Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2005-01-10

DAG: Måndag 10 januari 2005 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Christoffer Cromvik, tel: 073-9779268
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 24 januari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Vektorerna $v_1,\ v_2,\ \ldots\ ,\ v_k$ i ett linjärt rum V är linjärt oberoende. Bestäm dimensionen hos det rum som spänns av vektorerna $v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ \ldots\ ,\ v_{k-1} - v_k$ och $v_k - v_1$. **(4p)**
b) Låt M vara ett multiplan i R^n och $x,\ y$ två olika punkter i planet. Visa att M innehåller linjen genom x och y, dvs alla punkter på formen $x + t(y - x),\ t \in R$. **(4p)**

Uppgift 2. Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 2a_1 + (a_0 - a_2)t + (a_1 - a_2)t^2$ från P_2 till P_2.
a) Bestäm matrisen för avbildningen i standardbasen $E = \{1,\ t,\ t^2\}$ för P_2. **(2p)**
b) Betrakta basen $B = \{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$ för P_2. Bestäm transformationsmatrisen mellan baserna B och E och bestäm med hjälp av den koordinaterna för $q = 2 - t + 3t^2$ i basen B. **(3p)**
c) Bestäm matrisen för avbildningen F i basen B och bestäm koordinaterna för $F(q)$ i basen B , där q är given i b-uppgiften. **(4p)**

Uppgift 3.

Vi vill lösa problemet $min_x\|Ax-b\|_2$, med $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Lös problemet med normalekvationerna. **(2p)**
b) Lös problemet med QR-faktorisering. **(4p)**
c) Om tredje kolonnen i A ändras till $[\ 1 \quad -2 \quad 2 \quad -1\ ]^T$ så fungerar inte metoderna i a) eller b). Ange en metod som ger lösningen till problemet med minsta norm $\|x\|_2$. Skriv formellt upp lösningen utan att göra några numeriska beräkningar. **(2p)**
d) Bestäm de singulära värdena till matrisen A. **(3p)**

Uppgift 4. Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden. **(5p)**.

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) - x_2(t) - x_3(t), & x_1(0) = 0 \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t), & x_2(0) = 2 \\ x_3'(t) = -2x_3(t), & x_3(0) = 0 \end{cases}$$

Uppgift 5.
a) Anta att $arctan(x)$ approximeras med $x - \frac{x^3}{3}$ nära $x = 0$. Teckna framåt- och bakåtfelet i approximationen då $x = 0.1$. **(2p)**
b) I beräkningen i a)-uppgiften ingår delalgoritmen $y = x^3$. Betrakta denna i ett flyttalssystem med IEEE-standard. Undersök om algoritmen är stabil. Du kan anta att x är ett exakt flyttal dvs $fl(x) = x$. **(3p)**.

Uppgift 6. Betrakta följande punkter i (x, y)-planet: $(0, -2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, -1)$.
a) Låt y-värdena representera funktionsvärden av en funktion $y = f(x)$ och bestäm en approximation till integralen $\int_0^3 f(x)dx$ med trapetsformeln och steg $h = 1$. **(2p)**
b) Bestäm interpolationpolynomet genom punkterna. **(3p)**
c) Bestäm en kvadratisk spline med noder i $x = 1$ och $x = 2$ och som går genom alla punkterna. **(4p)**

Uppgift 7. Du ska anpassa parametrarna a och b i den ickelinjära modellen $y(t) = e^{-at} + sin(bt)$ till mätningar $(t_i,\ y_i)$, $i = 1,\ \dots,\ m$ med $m > 2$. Ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(5p)**

Uppgift 8.
a) Betrakta differentialekvationen $y' = -y^3 + t^2$, $y(0) = 1$. Använd Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.1$ för att approximera lösningen i punkten $t = 0.1$. Visa att detta leder till en ekvation på formen $0.1x^3 + x - 1.001 = 0$. **(3p)**
b) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i a-uppgiften om man gör **en** fixpunktsiteration i aktuell ekvation med start från det värde som Eulers framåtmetod ger. Avgör genom en (grov) uppskattning om metoden är stabil för problemet i a-uppgiften med vald steglängd. **(5p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 10 januari 2005

1a) Totala mängden är linjärt beroende eftersom summan av dem $(v_1-v_2)+(v_2-v_3)+\ ...\ +(v_k-v_1)=0$, dimensionen är alltså $\leq k-1$. De $k-1$ första är linjärt oberoende ty $\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i(v_i-v_{i+1})=0 \Leftrightarrow \alpha_1 v_1+(\alpha_2-\alpha_1)v_2+\ ...\ +(\alpha_{k-1}-\alpha_{k-2})v_{k-1}-\alpha_{k-1}v_k=0$ och eftersom $v_1,\ v_2,\ ...\ ,\ v_k$ är linjärt oberoende så gäller $\alpha_1=0,\ \alpha_2-\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_2=0,\ (\alpha_3-\alpha_2)=0 \Rightarrow \alpha_3=0,\ ...\ ,\ \alpha_{k-1}=0$ v.s.v.

b) $x\in M \Leftrightarrow x=x_0+x_1,\ x_1\in U$ och $y\in M \Leftrightarrow x_0+y_1,\ y_1\in U$ där U är ett underrum. Då gäller $x+t(y-x)=x_0+x_1+t(x_0+y_1-x_0-x_1)=x_0+x_1+t(y_1-x_1)=x_0+z$ med $z=x_1+t(y_1-x_1)\in U$ ty $z=(1-t)x_1+ty_1$ med x_1 och y_1 i underrummet U.

2a) $F(e_1)=t=e_2,\ F(e_2)=2+t^2=2e_1+e_3,\ F(e_3)=-t-t^2=-e_2-e_3.$

Matrisen blir $M=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

b) $b_1=e_1,\ b_2=e_1+e_2,\ b_3=e_1+e_2+e_3 \Rightarrow P_B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. För q gäller $[q]_E=[2\ \ -1\ \ 3]^T$ och koordinattransformationen blir $P_B[q]_B=[q]_E$. Detta är ett uppåt triangulärt system som lätt löses till $[q]_B=[3\quad -4\ \ 3]^T$.

c) $F(b_1)=t=b_2-b_1,\ F(b_2)=2+t+t^2=b_1+b_3,\ F(b_3)=2=2b_1.$

$M'=\begin{bmatrix}-1&1&2\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$. Alternativt kan M' bestämmas genom $M'=P_B^{-1}MP_B$.

$[F(q)]_B=M'[q]_B=[-1\ \ 3\quad -4]^T$.

3a) $A^TA=\begin{bmatrix}5&0&1\\0&5&-1\\1&-1&2\end{bmatrix},\ A^Tb=\begin{bmatrix}4\\1\\-1\end{bmatrix},\ A^TAx=A^Tb\Leftrightarrow x=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$.

b) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(1,0,0,-1)^T-\frac{1}{5}(1,0,2,0)^T+\frac{1}{5}(0,2,0,1)^T=\frac{2}{5}(2,1,-1,-2)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen

$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0&\frac{2}{\sqrt{10}}\\0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{10}}\\\frac{2}{\sqrt5}&0&-\frac{1}{\sqrt{10}}\\0&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt{10}}\end{bmatrix},\ R=Q^TA=\begin{bmatrix}\sqrt5&0&\frac{1}{\sqrt5}\\0&\sqrt5&-\frac{1}{\sqrt5}\\0&0&\frac{4}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$ och $Q^Tb=\begin{bmatrix}\frac{4}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\-\frac{4}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$. Lösningen ges av triangulära systemet $Rx=Q^Tb$ och blir $x=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$.

c) Kompakt SVD: $A = U_1 \Sigma_r V_1^T$. Lösning $x = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b$ där $r = 2$ eftersom $rang(A) = 2$.
d) De singulära värdena till A är roten ur egenvärdena till $A^T A$, given i svaret till a-uppgiften. Karakteristiska ekvationen blir
$(5-\lambda)^2(2-\lambda) - (5-\lambda) - (5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 8)$ med rötter 5, $\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$. Singulära värdena är alltså $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}}$, $\sqrt{\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}}$.

4) Systemet kan skrivas $x' = Ax$ med $A = -\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Egenvärden i $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, egenvektorer i $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösningen kan skrivas $x = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Begynnelsevillkoret $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger ekvationssystem $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
och lösningen blir då $x = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5a) Framåtfelet $0.1 - \frac{0.1^3}{3} - arctan(0.1)$, bakåtfelet $tan(0.1 - \frac{0.1^3}{3}) - 0.1$
b) $fl(x^2) = x^2(1+\delta_1)$, $fl(x^3) = x^3(1+\delta_1)(1+\delta_2)$, $fl(x^3) = \bar{x}^3$ där $\bar{x} = x((1+\delta_1)(1+\delta_2))^{1/3}$, med $|\delta_i| \leq \mu$. Eftersom $(1+\delta)^{1/3} = 1 + \delta/3 + O(\mu^2)$ kan vi skriva $\bar{x} = x(1+\delta_1/3)(1+\delta_2/3) + O(\mu^2) = x(1+\delta_1/3+\delta_2/3) + O(\mu^2)$. Vi får alltså $|\frac{\bar{x}-x}{x}| \leq \frac{2}{3}\mu$ och algoritmen är därmed visad vara stabil.

6a). $T(1) = 1(-2/2 - 1/2) = -3/2$
b) Ansätt $p_3(x) = a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2)$, $p_3(0) = -2 \Rightarrow a = -2$
$p_3(1) = 0 \Rightarrow b = 2$, $p_3(2) = 0 \Rightarrow c = -1$, $p_3(3) = -1 \Rightarrow d = 1/6$
dvs $p_3(x) = -2 + 2x - x(x-1) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$.
c) Låt splinen vara $s(x) = s_1,\ 0 \leq x \leq 1,\ s(x) = s_2,\ 1 \leq x \leq 2,\ s(x) = s_3,\ 2 \leq x \leq 3$. Vi väljer $s_2 = 0$ och bestämmer de andra delarna. Låt $s_1 = a(x-1) + b(x-1)^2$ med $s_1'(x) = a + 2b(x-1)$. Villkoren ger $s_1'(1) = 0 \Rightarrow a = 0$, $s_1(0) = -2 \Rightarrow b = -2$ dvs $s_1 = -2(x-1)^2$. På liknande sätt ger ansatsen $s_3 = c(x-2) + d(x-2)^2$ och villkoren att $c = 0$ och $d = -1$ dvs $s_3 = -(x-2)^2$ och alla spline-delarna är bestämda.

7. Residualvektor $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ ... \\ ... \\ f_m \end{bmatrix}$ där $f_i = e^{-at_1} + sin(bt_i) - y_i$.

Jakobian $J = \begin{bmatrix} -t_1 e^{-at_1} & t_1 cos(bt_1) \\ ... & ... \\ ... & ... \\ -t_m e^{-at_m} & t_m cos(bt_m) \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k)$, $\quad F_k = F(a_k, b_k)$.

8a) $y_1 = y_0 + 0.1(-y_1^3 + 0.1^2) = 1 - 0.1y_1^3 + 0.001$ dvs med $y_1 = x$ har vi ekvationen $0.1x^3 + x = 1.001 = 0$.
b) På testproblemet får vi: $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda y_k$, $\quad y_{k+1}^{(1)} = y_k + h\lambda y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k) = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2]y_k$.
Stabilitetområdet blir alltså $\{z \in C; |\ 1 + z + z^2\ | \leq 1\}$.
$f_y' = -3y^2$ med $y \leq 1$ dvs $-3 \leq f_y' \leq 0$ med $-0.3 \leq z = hf_y' \leq 0 \Rightarrow |1 + z + z^2| \leq |1 - 0.3 + 0.09| < 1$ dvs stabilt.