Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2006-09-01

DAG: Fredag 1 september 2006 TID: 8.30-12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Anslås vid sal MVF21 senast 20 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att $Nul(A) = Col(A^T)^{\perp}$ för en matris $A \in R^{m\times n}$. **(3p)**
b) Låt $A = U\Sigma V^T$ vara en kompakt SVD-faktorisering av $A \in R^{m\times n}$, $m > n$, med $rang(A) = n$. Visa att ortogonala projektionen av $b \in R^m$ på $Col(A)$ kan skrivas $\hat{b} = UU^Tb$. **(4p)**.

Uppgift 2. Låt $V = Span\{t,\ sin^2t,\ cos^2t\}$ vara underrum i $C(R)$, med de angivna elementen som standardbas B.
a) Visa att även $C = \{1,\ t,\ sin^2t\}$ är bas i underrummet och bestäm koordinaterna i denna bas för den vektor som i standardbasen har koordinaterna $[2,\ 4,\ 1]^T$. **(3p)**
b) Betrakta avbildningen $F(a_0t + a_1sin^2t + a_2cos^2t) = (a_0 + a_1) + (a_2 - a_1)t + a_2sin^2t$ på underrummet. Bestäm matrisen för F i den givna standardbasen. **(3p)**
c) Bestäm vinkeln mellan baselementen $c_1 = 1$ och $c_2 = t$ i rummet $C[0,1]$ med skalärprodukt $< u, v >= \int_0^1 u(t)v(t)\ dt$. **(2p)**

Uppgift 3. Låt $P_1 = I - 2u_1u_1^T$ och $P_2 = I - 2u_2u_2^T$, där u_1 och u_2 är ortonormala vektorer i R^n.
a) Visa att P_1 och P_2 är symmetriska och ortogonala matriser. **(2p)**
b) Bestäm alla egenvärden till produktmatrisen $P = P_1 \cdot P_2$. **(3p)**
c) Beskriv geometriskt transformationen $x \to Px,\ x \in R^n$. **(2p)**

Uppgift 4. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 6x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
a) Bestäm största och minsta värde på $Q(x)$ då $\|x\|_2 = 1$. Bestäm alla vektorer u med $\|u\|_2 = 1$ sådana att $Q(u)$ blir maximal resp. minimal. **(4p)**
b) Låt u_1 vara vektor så att $u_1^T u_1 = 6$ och $Q(u_1)$ maximal. Bestäm största värdet på $Q(x)$ under villkoren $\|x\|_2 = 1$ och $x^T u_1 = 0$. **(2p)**

Uppgift 5. Betrakta Newtons metod för att lösa ekvationen $2x^3 - 5x^2 + x - 1 = 0$. Vi söker den reella roten mellan 2 och 2.5.
a) Vilken konvergenshastighet har metoden för den aktuella roten? **(2p)**
b) Hur yttrar sig konvergenshastigheten i antal korrekta decimaler under iterationernas gång? **(2p)**
c) Gör en iteration med Newtons metod från $x_0 = 2$ för att bestämma en approximation till roten. **(2p)**

Uppgift 6. Betrakta polynomet $p_2 = 3x^2 - 4x + 1$, som går genom punkterna (-1,8), (0,1), 1,0) och (2,5).
a) Hur många polynom av exakt grad 3, dvs polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ med $a_3 \neq 0$, går det genom punkterna? **(2p)**
b) Bestäm en kvadratisk spline som går genom punkterna. Är splinen entydigt bestämd? **(3p)**.
c) Bestäm en approximation till $\int_{-1}^{2} p_2(x)dx$ med trapetsformeln och steglängd $h = 1$. **(2p)**
d) Använd även steglängd $h = 0.5$ i trapetsformeln och bestäm en approximation till integralen i c-uppgiften med Richardsonextrapolation. **(3p)**

Uppgift 7.
a) Definiera vad som menas med en tillåten riktning resp. en descentriktning för en sökmetod vid optimering. **(2p)**
b) Definiera linjesökningsproblemet vid flerdimensionell optimering utan bivillkor. **(2p)**
c) Gör en iteration med Steepest Descent på problemet att minimera $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_2 - x_1$ då $x \in R^2$ utgående från (1,1). Välj optimal steglängd vid linjesökningen. **(4p)**

Uppgift 8. Betrakta systemet

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' = -y_2 + y_3 \\ y_3' = y_2 - ay_3 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \\ y_3(0) = 0 \end{cases}$$

a) Bestäm för vilka a-värden systemet är stabilt. **(3p)**
b) Låt $a = 2$ och gör ett steg med Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.5$ från $x_0 = [0,\ 0,\ 0]^T$. **(3p)**
c) För vilka steglängder är Eulers framåtmetod stabil då $a = 1$? **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 1 september 2006

1a) $x \in Nul(A) \Leftrightarrow Ax = 0$ dvs x är ortogonal mot alla rader i A dvs x är ortogonal mot alla kolonner i A^T dvs $x \in Col(A^T)^{\perp}$.
1b) Enligt normalekvationerna är $\hat{b} = A(A^TA)^{-1}A^Tb$. Nu gäller från SVD att $A^TA = V\Sigma^TU^TU\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T$ och $(A^TA)^{-1} = V\Sigma^{-2}V^T$. Detta ger $A(A^TA)^{-1}A^T = U\Sigma V^TV\Sigma^{-2}V^TV\Sigma^TU^T = UU^T$. Alltså är $\hat{b} = UU^Tb$.

2a) Det gäller att $c_1 = 1 = sin^2t + cos^2t$. Överföringsmatrisen blir $P_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som är reguljär, alltså är basen ok!

Koordinaterna ges av ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
2b) $F(t) = 1 = sin^2t + cos^2t = b_2 + b_3,\ F(sin^2t) = 1 - t = sin^2t + cos^2t - t = -b_1 + b_2 + b_3,\ F(cos^2t) = t + sin^2t = b_1 + b_2$ och matrisen blir $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
2c) $cos\alpha = \frac{\int_0^1 t\ dt}{\sqrt{\int_0^1 1\ dt)}\sqrt{\int_0^1 t^2\ dt)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dvs $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
3a) $P_1^T = I - (2u_1u_1^T)^T = I - 2u_1u_1^T = P_1$, alltså symmetrisk, pss för P_2.
$P_1^TP_1 = (I - 2u_1u_1^T)(I - 2u_1u_1^T) = I - 2u_1u_1^T - 2u_1u_1^T + 4u_1u_1^Tu_1u_1^T = I$ ty $u_1^Tu_1 = 1$. Alltså är P_1 ortogonal och pss visas för P_2.
3b) $P = (I - 2u_1u_1^T)(I - 2u_2u_2^T) = I - 2u_1u_1^T - 2u_2u_2^T + 4u_1u_1^Tu_2u_2^T = I - 2u_1u_1^T - 2u_2u_2^T$ ty $u_1^Tu_2 = 0$. Tag nu $\{u_j\}_{j=1}^n$ som ON-bas. Då gäller $Pu_1 = -u_1,\ Pu_2 = -u_2,\ Pu_j = u_j,\ j \geq 3$. Vi har alltså två egenvärden -1 och $n-2$ egenvärden 1.
3c) Först spegling i plan genom origo som är ortogonalt mot u_2, sedan spegling i plan genom origo som är ortogonalt mot u_1.

4a) Egenvärden och egenvektorer bestäms. Karakteristiska ekvationen $(6-\lambda)[(4-\lambda)(6-\lambda)-8]$ har lösningarna $\lambda = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ med motsvarande egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Enligt sats i Lay gäller $2 \leq \frac{Q(x)}{x^T x} \leq 8$, där övre gränsen antas för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och undre gränsen antas för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4b) Enligt sats i Lay blir $max\frac{Q(x)}{x^T x}$ under givna villkor det näst största egenvärdet dvs 6 och antas för motsvarande egenvektor, normerad, dvs för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5a) $f'(x) = 6x^2 - 10x + 1$ med $f'(x) > 0$ för $2 \leq x \leq 2.5$. Roten är alltså en enkelrot och konvergensen är kvadratisk.

5b) Antalet korrekta decimaler fördubblas vid varje iteration.

5c) $x_0 = 2,\ x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-3}{5} = 2.6.$

6a) Inga, ty interpolationspolynomet av grad ≤ 3 är p_2 och det är entydigt bestämt.
6b) $s = p_2$ ty alla villkor är då uppfyllda. Det är inte entydigt eftersom ett extravillkor kan ställas vid kvadratisk spline.
6c) $T(1) = \frac{1}{2}[p_2(-1) + 2p_2(0) + 2p_2(1) + p_2(2)] = \frac{1}{2}[8 + 2 + 0 + 5] = 7.5$

6d) $T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}[8 + 7.5 + 2 - 0.5 + 0 + 3.5 + 5] = 6.375.$ Richardsonextrapolation ger $R(\frac{1}{2}) = 6.375 - \frac{7.5-6.375}{3} = 6.$

7a) d är tillåten riktning i x om $x + \alpha d$ är tillåten för $0 \leq \alpha \leq \delta_0$, där $\delta_0 > 0$.
d är en descentriktning för f i punkten x om $f(x + \alpha d) < f(x)$ för $0 \leq \alpha \leq \delta_1$, där $\delta_1 > 0$.
7b) Linjesökningsproblemet för minimering av f definieras för vald sökriktning d i punkten x som: $min_\alpha f(x + \alpha d)$.
7c) $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 - 1 \\ 4x_2 - 3 \end{bmatrix}$. Iterationen blir $x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0$ där $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $d_0 = -\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x_0) \cdot d_0}{d_0 \cdot H d_0} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$.
Detta ger $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8a) Vi har systemet $y' = Ay$ där $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{bmatrix}$. A har egenvärdena -1 och egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$ som är $-\frac{1+a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-2a+5}}{2}$. Dessa är icke-positiva om $a^2 - 2a + 5 \leq (1+a)^2$ och det gäller om $a \geq 1$ som alltså är stabilitetsvillkoret.

b) $y_1 = y_0 + hAy_1$ med $y_0 = y(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.Vi får ett ekvationssystem $(I - \frac{1}{2}A)y_1 = y_0$ dvs $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ med lösning $y_1 = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 6 \end{bmatrix}$.

8c) Egenvärdena är -1, 0 och -2. Stabilitetsvillkoret för Eulers framåtmetod (och reella egenvärden) är $h\lambda \geq -2$ för alla egenvärden λ. Här ställer $\lambda = -2$ störst krav och det blir $-2h \geq -2$ dvs $h \leq 1$.