Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2004-06-01

DAG: Tisdag 1 juni 2004 TID: 14.15 - 18.15 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 22 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Avgör om $H \subseteq V$ är ett underrum till det linjära rummet V om
(i) $V = C(R)$, mängden av kontinuerliga funktioner på R och
$H = \{f \in V;\ f(-t) = f(t)\ \forall t \in R\}$ **(1p)**
(ii) $V = R^{n\times n}$, mängden av alla reella $n \times n$-matriser och
H är mängden av uppåt triangulära reella matriser **(1p)**
(iii) $V = C([0, 1])$ och $H = \{f \in V;\ f(0) = 1\}$ **(1p)**
(iv) $V = R^{n\times n}$ och $H = \{A \in V;\ \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\}$ (diagonalelementen summerar till 0). **(1p)**
b) Låt H_1 och H_2 vara underrum i det linjära rummet V med skalärprodukt. Visa att $(H_1 + H_2)^\perp = H_1^\perp \cap H_2^\perp$ **(4p)**
Anm. Rummet $H_1 + H_2$ definieras som $H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2; h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$

Uppgift 2.
Låt $T:\ P_2 \to P_2$ vara den linjära avbildningen $T(p(t)) = tp'(t + 1) + p(t),\ \forall p \in P_2$.
a) Bestäm matrisen för avbildningen T i basen $\{1,\ t,\ t^2\}$. **(3p)**
b) Ange alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen T. **(2p)**

Uppgift 3.

a) Gör en full QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(5p)**

b) Använd QR-faktoriseringen i a-uppgiften för att ange en bas för $Col(A)$ och en bas för $Nul(A^T)$. **(2p)**

Uppgift 4.

a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: **(4p)**

$$\begin{cases} {x_1}'(t) = -2x_1(t), & x_1(0) = 1 \\ {x_2}'(t) = -4x_1(t) - 6x_2(t), & x_2(0) = 1 \\ {x_3}'(t) = -3x_3(t), & x_3(0) = 1 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om första ekvationen ändras till ${x_1}'(t) = -2x_1(t) + x_2(t)$? **(2p)**

c) Undersök om problemet i a-uppgiften är stabilt. **(1p)**

d) Antag att du vill använda Eulers framåtmetod för att lösa problemet i b-uppgiften. Ge ett villkor på steglängden h så att metoden blir stabil. **(3p)**

Uppgift 5. Vi vill lösa ekvationen $2x^2 + x - 2.99 = 0$ med Newtons metod.

a) En rot ligger nära $x^* = 1$. Använd den informationen för att bestämma konvergensordning och (approximativt) asymptotisk felkonstant vid konvergens mot roten. **(3p)**

b) Mer noggrant gäller att $x^* = 0.99800$ med fem korrekta decimaler. Använd den informationen och a-uppgiften för att avgöra hur många iterationer det kommer att behövas från startapproximation $x_0 = 1$ för att bestämma x^* med 10 korrekta decimaler. **(3p)**

Uppgift 6. Låt $(t_i, y_i),\ i = 1,\ 2,\ 3$ vara tre olika punkter i planet.

a) Visa att det finns exakt ett polynom p av grad <= 2 dvs $p \in P_2$ som går genom punkterna, dvs sådant att $p(t_i) = y_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$. Detta polynom kallas interpolationspolynomet. **(5p)**

Ledning: Visa att polynomen $p_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)},\ p_2(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}$ och $p_3(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$ är bas för P_2.

b) Ta fram interpolationspolynomet på Newtons form då punkterna är $(0, 0),\ (1, 2)$ och $(2, 3)$. **(4p)**

Uppgift 7. Betrakta problemet att minimera funktionen $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4$ utan bivillkor, med känd lösning $x^* = (0, 0)$.
a) Ange formeln för Steepest Descent-metoden för att lösa problemet, tala speciellt om vad som är sökriktning och vad som är steglängd. **(2p)**
b) Gör en iteration från $x_0 = (1, 1)$. Bestäm steglängden exakt genom att använda aktuell formel för kvadratisk objektfunktion. **(4p)**
c) Ta fram en startpunkt, som ger lösningen med **en** iteration av Steepest Descent-metoden på aktuellt problem. **(2p)**

Uppgift 8. Vi vill lösa följande differentialekvation numeriskt:
$y'' + 2y = 2t, y(0) = 0,\ y'(1) = 1.$
a) Skriv om problemet till ett system av första ordningen. **(1p)**
b) Formulera inskjutningsmetoden för att lösa problemet. **(3p)**
c) Skriv upp en lämplig metod att lösa den ekvation som inskjutningsmetoden ger upphov till. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 1 juni 2004

1a) (i) Ja, summan av två jämna funktioner är jämn, konstant gånger jämn funktion är jämn, nollfunktionen är jämn.
(ii) Ja, summan av två uppåt triangulära matriser är uppåt triangulär, konstant gånger uppåt triangulär matris är uppåt triangulär, nollmatrisen är uppåt triangulär.
(iii) Nej, summan av två funktioner som är 1 i punkten 0 är inte 1 i punkten 0.
(iv) Ja, med $Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ gäller $Sp(A+B) = Sp(A) + Sp(B) = 0 + 0 = 0$, $Sp(cA) = cSp(A) = 0,\ Sp(\mathbf{0}) = 0$.
b) Ta $x \in (H_1 + H_2)^{\perp}$. Då är x ortogonal mot $h_1 + h_2$ där $h_1 \in H_1$ och $h_2 \in H_2$.
dvs $< x, h_1 + h_2 >= 0 \Leftrightarrow < x, h_1 > + < x, h_2 >= 0, \forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2$.
Speciellt gäller för $h_1 = 0$ att $< x, h_2 >= 0$ dvs $x \in H_2^{\perp}$ och
för $h_2 = 0$ gäller att $< x, h_1 >= 0$ dvs $x \in H_1^{\perp}$.
x ligger alltså i både $H_1^{\perp}$ och $H_2^{\perp}$ dvs $x \in H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}$.
Omvändningen; att $x \in H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} \Rightarrow x \in (H_1 + H_2)^{\perp}$ visas på analogt sätt.

2a) $T(1) = 1,\ T(t) = t + t = 2t,\ T(t^2) = t \cdot 2(t+1) + t^2 = 3t^2 + 2t$.

Matrisen blir $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) Egenvärden till M finns på diagonalen dvs 1, 2 och 3.
Egenvektorer till matrisen M är resp. $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ och $(0,2,1)^T$, som motsvarar resp. egenvektorer till avbildningen T: 1, t och $2t + t^2$.

3a) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(0,1,1,0)^T - \frac{1}{2}(1,0,1,0)^T - \frac{1}{2}(0,1,0,1)^T = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)^T$.
Utgå från en fjärde kolonn som är linjärt oberoende med de tre givna exempelvis $(1,0,0,0)^T$ och ortogonalisera den mot de tre givna med Gram-Schmidt:
$(1,0,0,0)^T - \frac{1}{2}(1,0,1,0)^T + \frac{1}{4}(-1,1,1,-1)^T = \frac{1}{4}(1,1,-1,-1)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ och } R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) De tre första kolonnerna i Q utgår bas för $Col(A)$ och den sista kolonnen i Q utgör bas för $Nul(A^T)$

4a) Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är på diagonalen,
$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -6$ och $\lambda_3 = -3$
med egenvektorer, som fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem
$(A - \lambda_i I)v_i = 0$: $v_1 = (1, -1, 0)^T,\ v_2 = (0, 1, 0)^T$ och $v_3 = (0, 0, 1)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{-6t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4b) Egenvärdena blir nu $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -4$ och $\lambda_3 = -3$. Det dubbla egenvärdet $\lambda = -4$ har egenvektor $(1, -2, 0)^T$, som spänner rum av dimension $= 1 < 2 =$ multipiciteten hos egenvärdet. Matrisen är då inte diagonaliserbar.

4c) Alla egenvärden har realdel ≤ 0, alltså är problemet stabilt.

4d) Stabilitetsområdet för Eulers framåtmetod är en cirkelskiva i komplexa planet med centrum i $(-1, 0)$ och med radie 1. För stabilitet krävs att $h\lambda_i$ tillhör stabilitetsområdet för alla egenvärden λ_i. Störst krav ställer här $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ och villkoret blir $h\lambda_1 \geq -2$ som ger $h \leq 0.5$.

5a) $f' = 4x + 1$ med $f' \neq 0$ nära $x^* = 1$ dvs enkelrot. Konvergensordningen är då 2.
Asymptotiska felkonstanten $C = \frac{1}{2} \frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 0.4$
b) Successiva fel i approximationerna blir enligt förutsättningar och a-uppgiften:
$\epsilon_0 \approx 0.2 \cdot 10^{-2},\quad \epsilon_1 \approx 0.4 \cdot \epsilon_0^2 \approx 0.016 \cdot 10^{-4} = 1.6 \cdot 10^{-6},\quad \epsilon_2 \approx 0.4 \cdot \epsilon_1^2 \approx 1.024 \cdot 10^{-12}$ dvs två iterationer räcker.

6a) Bevis av ledningen: Vi har tre funktioner i ett tredimensionellt rum, det räcker att visa att de är linjärt oberoende. Vi vill alltså visa att om $c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t) + c_3 p_3(t) = 0\ \forall t$ så är $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Välj $t = t_1$ så följer $c_1 p_1(t_1) + c_2 p_2(t_1) + c_3 p_3(t_1) = c_1 + 0 + 0$ och för att detta uttryck ska vara 0 så måste $c_1 = 0$. På samma sätt visas att $c_2 = 0$ genom att sätta in $t = t_2$ och att $c_3 = 0$ genom att sätta in $t = t_3$.
Nu gäller från definitionen av basfunktionerna att $p(t) = y_1 p_1(t) + y_2 p_2(t) + y_3 p_3(t)$ uppfyller interpolationskraven $p(t_i) = y_i,\ i = 1, 2, 3$ och att p är entydigt följer av att $\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ är bas.

6b) Ansätt enligt Newton: $p = c_1 + c_2(t - t_1) + c_3(t - t_1)(t - t_2)$. Interpolationskraven ger ekvationsssystem:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ med lösning $c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = -0.5$ och polynomet blir alltså $p(t) = 2t - 0.5t(t - 1)$.

7 a) Sökmetod: $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)} \\ d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) \end{cases}$. Här är $d^{(k)}$ sökriktning och α_k steglängd.

b) $f = 2x_1^2 + x_2^2 + 4, \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

För första iterationen har vi
$x^{(0)} = (1,1)^T, \quad \nabla f(x^{(0)}) = (4,2)^T, \quad d^{(0)} = (-4,-2)^T, \quad Hd^{(0)} = (-16,-4)^T$.
Optimal steglängd enligt formel: $\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x^{(0)})^T d^{(0)}}{d^{(0)T} H d^{(0)}} = -\frac{-20}{72} = \frac{5}{18}$.
Första iterationen blir alltså: $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} = (1,1)^T + \frac{5}{18}(-4,-2)^T = \frac{1}{9}(-1,4)^T$.
7c) Nivåkurvorna är ellipser centrerade kring origo med halvaxlarna längs koordinataxlarna. Om man startar någonstans på halvaxlarna så pekar negativa gradienten till origo och **en** iteration krävs. Man kan t.ex. starta i $x^{(0)} = (1,0)^T$.

8a) Systemet blir $\begin{cases} {y_1}' = y_2 \\ {y_2}' = 2t - 2y_1 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(1) = 1 \end{cases}$

b) Inskjutningsmetoden innebär att skriva problemet som $\begin{cases} {y_1}' = y_2 \\ {y_2}' = 2t - 2y_1 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = s \end{cases}$

och lösa ekvationen: $q(s) \equiv y_2(1,s) - 1 = 0$.
c) Sekantmetoden för att lösa $q(s) = 0$ blir:
$s_{k+1} = s_k - \frac{(y_2(1,s_k)-1)(s_k - s_{k-1})}{y_2(1,s_k) - y_2(1,s_{k-1})}, \ k = 1, 2, ...$ med två startskott s_0 och s_1