Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2004-01-12

DAG: Måndag 12 januari 2004 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 23 januari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Låt $\{v_i\}_{i=1}^m$ vara linjärt oberoende i ett linjärt rum V. Anta att $u \in V$ och $u \notin Span\{v_1,\ v_2,\ ...,\ v_m\}$. Visa att då är mängden $\{v_1,\ v_2,\ ...,\ v_m,\ u\}$ linjärt oberoende. **(4p)**
b) Låt $V = P_n$ vara rummet av polynom av grad $\leq n$. Visa att $B = \{1,\ t,\ t^2,\ ...,\ t^n\}$ är en bas i V. **(4p)**

Uppgift 2.
a) För vilka värden på a är vektorerna $(a,\ 1,\ 1)$ och $(a,\ 1,\ a)$ ortogonala med avseende på skalärprodukten $< x,\ y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ i R^3. **(2p)**
b) Ange samtliga vektorer i R^4 som är ortogonala mot de båda vektorerna $u_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$ och $u_2 = (2,\ 5,\ 1,\ 4)$ (med avseende på standardskalärprodukten). **(3p)**
c) Visa att $\int_0^{\pi/2} \sqrt{sin(t)\ cos(t)}\ dt \leq 1$ genom att använda skalärprodukten $< f,\ g >= \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)\ dt$ i $V = C[0,\ \pi/2]$. **(4p)**

Uppgift 3. Undersök för vilka reella a och b som matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. **(6p)**

Uppgift 4. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.
a) Bestäm en LU-faktorisering av A. **(3p)**
b) Bestäm en QR-faktorisering av A. **(5p)**

Uppgift 5.
a) Anta att $arctan(x)$ approximeras med Taylorpolynomet av grad 3 nära $x = 0$. Teckna bakåtfelet i approximationen i punkten $x = 0.1$ **(2p)**
b) Betrakta ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$. Ge en gräns för relativa felet i lösningen om man räknar med tre korrekta decimaler i $\sqrt{2}$. **(4p)**

Uppgift 6. Beräkna en approximation till integralen $\int_1^2 f(x)\, dx$ där f går exakt genom punkterna $(1,\ 2)$, $(1.25,\ 3)$, $(1.5,\ 3.5)$, $(1.75,\ 4.5)$ och $(2,\ 4)$. Använd trapetsformeln med steglängd 0.5 och 0.25. Ta fram ett extrapolerat värde med Richardsons teknik och uppskatta trunkeringsfelet. **(6p)**

Uppgift 7. Du ska anpassa parametrarna a och b i modellen $y(t) = \frac{1}{ae^{-bt}}$ tilll mätningar $(t_i,\ y_i)$, $i = 1,\ \ldots\ ,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att **linjär** minstakvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas. **(3p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(4p)**

Uppgift 8. Betrakta en prediktor/korrektor-metod för begynnelsevärdesproblem,
$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0$.
Låt prediktorn vara Eulers framåtmetod och korrektorn Eulers bakåtmetod.
a) Skriv upp metoden man får vid fixpunktsiteration i korrektorn. **(2p)**
b) Bestäm stabilitetsområdet för metoden om man itererar till konvergens i korrektorn. **(2p)**
c) Anta att man gör **en** iteration i korrektorn. Vilken approximationsordning får metoden då? **(3p)**
d) Bestäm stabilitetsområdet för metoden om man gör **två** fixpunktsiterationer i korrektorn. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671

Lösningar till tentamen 12 januari 2004

1a) Anta $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i + du = 0$. Vi vill visa att $c_1 = c_2 = ... = c_m = d = 0$ Om $d \neq 0$ så gäller $u = -\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{m} c_i v_i$ dvs $u \in Span\{v_i\}_{i=1}^{m}$ som motsäger antagandet, alltså är $d = 0$. Men då är $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0$. Antagandet att $\{v_1\}_{i=1}^{m}$ är linjärt oberoende ger då att $c_1 = c_2 = ... = c_m = 0$.

b) 1. B spänner V ty $p \in V$ kan skrivas $p = c_1 + c_2 t + ... + c_{n+1} t^n$.
2. B är linjärt oberoende ty låt $c_1 + c_2 t + ... + c_{n+1} t^n = 0,\ \forall t$ och ta $t = 0$ så får vi $c_1 = 0$.
Derivering ger $c_2 + 2c_3 t + ... + nc_{n+1} t^{n-1} = 0,\ \forall t$ och $t = 0$ ger nu $c_2 = 0$.
Upprepa att derivera och sätta $t = 0$ ger $c_j = 0, j = 1, ...,\ n+1$.

2a) $<(a,1,1),(a,1,a)>= a^2 + 2 + 3a$ och lösning av kvadratiska ekvationen $a^2 + 2 + 3a = 0$ ger $a = -2$ eller $a = -1$.

b) Vektorerna ska alltså vara ortogonala mot raderna i matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Vi löser homogena systemet $Ax = 0$ med radreduktion och får $x = s[-7\ 2\ 0\ 1]^T + t[-3\ 1\ 1\ 0]^T$.

c) Låt $u = \sqrt{sin(t)}$ och $v = \sqrt{cos(t)}$. Då är $\| u \| = \int_0^{\pi/2} sin(t)\ dt = 1$, $\| v \| = \int_0^{\pi/2} cos(t)\ dt = 1$ och $<u,v>= \int_0^{\pi/2} \sqrt{sin(t)cos(t)}\ dt$. Enligt Cauchys olikhet gäller $\frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} \leq 1$ och därmed $\int_0^{\pi/2} \sqrt{sin(t)cos(t)}\ dt \leq 1$.

3 Genom att blockindela A ser vi att egenvärdena är 1 och egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ och de senare fås ur karakteristiska ekvationen $(1-\lambda)^2 - ab = 0$ dvs $\lambda = 1 \pm \sqrt{ab}$.
Om $ab \neq 0$ så är alla egenvärden olika och A är diagonaliserbar.
Om $ab = 0$ så är alla egenvärden $= 1$. Vi kan anta att $b = 0$ ty $a = 0$ analogt (A diagonaliserbar $\Leftrightarrow A^T$ diagonaliserbar).
Om även $a = 0$ så är A redan diagonal. För $a \neq 0$ löser vi systemet $(A - I)x = 0$, med lösning $x = [t\ 0\ s]^T$, som inte spänner hela R^3, dvs A är inte diagonaliserbar. Slutsatsen blir att A inte är diagonaliserbar om antingen $a \neq 0$ eller $b \neq 0$.

4a) Pivotering med $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ger $PA = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Två stegs Gausselimination ger uppåt triangulär matris $U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ och multiplikatorerna på plats ger den nedåt triangulära matrisen $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$ så att $PA = LU$.

b) De två första kolonnerna är redan ortogonala. Ortogonalisering med Gramm-Schmidts metod av den tredje mot de två första ger den nya kolonnen $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och normering av kolonnerna ger matrisen $Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{24}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{20}} & \frac{4}{\sqrt{24}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{4}{\sqrt{20}} & -\frac{2}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$. Därefter fås R genom matrismultiplikationen $R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{20} & 0 & \frac{12}{\sqrt{20}} \\ 0 & \sqrt{24} & \frac{6}{\sqrt{24}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$.

5a) $arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3}$. Bakåtfelet $x = 0.1$ blir $tan(0.1 - \frac{0.1^3}{3}) - 0.1$

b) Störningsformeln är $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$, där $\kappa(A) = \| A \| \| A^{-1} \|$.

Vi har $\| A \|_\infty = 9$, $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $\| A^{-1} \|_\infty = 0.9$ och $\kappa = 8.1$. Vidare gäller enligt förutsättningarna att $\| \delta b \|_\infty \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$, $\| b \|_\infty = 2$. Detta ger $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 8.1\frac{0.5\cdot 10^{-3}}{2} \leq 2.1 \cdot 10^{-3}$

6) $T(0.5) = 0.5(1 + 3.5 + 2) = 3.25$, $T(0.25) = 0.25(1 + 3 + 3.5 + 4.3 + 2) = 3.5$. Extrapolation ger $T^{(2)}(0.25) = 3.5 + \frac{3.5-3.25}{3} = 3\frac{7}{12}$. Trunkeringsfelet uppskattas med $| R_T | \leq | 3.5 - 3.25 | = \frac{1}{4}$. Svaret blir $3\frac{7}{12} \pm \frac{1}{4}$

7 a) Invertera $\frac{1}{y} = ae^{-bt}$ och logaritmera $ln(\frac{1}{y}) = ln(a) - bt$, som är linjärt i parametrarna $ln(a)$ och b. Systemet kan skrivas $ln(a) - bt_i = -ln(y_i),\ \ i = 1, ..., \ m$ eller på matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & -t_1 \\ ... & ... \\ ... & ... \\ 1 & -t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ln(a) \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ln(y_1) \\ ... \\ ... \\ -ln(y_m) \end{bmatrix}.$$

b) Residualvektor $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ ... \\ ... \\ f_m \end{bmatrix}$ där $f_i = \frac{1}{ae^{-bt_i}} - y_i$. Jakobian $J = \begin{bmatrix} -\frac{e^{bt_1}}{a^2} & \frac{t_1 e^{bt_1}}{a} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ -\frac{e^{bt_m}}{a^2} & \frac{t_m e^{bt_m}}{a} \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k), \quad F_k = F(a_k, b_k)$.

8a) prediktor: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$,
korrektor med fixpunktsiteration: $y_{k+1}^{(l+1)} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}^{(l)})$.
b) Då får vi Euler bakåt med stabilitetsområde: $\{z \in C; \mid z - 1 \mid \geq 1\}$ (enligt föreläsning och lärobok).
c) På testproblemet får vi: $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda y_k, \ \ y_{k+1}^{(1)} = y_k + h\lambda y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k) = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2]y_k$
Stämmer med två termers Taylorutveckling av $e^{h\lambda}$ dvs metoden är av ordning 1.
d) På testproblemet får vi: $y_{k+1}^{(2)} = y_k + h\lambda(y_{k+1}^{(1)}) = y_k + h\lambda[y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k + h\lambda y_k + (h\lambda)^2 y_k + (h\lambda)^3 y_k = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2 + (h\lambda)^3]y_k$.
Stabilitetområdet blir alltså $\{z \in C; \mid 1 + z + z^2 + z^3 \mid \leq 1\}$.