fl(x_1) = x_1(1+\epsilon_1)$, $\hat{x}_2 = fl(x_2) = x_2(1+\epsilon_2)$, $fl(\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2}) = \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2}(1+\epsilon_3) = \frac{x_1(1+\epsilon 1)}{x_2(1+\epsilon_2)}(1+\epsilon_3) = \frac{x_1(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3)}{x_2(1+\epsilon_2)} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$, där $\bar{x}_1 = x_1(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3) = x_1(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2) \approx x_1(1+\epsilon_1+\epsilon_2)$ och $\bar{x}_2 = x_2(1+\epsilon_2)$. De relativa felen blir $|\frac{\bar{x}_1 - x_1}{x_1}| \approx |\epsilon_1 + \epsilon_2| \leq 2\mu$, $|\frac{\bar{x}_2 - x_2}{x_2}| = |\epsilon_2| \leq \mu$. Dessa små bakåtfel gör att algoritmen är stabil.
b) $UFL = 2^{-1022}$ går bra eftersom $\frac{1}{2^{-1022}} = 2^{1022} < OFL = 2^{1024}(1-2^{-53})$.

6a) $min_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$, där d_k är vald sökriktning i punkt x_k.
b) Sekantmetoden: $\alpha_{l+1} = \alpha_l - \frac{f(x_k+\alpha_l d_k)(\alpha_l - \alpha_{l-1})}{f(x_k+\alpha_l d_k) - f(x_k+\alpha_{l-1}d_k)}, l = 0, 1, ...$
c) $\nabla f(x_0) = Ax_0 - b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, $d_0 = -\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, $\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x_0)^T d_0}{d_0^T A d_0} = -\frac{-0.1}{0.44}$,
$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.4}\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4.4}\begin{bmatrix} 1.22 \\ 1.9 \end{bmatrix}$.
7a) $f'(x) = 6x^2 - 14x + 3$. Newtons metod: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{0.5}{-4.5} = \frac{14.5}{9}$.
b) Newtons form: $P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-0.5)$. Koefficienterna bestäms från interpolationsvillkoren: $c_0 = 5$, $5 + 0.5c_1 = 5 \Rightarrow c_1 = 0$, $5 + c_2(5+\sqrt{5})/4 = 0 \Rightarrow c_2 = -(5-\sqrt{5})$. Polynomet blir alltså $P_2 = 5 - (5-\sqrt{5})x(x-0.5)$.
c) Trapetsformeln ger: $T(0.5) = 0.5 \cdot 5 + \frac{5}{2}(x^* - 0.5) = 1.25(2+\sqrt{5})$.
8a) Metoden blir: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$.
b) På testekvationen blir det: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2})$. Metodens tillväxtfaktor stämmer med tre termer i Taylorutvecklingen av exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda}$, alltså har metoden ordning 2.
c) Från tillväxtfaktorn i b-uppgiften får vi stabilitetsområdet, med $z = h\lambda$:
$\{x \in C; |1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1\}$.