Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2006-05-30

DAG: Tisdag 30 maj 2006 TID: 14.15-18.15 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Anslås vid sal MVF21 senast 16 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att om U är en ortogonal matris så gäller $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ för alla $x \in R^n$. **(2p)**
b) Visa att om $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ för alla $x \in R^n$ så är U ortogonal. **(4p)**

Uppgift 2. Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (2a_1 - 2a_2) + (2a_0 + 3a_2)t + 3a_2 t^2$ från P_2 till P_2, där P_2 är mängden av polynom av grad ≤ 2.
a) Visa att $p_1 = 1,\ p_2 = 1 - 2t,\ p_3 = t^2 - t$ är bas i P_2 och bestäm matrisen för F i denna bas. **(4p)**
b) Bestäm alla egenvärden med tillhörande egenvektorer för avbildningen F. **(2p)**
c) Ortogonalisera basen i a-uppgiften med Gram-Schmidts process på $C[0,1]$ med standardskalärprodukten $< u, v >= \int_0^1 u(t)v(t)\, dt$. **(3p)**

Uppgift 3.
a) Bestäm baser för värderum och nollrum till matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 10 \end{bmatrix}$. **(3p)**
b) Bestäm en Cholesky-faktorisering av A (i a-uppgiften), dvs bestäm en nedåt triangulär matris L sådan att $LL^T = A$. **(3p)**
c) Bevisa generellt att R i en QR-faktorisering av en matris A är Choleskyfaktorn L^T i en Cholesky-faktorisering (definierad i b-uppgiften) av matrisen $A^T A$. **(3p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: **(4p)**

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + x_2(t), & x_1(0) = 2 \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = -2x_3(t), & x_3(0) = 1 \end{cases}$$

b) Visa att problemet är stabilt. **(1p)**
c) Gör ett steg med trapetsmetoden och steglängd $h = 1$ från $x(0)$. **(3p)**
d) Är trapetsmetoden stabil för problemet och steglängden i c-uppgiften? **(1p)**

Uppgift 5.
a) Definiera framåt- och bakåtfelet vid en approximation $\hat{f}$ av en funktion f. **(2p)**
b) Undersök med bakåtfelanalys om algoritmen $y = x^2$ är stabil i ett IEEE flyttalssystem. Ta hänsyn till att x måste lagras i flyttalssystemet som $\hat{x} = fl(x)$. **(4p)**

Uppgift 6. Betrakta funktionen $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 1$.
a) Gör en iteration med sekantmetoden och start i $x_0 = 2,\ x_1 = 3$ för att bestämma en approximation till en rot till $f(x) = 0$. **(2p)**
b) Bestäm en approximation till $\int_0^3 f(x)\,dx$ med trapetsformeln och steglängd $h = 1$. **(2p)**
c) Bestäm en kvadratisk spline $s(x)$ med noder i $x = 1$ och $x = 2$, som interpolerar $f(x)$ i punkterna $x = 0,\ x = 1,\ x = 2$ och $x = 3$ och som uppfyller villkoret $s'(0) = f'(0)$. **(4p)**

Uppgift 7. Vid studiet av en viss larv är man intresserad av sambandet mellan larvens vikt W och dess syrekonsumtion R. Av biologiska skäl gäller sambandet $R = bW^a$ och man önskar bestämma parametrarna a och b genom att anpassa till uppmätta data $(R_i,\ W_i),\ i = 1,\ ...,\ m$.
a) Linjärisera modellen och ange hur linjär minsta-kvadrat anpassning kan användas. Skriv upp ekvationssystemet som man får att lösa. **(3p)**
b) Behåll den ursprungliga modellen och använd icke-linjär minsta-kvadrat anpassning. Ange residual och Jakobian, med explicit angivande av ingående derivator. Sätt upp Gauss-Newtons metod för lösning av problemet. Hur kan man få lämplig startapproximation? **(4p)**

Uppgift 8. För studium av mekaniska påfrestningar på ryggraden hos människor används följande differentialekvationsmodell, där p, q och v är givna parametrar

$$\begin{aligned} &y'' = p^2(y + a)(0.5(y')^2 - 1), \quad 0 \le x \le L \\ &y(0) = 0, \quad y'(0) = v \\ &a = -(qy'(L) + y(L)) \end{aligned}$$

a) För över problemet till ett system av första ordningens ekvationer. **(2p)**
b) Om a-värdet vore känt från början vore det inga problem att lösa systemet. Helt analogt med inskjutningsmetoden kan man formulera en ekvation vars lösning ger korrekt a-värde och därmed lösningen. Ange denna ekvation och formulera en lämplig metod att lösa den. **(4p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 30 maj 2006

1a) $\|Ux\|_2^2 = (Ux)^T(Ux) = x^TU^TUx = x^Tx = \|x\|_2^2$.
b) Låt $U = [u_1 \;\; u_2 \;\; ... \;\; u_n]$ och välj $x = e_i = [0 \;\; ... \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; ... \;\; 0]^T$. Då gäller $(Ux)^T(Ux) = u_i^Tu_i = \|x\|_2^2 = 1$. Välj nu $y = e_i + e_j,\ i \neq j$. Då gäller $(Uy)^T(Uy) = (u_i+u_j)^T(u_i+u_j) = u_i^Tu_i+u_j^Tu_j+2u_i^Tu_j = 2+2u_i^Tu_j = \|y\|_2^2 = 2$, vilket ger $u_i^Tu_j = 0,\ i \neq j$. Alltså är kolonnerna i U ortonormala, v.s.v.

2a) Standardbasen för P_2 är $B = \{1,\ t,\ t^2\}$. Den nya basen är $C = \{1,\ 1-2t,\ t^2-t\}$ och dess koordinater i standardbasen ger transformationsmatrisen $P_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, som är reguljär och därmed är basen korrekt. Avbildningen på baselementen i C ger $F(1) = 2t = p_1 - p_2,\ F(1-2t) = -4+2t = -3p_1 - p_2,\ F(t^2-t) = -4+3t+3t^2 = -p_1-3p_2+3p_3$. Matrisen för avbildningen är då $M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
b) Egenvärdena till matrisen M i a-uppgiften är $\lambda_1 = 3$ och egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, som är $\lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2$. Motsvarande egenvektorer till matrisen är $v_1 = [1 \;\; -1 \;\; 1]^T,\ v_2 = [1 \;\; 1 \;\; 0]^T,\ v_3 = [3 \;\; -1 \;\; 0]^T$. Egenvektorerna (egenfunktionerna) till avbildningen blir då $p_1 - p_2 + p_3 = t + t^2,\ p_1 + p_2 = 2 - 2t$ och $3p_1 - p_2 = 2 + 2t$.
c) Man kontrollerar lätt att p_1 och p_2 är ortogonala. Vi ortogonaliserar p_3 genom Gram-Schmidts process: $\tilde{p_3} = p_3 - \frac{<p_3,p_1>}{\|p_1\|^2}p_1 - \frac{<p_3,p_2>}{\|p_2\|^2}p_2 = p_3 - \frac{-1/6}{1}(1) - \frac{0}{\|p_2\|^2}p_2 = t^2 - t + \frac{1}{6}$.

3b) Genom enkel variant på vanlig Gausselimination finner vi att $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
a) Värderummet till A är lika med värderummet för L och detta får vi från a-uppgiften direkt: $Span\{[2 \;\; -1 \;\; -3]^T,\ [0 \;\; 1 \;\; 1]^T\}$. På liknande sätt är nollrummet för A lika med nollrummet för L^T och detta får vi genom att lösa det homogena problemet $L^Tx = 0$, med lösning $x = s[1 \;\; -1 \;\; 1]^T = Span\{[1 \;\; -1 \;\; 1]^T\}$.
c) $A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = [Q_1 \;\; Q_2]\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$. Detta ger $A^TA = [R^T \;\; 0]\begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}[Q_1 \;\; Q_2]\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = R^TQ_1^TQ_1R = R^TR$. R är uppåt triangulär och fungerar alltså som Cholesky-faktor till A^TA, v.s.v

4a) Problemet är på matrisform $y' = Ay$, där $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_1 = -2$ samt egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, som är $\lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -3$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (-1, 0, 1)^T,\ v_2 = (1, 1, 0)^T$ och $v_3 = (-1, 1, 0)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, med lösning $c_2 = 2,\ c_3 = -1,\ c_1 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = 2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4b) Problemet är stabilt eftersom alla egenvärdena har realdel ≤ 0.

4c) Trapetsmetoden från $x(0) = y_0 = [2\ 1\ 1]^T$, ger $y_1 = x(0 + h) = x(1)$ enligt: $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[Ay_0 + Ay_1]$ som ger ekvationssystemet

$[I - 0.5A]y_1 = y_0 + 0.5Ay_0 = [0.5\ \ 1.5\ \ 0]^T$, där systemmatrisen $I - 0.5A = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 2 & -0.5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ekvationslösningen ger $y_1 = \frac{1}{15}[7\ 13\ 0]^T$, som är den efterfrågade approximationen.

4d) Problemet är stabilt enligt b-uppgiften och trapetsmetoden är A-stabil. Alltså är den stabil oavsett steglängd.

5a) Framåtfelet i en punkt x är $\hat{f}(x) - f(x)$.
Bakåtfelet i en punkt x är $\hat{x} - x = f^{-1}(\hat{f}(x)) - x$.

5b) $\hat{x} = fl(x) = x(1 + \epsilon_1),\quad |\epsilon_1| \leq \mu$, där μ är maskintalet.
$fl(\hat{x}^2) = \hat{x}^2(1 + \epsilon_2) = x^2(1 + \epsilon_1)^2(1 + \epsilon_2) = \bar{x}^2,\quad |\epsilon_2| \leq \mu$, där
$\bar{x} = x(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)^{\frac{1}{2}} = x(1 + \epsilon_1)(1 + 0.5\epsilon_2 + O(\epsilon_2^2)) = x + \epsilon_1 x + 0.5\epsilon_2 x + O(\mu^2)$, som ger följande relativa bakåtfel, $|\frac{\bar{x} - x}{x}| \leq \mu + 0.5\mu + O(\mu^2) = 1.5\mu + O(\mu^2)$.
Efterson bakåtfelet är litet (storleksordning μ) så är algoritmen stabil.

6a) Sekantmetoden ger: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1-x_0)}{f(x_1)-f(x_0)} = 3 - \frac{11\cdot 1}{11+3} = \frac{31}{14}$.
6b) Trapetsformeln med steg $h = 1$ ger
$T(1) = \frac{1}{2}[f(0) + 2f(1) + 2f(2) + f(3)] = \frac{1}{2}[-1 - 6 - 6 + 11] = -1$

6c) Ansätt $s_1 = -1 + ax + bx^2,\ 0 \le x \le 1$ med $s'(x) = a + 2bx$.
Villkoret $s_1'(0) = f'(0) = 1$ ger $a = 1$.
Villkoret $s_1(1) = f(1) = -3$ ger $b = -3$ och $s_1 = -1 + x - 3x^2$, med $s_1'(1) = 1 - 6 = -5$.
För nästa intervall ansätt $s_2 = -3 + c(x-1) + d(x-1)^2,\ 1 \le x \le 2$, med $s_2'(x) = c + 2d(x-1)$.
Villkoret $s_2'(1) = s_1'(1) = -5$ ger $c = -5$.
Villkoret $s_2(2) = f(2) = -3$ ger $d = 5$, och $s_2 = -3 - 5(x-1) + 5(x-1)^2$,
med $s_2'(2) = -5 + 10 = 5$.
För sista intervallet ansätter vi $s_3 = -3 + e(x-2) + f(x-2)^2,\ 2 \le x \le 3$,
med $s_3'(x) = e + 2f(x-2)$. Villkoret $s_3'(2) = s_2'(2) = 5$ ger $e = 5$.
Villkoret $s_3(3) = f(3) = 11$ ger $f = 9$ och $s_3 = -3 + 5(x-2) + 9(x-2)^2$ och hela splinen är bestämd.

7 a) $R_i = bW_i^a$. Linjärisering: $ln(R_i) = \hat{b} + a\ ln(W_i)$, med $\hat{b} = ln(b)$

Överbestämt linjärt ekvationssystem: $\begin{bmatrix} ln(W_1) & 1 \\ ln(W_2) & 1 \\ ... & ... \\ ln(W_m) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ln(R_1) \\ ln(R_2) \\ ... \\ ln(R_m) \end{bmatrix}$.

Återfransformera $b = e^{\hat{b}}$.

b) Residualer $f_i = R_i - bW_i^a,\ \ F = [f_1\ f_2\ ...\ f_m]^T$. Jakobian $J = \begin{bmatrix} -b\ ln(W_1)W_1^a & -W_1^a \\ -b\ ln(W_2)W_2^a & -W_2^a \\ ... & ... \\ -b\ ln(W_m)W_m^a & -W_m^a \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k),\quad F_k = F(a_k, b_k)$.
Starta med lösningen från linjäriserat problem enligt a-uppgiften.

8a) Systemet skrivs om som (BVP): $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = p^2(y_1 + a)(0.5y_2^2 - 1) \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = v \end{cases}$

b) Inskjutning på a innebär att lösa ekvationen
$g(a) = 0$ där $g(a) = a + qy_2(L, a) + y_1(L, a)$.
Sekantmetoden på denna ekvation blir:
$a_{k+1} = a_k - \frac{g(a_k)(a_k - a_{k-1})}{g(a_k) - g(a_{k-1})},\ k = 1,\ 2,\ ...$
Varje nytt $g(a_k)$ kräver att (BVP) löses, dvs detta görs en gång per iteration i sekantmetoden.