Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2006-01-09

DAG: Måndag 9 januari 2006 TID: 8.30-12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Fås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Fås på institutionen senast 20 januari
	Tentan kan därefter hämtas på expeditionen, mån-fre 8.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att det linjära rummet av polynom av grad $\leq n$ har dimensionen $n+1$. **(4p)**
b) Undersök om mängden av symmetriskt positivt definita $n \times n$-matriser med operationerna
$A \oplus B$ vanlig matrisaddition
$\alpha \odot A = A^\alpha$
är ett linjärt rum (ett vektorrum). **(3p)**

Uppgift 2.
Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_2 + (a_0 + a_1)t + (a_1 - a_2)t^2$ från P_2 till P_2.
a) Bestäm matrisen M för avbildningen F i standardbasen $E = \{1,\ t,\ t^2\}$ för P_2. **(2p)**
b) Visa att $B = \{1+t^2,\ 1-t^2,\ 1+t+t^2\}$ är bas för P_2 och ange transformationsmatrisen $P_{E \leftarrow B}$ mellan baserna B och E **(2p)**
c) Bestäm matrisen M' för avbildningen F i basen B. **(3p)**

Uppgift 3.

Betrakta rotationsmatrisen $G = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ där $c = \cos\alpha,\ s = \sin\alpha$ för en vinkel α.

a) Visa att G är ortogonal. **(2p)**

b) Bestäm egenvärdena till G och G^T samt visa att egenvektorerna till G och G^T, som hör till samma egenvärde, är ortogonala. **(5p)**

Uppgift 4.

Betrakta problemet att lösa ett överbestämt ekvationssystem
$Ax = b$ med $A \in R^{m\times n},\ m > n$ i minstakvadratmening. Matematiskt sett ges lösningen av normalekvationerna $A^TAx = A^Tb$.

a) Visa att lösningen ges av $Rx = Q^Tb$, där $A = QR$ är kompakt QR-faktorisering av A, då A har full rang. Nämn en fördel med denna metod jämfört med normalekvationerna. **(4p)**

b) Visa att en lösning ges av $x = V\Sigma_r^{-1}U^Tb$ där $A = U\Sigma_rV^T$ är kompakt SVD-faktorisering med Σ_r diagonal, då A har rang = r. **(3p)**

c) Nämn två fördelar med trunkerad SVD i samband med minstakvadratproblemet jämfört med icke trunkerad SVD. **(2p)**

Uppgift 5.

a) Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3^3 + 1 = 0 \\ -2x_1^2 + x_2 - x_3 + 2 = 0 \\ x_2^2 - 2x_3 + 1 = 0 \end{cases}$.

Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**

b) Vad menas med en kvasi-Newtonmetod? Skriv upp formellt utan att göra några beräkningar. **(3p)**

Uppgift 6.

Betrakta följande tabell över funktionsvärden $f(x)$ i fyra punkter.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	-1	0	1

a) Bestäm en approximation till $\int_0^3 f(x)\,dx$ med trapetsformeln. **(2p)**

b) Bestäm en linjär spline som interpolerar i punkterna. **(2p)**

c) Vilket gradtal har interpolationspolynomet till punkterna? Motivera ordentligt! **(2p)**

Uppgift 7

För en harmonisk svängning med amplitud a och fasvinkel v gäller modellen
$u(t) = a\ \sin(t + v)$.
Vi vill bestämma a och v från mätningar $(t_i,\ u_i),\ i = 1,\ \ldots\ ,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att linjär minsta-kvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas samt ange hur a och v kan fås ur lösningen. **(4p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. Hur får man lämplig startapproximation? **(4p)**

Uppgift 8.

Heuns metod för begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer definieras av:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k,\ y_k) + f(t_k + h,\ y_k + hf(t_k,\ y_k))\}$.
a) Bestäm stabilitetsområdet för Heuns metod. **(3p)**
b) Bestäm approximationsordningen för Heuns metod **(3p)**
c) Gör ett steg med Heuns metod och steglängd $h = 0.1$ för problemet
$y' = -2y^2 + t,\ t > 0$ med begynnelsevärde $y(0) = 1$. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 9 januari 2006

1 a) Betrakta mängden $B = \{x^j\}_{j=0}^n$. B spänner rummet P_n, mängden av polynom av grad $\leq n$, eftersom $p \in P_n$ kan skrivas $p = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^j$. Vidare är B linjärt oberoende ty $q = \sum_{j=0}^n \beta_j x^j = 0,\ \forall x \Rightarrow \beta_j = 0, \forall j$. Detta följer genom upprepad derivering av q och insättning av $x = 0$.
c) $(\alpha+\beta) \odot A = A^{\alpha+\beta} = A^\alpha \cdot A^\beta \neq$ (α och β positiva heltal t.ex. $\neq A^\alpha \oplus A^\beta = \alpha \odot A \oplus \beta \odot A$. Alltså gäller inte räknelag (8) (distributivitet). Slutsats: Ej linjärt rum.

2 a) $F(e_1) = t = e_2, \quad F(e_2) = t + t^2 = e_2 + e_3, \quad F(e_3) = 1 - t^2 = e_1 - e_3 \quad \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $b_1 = 1 + t^2 = e_1 + e_3, \quad b_2 = 1 - t^2 = e_1 - e_3, \quad b_3 = 1 + t + t^2 \ \Rightarrow P_{E \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
Matrisen ickesingulär alltså är B en bas.
c) $M' = P_{E \leftarrow B}^{-1} M P_{E \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M P_{E \leftarrow B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1.5 \\ 1 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3 a) $G^T G = \begin{bmatrix} c^2 + s^2 & sc - cs \\ cs - sc & s^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, alltså är G ortogonal.
b) Karakteristiska ekvationen $(c - \lambda)^2 + s^2 = 0$ har lösningarna $\lambda = c \pm is$, med motsvarande egenvektorer, från lösning av homogent ekvationssystem, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix}$. På samma sätt får vi för G^T egenvärdena $\lambda = c \pm is$ med egenvektorer $v = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$ Skalärprodukten blir $u^* v = 1 - 1 = 0$, alltså är egenvektorerna ortogonala.

4 a) $A = QR$ där Q har ortonormala kolonner och R är reguljär, uppåt triangulär. $A^T A = R^T Q^T Q R = R^T R, \quad A^T = R^T Q^T$ ger att $A^T A x = A^T b \Leftrightarrow R^T R x = R^T Q^T b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$. Systemet $Rx = Q^T b$ är (oftast) bättre konditionerat än normalekvationerna.
b) $A = U \Sigma_r V^T$ där U och V har ortonormala kolonner och Σ_r är positiv och diagonal. Vi får $A^T A = V \Sigma_r U^T U \Sigma_r V^T = V \Sigma_r^2 V^T$ och $A^T = V \Sigma_r U^T$. Normalekvationerna övergår alltså i $A^T A x = A^T b \Leftrightarrow V \Sigma_r^2 V^T x = V \Sigma_r U^T b$ och vi ser att $x = V \Sigma_r^{-1} U^T b$ löser detta system.
c) Bättre konditionering och mindre arbete.

5 a) $F = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + x_3^3 + 1 \\ -2x_1^2 + x_2 - x_3 + 2 \\ x_2^2 - 2x_3 + 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3x_3^2 \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & 4x_2 & -2 \end{bmatrix}$, $F_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $x_1 = x_0 - J_0 \backslash F_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) Iteration enligt $H_k d_k = F_k,\ x_{k+1} = x_k - d_k,\ \ k = 0,\ 1,\ ...$, där H_k är en approximation av $J(x_k)$.

6 a) $T(1) = 1[0.5 - 1 + 0 + 0.5] = 0$.

b) Elementär ansats ger direkt $s(x) = \begin{cases} s_1 = 1 - 2x, & 0 \le x \le 1 \\ s_2 = -2 + x, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$.

c) Gradtal tre. Genom de tre sista punkterna går räta linjen $-2 + x$, som är interpolationspolynomet till dessa tre punkter. Denna räta linje går inte genom den första punkten. Alltså kan inte interpolationspolynomet till de fyra punkterna ha lägre gradtal än tre.

7 a) $u(t) = a\ sin(v)\ cos(t) + a\ cos(v)\ sin(t) = \alpha\ cos(t) + \beta\ sin(t)$ med nya parametrar $\alpha = a\ sin(v)$ och $\beta = a\ cos(v)$. I dessa parametrar har vi det linjära problemet $\begin{bmatrix} cos(t_1) & sin(t_1) \\ ... & ... \\ ... & ... \\ cos(t_m) & sin(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ ... \\ ... \\ u_m \end{bmatrix}$. Med sambandet $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$ får vi då $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ och $v = \arcsin \frac{\alpha}{a}$.

b) modell: $u(t) = a\ sin(t + v)$, residualer: $f_i = a\ \sin(t_i + v) - u_i$,

Jacobian: $J = \begin{bmatrix} \sin(t_1 + v) & a\ \cos(t_1 + v) \\ ... & ... \\ ... & ... \\ \sin(t_m + v) & a\ \cos(t_m + v) \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $x = \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)}) d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$.

Startapproximation kan tas från linjäriseringen i a)-uppgiften.

8 a) Testpoblem för stabilitet: $y' = \lambda y$, dvs $f = \lambda y$.

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k + h\lambda y_k + \frac{(h\lambda)^2}{2} y_k = [1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}] y_k$. Begränsade lösningar för $z = h\lambda$ i stabilitetsområdet: $\{z \in C; |\ 1 + z + \frac{z^2}{2}\ | \le 1\}$.

b) Jämför tillväxtfaktorn $1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$ med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \ ...$. Stämmer alltså med tre termer och approximationsordningen är då 2.

c) $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[-2y_0^2 + t_0 - 2\{y_0 + h(-2y_0^2 + t_0)\}^2 + t_1] =$

$= 1 + \frac{0.1}{2}[-2 \cdot 1^2 + 0 - 2\{1 + 0.1(-2 \cdot 1^2 + 0)\}^2 + 0.1] = 1 + \frac{0.1}{2}[-2 - 1.28 + 0.1] = 0.841.$