Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2005-08-26

DAG: Fredag 26 augusti 2005 TID: 8.30-12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1. En kvadratisk matris A är skevsymmetrisk om $A^T = -A$.
a) Visa att mängden av skevsymmetriska matriser är ett linjärt rum. **(2p)**
b) Bestäm dimensionen av rummet i a)-uppgiften. **(2p)**
c) Visa att om T är en ortogonal matris och $T+I$ är inverterbar, så är $A = (T-I)(T+I)^{-1}$ skevsymmetrisk. **(4p)**

Uppgift 2. Låt F vara avbildningen som deriverar polynom av grad ≤ 3,
dvs $F(p(t)) = p'(t), \quad p \in P_3$.
a) Visa utgående från definitionen att F är en linjär avbildning. **(2p)**
b) Bestäm nollrum och värderum för avbildningen F. **(3p)**
c) Bestäm matrisen M för avbildningen F i standardbasen $\{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$ **(2p)**

Uppgift 3.
a) Låt $u \neq 0$ och $v \neq 0$ vara två vektorer i ett linjärt rum med skalärprodukt sådana att $\|u\| = \|v\| = \|u - v\|$. Bestäm vinkeln mellan u och v. **(3p)**
b) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **(4p)**
c) Ange med hjälp av b)-uppgiften en ON-bas för $Col(A)$. **(1p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: **(4p)**

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - 4x_2(t), & x_2(0) = -3 \\ x_3'(t) = x_1(t) - 3x_3(t), & x_3(0) = 2 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om första ekvationen ändras till $x_1'(t) = -4x_1(t)$? **(2p)**
c) Undersök om problemet i a-uppgiften är stabilt. **(1p)**
d) Antag att du vill använda Eulers framåtmetod för att lösa problemet i b-uppgiften. Ge ett villkor på steglängden h så att metoden blir stabil. Vad gäller för motsvarande villkor om du använder Eulers bakåtmetod i stället? **(3p)**

Uppgift 5. Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 + 2x_1x_3 + 2 = 0 \\ x_1^3x_2 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1^2 + x_2 - x_1x_3^3 - 1 = 0 \end{cases}$.
a) Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**
b) Det visar sig att efter fem iterationer enligt a-uppgiften är felet $\|x^{(5)} - x^*\| \approx 0.0113$ och roten x^* är reguljär. Hur många ytterligare iterationer kan du förväntas få göra innan felet $\|x^{(k)} - x^*\| \leq 10^{-10}$? **(2p)**

Uppgift 6. Betrakta en kvadraturformel för approximativ beräkning av en intgral:
$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$.
a) Visa att $\sum_{i=1}^n \alpha_i = b - a$ för en rimlig kvadraturformel. **(2p)**
b) I Simpsons regel gäller för intervallet $(a, b) = (0, 1)$ att $n = 3,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1, \alpha_1 = \frac{1}{6},\ \alpha_2 = \frac{4}{6},\ \alpha_3 = \frac{1}{6}$. Visa att Simpsons regel är identisk med trapetsregeln följd av ett stegs Richardsonextrapolation med steglängderna 1 och $\frac{1}{2}$. **(4p)**

Uppgift 7. Betrakta problemet att minimera funktionen $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6$ utan bivillkor, med känd lösning $x^* = (0, 0)$.
a) Ange formeln för Steepest Descent-metoden för att lösa problemet, tala speciellt om vad som är sökriktning och vad som är steglängd. **(2p)**
b) Gör en iteration från $x^{(0)} = (1, 1)$. Bestäm steglängden exakt genom att använda aktuell formel för kvadratisk objektfunktion. **(4p)**
c) Ta fram en startpunkt $x^{(0)} \neq x^*$, som ger lösningen med **en** iteration av Steepest Descent-metoden på aktuellt problem. **(2p)**
Ledning till c)-uppgiften: Nivåkurvor.

Uppgift 8. Betrakta begynnelsevärdesproblemet $y' = -2y^2 + ty,\ y(0) = 1$.
a) Anta att du vill använda Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.1$ för att bestämma en approximation till $y(0.1)$. Skriv upp den andragradsekvation som du får att lösa. **(3p)**
b) Man kan slippa att lösa andragradsekvation om man använder Eulers framåtmetod som prediktor och gör fixpunktsiteration i Eulers bakåtmetod (korrektorn). Gör två fixpunktsiterationer på problemet i a)-uppgiften. **(4p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 26 augusti 2005

1a) A och B skevsymmetriska ger $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$ dvs summan är skevsymmetrisk, c skalär ger $(c*A)^T = c*A^T = c*(-A) = -(c*A)$ dvs skalär gånger matris är skevsymmetrisk, speciellt är nollmatrisen skevsymmetrisk.
b) En skevsymmetrisk matris är kvadratisk med nolldiagonal och är entydigt bestämd av värdena i strikt övre triangulära delen, som har $n(n-1)/2$ element för en $n \times n$-matris. Dimensionen är alltså $n(n-1)/2$.
c) $A = (T-I)(T+I)^{-1} = (-2I + I + T)(T+I)^{-1} = -2(T+I)^{-1} + I$ och
$A^T = (T^T + I)^{-1}(T^T - I) = \{T^T T = I\} = [T^T(I+T)]^{-1}[T^T(I-T)] =$
$(I+T)^{-1}(T^T)^{-1}(T^T)(I-T) = (I+T)^{-1}(I-T) = -(I+T)^{-1}(-2I + I + T)$
$= 2(I+T)^{-1} - I = -A.$

2a) För p och q i P_3 gäller $F((p+q)(t)) = (p+q)'(t) = p'(t) + q'(t) = F(p(t)) + F(q(t))$ och med c skalär gäller $F((cp)(t)) = (cp)'(t) = cp'(t) = cF(p(t))$.
b) Nollrummet är alla polynom som deriveras till nollpolynomet, dvs nollrummet är alla polynom av grad $= 0$, dvs P_0. Derivatan av ett polynom i P_3 är ett polynom av grad ≤ 2 dvs i P_2. Vidare har varje polynom i P_2 en primitiv funktion i P_3, alltså är värderummet av F rummet P_2.
c) $F(1) = 0,\ F(t^p) = pt^{p-1},\ p = 1,\ 2,\ 3.$ Matrisen blir $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3a) $\|u-v\|^2 =< u-v, u-v >= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 < u, v >$, dvs $2 < u, v >= \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2 = \|u\|^2 = \|u\|\|v\|$ (enligt givna förutsättningar). Definition av vinkel ger nu $cos(\theta) = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} = \frac{\|u\|\|v\|}{2\|u\|\|v\|} = \frac{1}{2}$, dvs $\theta = \frac{\pi}{3}$.
b) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(1,0,-1,1)^T - \frac{2}{2}(1,0,-1,0)^T - \frac{1}{5}(0,2,0,1)^T = \frac{1}{5}(0,-2,0,4)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix},\ R = Q^T A = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{2} \\ 0 & 5/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

c) Kolonnerna i Q utgör ON-bas för $Col(A)$

4a) Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är på diagonalen,
$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -4$ och $\lambda_3 = -3$
med egenvektorer, som fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem
$(A - \lambda_i I)v_i = 0$: $v_1 = (1, -2, 1)^T,\ v_2 = (0, 1, 0)^T$ och $v_3 = (0, 0, 1)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4b) Egenvärdena blir nu $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -4$ och $\lambda_3 = -3$. Det dubbla egenvärdet $\lambda = -4$ har egenvektor $(0, 1, 0)^T$, som spänner rum av dimension $= 1 < 2 =$ multipiciteten hos egenvärdet. Matrisen är då inte diagonaliserbar.

4c) Alla egenvärden har realdel ≤ 0, alltså är problemet stabilt.

4d) Stabilitetområde för Eulers framåtmetod är: $\mid 1 + h\lambda \mid \leq 1$. Egenvärdet $\lambda = -4$ ställer högst krav och ger stabilitetsvillkoret $h \leq \frac{1}{2}$. Eulers bakåtmetod är A-stabil och ställer inget stabilitetsvillkor på h.

5a) $f = \begin{cases} 2x_1 + 2x_1 x_3 + 2 \\ x_1^3 x_2 - 4x_2 + x_3 \\ -x_1^2 + x_2 - x_1 x_3^3 - 1 \end{cases} \qquad J = \begin{bmatrix} 2 + 2x_3 & 0 & 2x_1 \\ 3x_1^2 x_2 & -4 + x_1^3 & 1 \\ -2x_1 - x_3^3 & 1 & -3x_3^2 x_1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - s_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

b) Det krävs tre iterationer ytterligare ty kvadratisk konvergens och $0.0113^{2^3} \leq 10^{-10}$.

6a) En rimlig kvadraturformel bör vara exakt för den triviala integranden $f(x) = 1$. Sätter man in den så får man villkoret $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = b - a$.

6b) $T(1) = \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(1),\quad T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} f(0) + \frac{1}{2} f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} f(1)$. Richardsonextrapolation ger då: $T(\frac{1}{2}) + \frac{T(\frac{1}{2}) - T(1)}{3} = \frac{4}{3} T(\frac{1}{2}) - \frac{1}{3} T(1) = \frac{1}{3} f(0) + \frac{2}{3} f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{6} f(0) - \frac{1}{6} f(1)$
$= \frac{1}{6} f(0) + \frac{4}{6} f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6} f(1)$ som är Simpsons formel.

7 a) Sökmetod: $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)} \\ d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) \end{cases}$. Här är $d^{(k)}$ sökriktning och α_k steglängd.

b) $f = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6, \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 6x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$

För första iterationen har vi

$x^{(0)} = (1,1)^T, \quad \nabla f(x^{(0)}) = (6,4)^T, \quad d^{(0)} = (-6,-4)^T, \quad Hd^{(0)} = (-36,-16)^T.$

Optimal steglängd enligt formel: $\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x^{(0)})^T d^{(0)}}{d^{(0)T} H d^{(0)}} = -\frac{-52}{280} = \frac{13}{70}.$

Första iterationen blir alltså: $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} = (1,1)^T + \frac{13}{70}(-6,-4)^T = \frac{1}{35}(-4,9)^T.$

7c) Nivåkurvorna är ellipser centrerade kring origo med halvaxlarna längs koordinataxlarna. Om man startar någonstans på halvaxlarna så pekar negativa gradienten till origo och **en** iteration krävs. Man kan t.ex. starta i $x^{(0)} = (1,0)^T$.

8a) Eulers bakåtmetod ger: $y_1 = y_0 + 0.1(-2y_1^2 + 0.1y_1) = 1 - 0.2y_1^2 + 0.01y_1$ dvs andragradsekvationen $0.2y_1^2 + 0.99y_1 - 1 = 0$.

b) Eulers framåtmetod ger $y_1^{(0)} = 1 + 0.1(-2+0) = 0.8$.

Två successiva fixpunktsiterationer korrektorn (Eulers bakåtmetod) ger nu:

$y_1^{(1)} = 1 + 0.1(-2 \cdot 0.8^2 + 0.1 \cdot 0.8) = 0.88$

$y_1^{(2)} = 1 + 0.1(-2 \cdot 0.88^2 + 0.1 \cdot 0.88) = 0.8539.$