Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2004-08-27

DAG: Fredag 27 augusti 2004 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 0705-335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a) Definiera addition $\oplus$ och muliplikation med skalär $\odot$ i $V = R^2$ enligt
$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$
$c \odot (x_1, x_2) = (c + cx_1 - 1, c + cx_2 - 1)$.
Visa att V är ett vektorrum med avseende på de givna operationerna. **(4p)**

b) Visa att om M_1 och M_2 är två tvådimensionella plan i R^n, $n \geq 2$ så finns ett plan av dimension ≤ 5 som innehåller både M_1 och M_2. **(4p)**

Uppgift 2.

Låt $T:\ P_2 \to P_2$ vara den linjära avbildningen $T(p(t)) = p''(t) + tp'(t-1),\ \forall p \in P_2$.

a) Bestäm matrisen för avbildningen T i basen $\{1,\ t,\ t^2\}$. **(3p)**

b) Ange alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen T. **(2p)**

Uppgift 3.
a) Låt u och v vara element i ett vektorrum med skalärprodukt $< \cdot, \cdot >$ och motsvarande norm $\| \cdot \|$, sådana att $\|u\| > \|v\|$. Visa att u och $u - v$ inte är ortogonala. **3p**

b) Gör en kompakt QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(4p)**

c) Ange med hjälp av b-uppgiften en ON-bas för $Col(A)$. **(1p)**

Uppgift 4. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$.
a) Bestäm största värde på $Q(x)$ då $x^T x = 3$. Bestäm en vektor u med $u^T u = 3$ så att $Q(u)$ är maximal. **(4p)**
b) Bestäm $max\ Q(x)$ under villkoren $x^T x = 3$ och $x^T u = 0$, där u är vektorn enligt a-uppgiften. För vilka x antas maxvärdet? **(3p)**

Uppgift 5.
a) Definiera vad som menas med en kubisk spline med naturliga ändpunktsvillkor. **(3p)**
b) Bestäm en kvadratisk spline $s(x)$ som interpolerar $f(x) = x^3$ i noden $x = 0$ och i punkterna $x = -1$ och $x = 1$ samt uppfyller villkoret $s'(1) = f'(1)$. **(4p)**
c) Bestäm integralen $\int_{-1}^{1} s(x)\, dx$ med en **numerisk** metod som är **exakt** för denna integral. **(3p)**

Uppgift 6. Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + 2x_1x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2x_3 + x_3 = 0 \\ x_1^3 + 2x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$.
a) Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**
b) Det visar sig att efter fyra iterationer enligt a-uppgiften är felet $\|x^{(4)} - x^*\| \approx 0.013$ och roten x^* är reguljär. Hur många ytterligare iterationer kan du förväntas få göra innan felet $\|x^{(k)} - x^*\| \leq 10^{-10}$? **(2p)**

Uppgift 7. Du ska anpassa parametrarna a och b i modellen $y(t) = \frac{t}{asin(t)+bcos(t)}$ till mätningar $(t_i,\ y_i),\ i = 1,\ ...\ ,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att **linjär** minstakvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas. **(3p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(4p)**

Uppgift 8. Betrakta begynnelsevärdesproblemet $y' = -y^2 + ty,\ y(0) = 1$.
a) Använd Eulers framåtmetod med $h = 0.1$ för att bestämma en approximation till $y(0.1)$. **(2p)**
b) Bestäm en ny approximation till $y(0.1)$ genom att utgående från approximationen i a-uppgiften utföra **en** fixpunktsiteration i trapetsmetoden. **(3p)**
c) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i b-uppgiften. **(3p)**
d) Vad blir stabilitetsområdet om man itererar till konvergens i fixpunktsiterationen enligt b-uppgiften? **(1p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671

Lösningar till tentamen 27 augusti 2004

1a) Vi visar de minst triviala av de 10 reglerna som ska gälla:
4. $\mathbf{0} \oplus x = x \oplus \mathbf{0} = x$ om $\mathbf{0} = (-1, -1)$.
5. $-x = (x_1 - 2, x_2 - 2) \Rightarrow x \oplus -x = (-1, -1) = \mathbf{0}$.
7. $c \odot (x \oplus y) = c \odot (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) = (c + c(x_1 + y_1 + 1) - 1, c + c(x_2 + y_2 + 1) - 1) = (c + cx_1 - 1 + c + cy_1 - 1 + 1, c + cx_2 - 1 + c + cy_2 - 1 + 1) = (c \odot x) \oplus (c \odot y)$.
8. $(c + d) \odot x = (c + d + (c + d)x_1 - 1, c + d + (c + d)x_2 - 1) = (c + cx_1 - 1 + d + dx_1, c + cx_2 + d + dx_2 - 1) = (c \odot x) \oplus (d \odot x)$.
9. $c \odot (d \odot x) = c \odot (d + dx_1 - 1, d + dx_2 - 1) = c + c(d + dx_1 - 1) - 1, c + c(d + dx_2 - 1) - 1) = (cd + cdx_1 - 1, cd + cdx_2 - 1) = (cd) \odot x$.
10. $1 \odot x = (1 + x_1 - 1, 1 + x_2 - 1) = x$.

b) Planen kan skrivas:
$M_1 : x_0 + sx_1 + tx_2,\ x_i \in R^n,\ s, t \in R$
$M_2 : y_0 + uy_1 + vy_2,\ y_i \in R^n,\ u, v \in R$
Bilda nu $M_3 : \lambda x_0 + sx_1 + tx_2 + (1 - \lambda)y_0 + uy_1 + vy_2$. Detta plan innehåller M_1 och M_2 och har 5 parametrar, är alltså av dim ≤ 5 (Dimensionen kan bli mindre än 5 om några av x_i och y_i är samma.)

2a) $T(1) = 0;\ T(t) = t,\ T(t^2) = 2 + 2t(t - 1)$.

Matrisen blir $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Egenvärden till M finns på diagonalen dvs 0, 1 och 2.
Egenvektorer till matrisen M är resp. $(1, 0, 0)^T,\ (0, 1, 0)^T$ och $(1, -2, 1)^T$, som motsvarar resp. egenvektorer till avbildningen T: 1, t och $1 - 2t + t^2$.

3a) $< u, u - v > = < u, u > - < u, v > \geq$ (Cauchy-Schwartz)$\|u\|^2 - \|u\|\|v\| >$ (förutsättning) $\|u\|^2 - \|u\|^2 = 0$. Aktuell skalärprodukt är alltså inte noll.
b) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(1, 0, 0, 1)^T - \frac{1}{5}(1, 0, 2, 0)^T - \frac{1}{5}(0, 2, 0, 1)^T = \frac{2}{5}(2, -1, -1, 2)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \text{ och } R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

b) Kolonnerna i Q utgör bas för $Col(A)$.

4a) $Q(x) = x^T Ax$ med $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Egenvärden $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, egenvektor $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Största värde på kvoten $\frac{Q(x)}{x^T x}$ är är lika med största egenvärde, dvs 3. Största värde på $Q(x)$ då $x^T x = 3$ är alltså 9 och det antas för motsvarande egenvektor dvs $u = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1, 1, 0)^T$.

4b) Enligt sats i Lay blir maxvärdet på kvoten $\frac{Q(x)}{x^T x}$ lika med näst största egenvärde dvs 1, och därmed *max* $Q(x)$ lika med 3. Maxvärdet antas för egenvektorer hörande till egenvärdet 1, dvs vektorer på formen $x = c_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T + c_2(0, 0, 1)^T$ med längd $\|x\| = \sqrt{3}$. Koefficienterna c_1 och c_2 ska alltså ligga på cirkeln $c_1^2 + c_2^2 = 3$.

5a) Om $s(x)$ är splinen så ska s, s' och s'' överensstämma i alla noder. I ändpunkterna ska andraderivatorna s'' var lika med 0.
b) Ansätt $s_1 = ax + bx^2$, $0 \le x \le 1$. Då är $s_1' = a + 2bx$ och villkoren ger ekvationssystem i de obekanta a och b: $s_1'(1) = a + 2b = 3$ och $s_1(1) = a + b = 1$. Ekvationssystemet har lösning $a = -1$, $b = 2$ och därmed är splinedelen $s_1 = -x + 2x^2$. Den andra splinedelen ansätts $s_2 = cx + dx^2$, $-1 \le x \le 0$. Då är $s_2' = c + 2dx$. Villkoret $s_1'(0) = s_2'(0)$ ger då $c = a = -1$ och slutligen ger villkoret $s_2(-1) = -c + d = -1$ att $d = -2$ och splinedelen $s_2 = -x - 2x^2$.
b) Simpsons formel eller trapetsformeln plus Richardsonextrapolation är exakt på delintervallen ty s kvadratisk spline. Integralen blir alltså $\int_{-1}^{1} s(x)\ dx = \int_{-1}^{0} s_2(x)\ dx + \int_0^1 s_1(x)\ dx = \frac{1}{6}(-1 + 4 \cdot 0 + 0) + \frac{1}{6}(0 + 4 \cdot 0 + 1) = 0$.

6a) $f = \begin{cases} x_1 + 2x_1x_2 - x_3 + 1 \\ x_1^2 - x_2^2x_3 + x_3 \\ x_1^3 + 2x_2 - x_3 - 2 \end{cases}$ $\quad J = \begin{bmatrix} 1 + 2x_2 & 2x_1 & -1 \\ 2x_1 & -2x_2x_3 & -x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - s_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) 3 iterationer ytterligare ty kvadratisk konvergens och $0.013^{2^3} \le 10^{-10}$.

7 a) Invertera $\frac{1}{y} = a\frac{sin(t)}{t} + b\frac{cos(t)}{t}$, som är linjärt i parametrarna a och b. Systemet kan skrivas på matrisform $\begin{bmatrix} \frac{sin(t_1)}{t_1} & \frac{cos(t_1)}{t_1} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ \frac{sin(t_m)}{t_m} & \frac{cos(t_m)}{t_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_1} \\ ... \\ ... \\ \frac{1}{y_m} \end{bmatrix}$.

b) Residualvektor $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ ... \\ ... \\ f_m \end{bmatrix}$ där $f_i = \frac{t_i}{asin(t_i)+bcos(t_i)} - y_i$.

Jakobian $J = \begin{bmatrix} -\frac{t_1 sin(t_1)}{(asin(t_1)+bcos(t_1))^2} & -\frac{t_1 cos(t_1)}{(asin(t_1)+bcos(t_1))^2} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ -\frac{t_m sin(t_m)}{(asin(t_m)+bcos(t_m))^2} & -\frac{t_m cos(t_m)}{(asin(t_m)+bcos(t_m))^2} \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k)$, $\quad F_k = F(a_k, b_k)$.

8a) $y_0 = 1,\ y_1 = y_0 + 0.1(-1^2 + 0 \cdot 1) = 1 - 0.1 = 0.9$

b) $y_1^{(0)} = 0.9,\quad y_1^{(1)} = 1 + \frac{0.1}{2}(-1^2 - 0.9^2 + 0.1 \cdot 0.9) = 1 - 0.086 = 0.914.$

c) På testproblemet får vi: $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda y_k,\quad y_{k+1}^{(1)} = y_k + \frac{h}{2}(\lambda y_k + \lambda y_{k+1}^{(0)})$

$= y_k + \frac{h}{2}(\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k) = [1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}]y_k.$

Stabilitetområdet blir alltså $\{z \in C; \mid 1 + z + \frac{z^2}{2} \mid \leq 1\}$.

d) Då får vi stabilitetsområdet för korrektorn dvs Trapetsmetoden som är $\{z \in C; Re(z) \leq 0\}$.