Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2003-08-29

DAG: Fredag 29 augusti 2003 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Låt U_1 och U_2 vara underrum i det linjära rummet V.
Visa att $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2;\ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$ är ett underrum i V. **(4p)**
b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$. Undersök om $Nul(A)$ och $Nul(B)$ har någon gemensam vektor $\neq 0$ i R^4. **(4p)**

Uppgift 2.
a) Låt $u \in V$, ett linjärt rum med skalärprodukt $< \cdot, \cdot >$ och motsvarande norm $\| \cdot \|$. Låt $\{e_i\}_{i=1}^k$ vara ON-bas för ett underrum U till V. Visa att $\sum_{i=1}^k < u, e_i >^2 \leq \| u \|^2$. **(3p)**
b) Låt $u \neq 0$ och $v \neq 0$ vara två vektorer i ett linjärt rum med skalärprodukt, sådana att $\| u \| = \| v \| = \| u - v \|$. Bestäm vinkeln mellan u och v. **(3p)**
c) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **(3p)**

Uppgift 3. Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_2 + (a_0 + a_1 - a_2)t + 2a_0t^2$ från P_2 till P_2.
a) Bestäm matrisen för avbildningen i standardbasen $E = \{1,\ t,\ t^2\}$ för P_2. **(2p)**
b) Betrakta basen $B = \{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$ för P_2. Bestäm transformationsmatrisen mellan baserna B och E och bestäm med hjälp av den koordinaterna för $q = 3 - 2t + 4t^2$ i basen B. **(3p)**
c) Bestäm matrisen för avbildningen F i basen B och bestäm koordinaterna för $F(q)$ i basen B, där q är given i b-uppgiften. **(4p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden. **(4p)**.

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) - x_2(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = -3x_3(t), & x_3(0) = 2 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om andra ekvationen i a-uppgiften ändras till $x_2'(t) = -2x_2(t)$? Motivera ordentligt! **(2p)**
c) Föreslå en numerisk metod som klarar av att lösa b-uppgiften. Välj en steglängd för metoden och beräkna ett steg. Blir det några stabilitetsproblem? **(4p)**

Uppgift 5. Betrakta algoritmen $y = \frac{a}{b+c}$ i ett flyttalssystem med IEEE-standard. Indata a, b och c antas vara flyttal dvs Du behöver inte ta hänsyn till felen då dessa lagras i flyttalssystemet. Genomför framåtanalys och bakåtanalys för algoritmen samt konstatera om den är stabil eller inte. **(6p)**

Uppgift 6.
a) Definiera vad som menas med konvergensordning och asymptotisk felkonstant hos en metod för ekvationslösning i en variabel. **(3p)**
b) Ange konvergenshastighet och asymptotisk felkonstant hos Newtons metod, dels för enkelrot, dels för multipelrot med multiplicitet m. **(2p)**

Uppgift 7. Vid studiet av en viss larv är man intresserad av sambandet mellan larvens vikt W och dess syrekonsumtion R. Av biologiska skäl gäller sambandet $R = bW^a$ och man önskar bestämma parametrarna a och b genom att anpassa till uppmätta data
$(R_i,\ W_i),\ i = 1,\ ...,\ m$.
a) Linjärisera modellen och ange hur linjär minsta-kvadrat anpassning kan användas. Skriv upp ekvationssystemet som man får att lösa. **(3p)**
b) Behåll den ursprungliga modellen och använd icke-linjär minsta-kvadrat anpassning. Ange residual och Jakobian, med explicit angivande av ingående derivator. Sätt upp Gauss-Newtons metod för att lösa problemet. Hur kan man få lämplig startapproximation? **(4p)**

Uppgift 8. Betrakta differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' = [y - 2y'(5) + y(5)][(y')^2 - 2],\ \ 0 \le t \le 5 \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Skriv om problemet som system av första ordningen och lös problemet med inskjutningsmetoden map randvärdena $y'(5)$ och $y(5)$. Ange den ekvation som ska lösas och formulera en lämplig iterativ lösningsmetod för ekvationen. **(6p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 29 augusti 2003

1a) 1. $0 \in U_1 + U_2$ ty $0 = 0 + 0$ med $0 \in U_1$ och $0 \in U_2$.
2. Låt $u \in U_1 + U_2$ och $v \in U_1 + U_2$ dvs $u = u_1 + u_2$ med $u_1 \in U_1$ och $u_2 \in U_2$ och $v = v_1 + v_2$ med $v_1 \in U_1$ och $v_2 \in U_2$. Då är $u+v = u_1+u_2+v_1+v_2 = (u_1+v_1)+(u_2+v_2)$ med $u_1 + v_1 \in U_1$ och $u_2 + v_2 \in U_2$ dvs $u + v \in U_1 + U_2$.
3. Med $\alpha \in R$ har vi $\alpha u = \alpha(u_1 + u_2) = \alpha u_1 + \alpha u_2$ där $\alpha u_1 \in U_1$ och $\alpha u_2 \in U_2$ dvs $\alpha u \in U_1 + U_2$.

b) Radreducering av A ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Homogena systemet $Ax = 0$ har lösning $x = [s, -2s-t, t, s]$. Radreducering av B ger $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Homogena systemet $By = 0$ har lösning $y = [-2t + 3s, -3s, t, s]$. Gemensam vektor finns om s och t kan väljas, inte båda $= 0$, så att $x = y$. Vi får ett ekvationssystem med de två ekvationerna $s = 3s - 2t$ och $-2s - t = -3s$ som är singulärt, alltså finns icke-trivial lösning. Exempelvis kan vi ta $s = t = 1$. Den gemensamma vektorn för de båda nollrummen är då $x = y = [1, -3, 1, 1]$.

2a) Bästa approximation till u i U är $\hat{u} = \sum_{i=1}^{k} < u, e_i > e_i$, med $u - \hat{u}$ ortogonal mot $\hat{u}$. Pythagoras sats ger $\| \hat{u} \| \leq \| u \| \Leftrightarrow \| \hat{u} \|^2 = \sum_{i=1}^{k} < u, e_i >^2 \leq \| u \|^2$, ty ON-bas.
b) $\| u - v \|^2 = < u - v, u - v > = \| u \|^2 + \| v \|^2 - 2 < u, v >$
dvs $2 < u, v > = \| u \|^2 + \| v \|^2 - \| u - v \|^2 = \| u \|^2 = \| u \| \| v \|$, enligt förutsättningen.
Definition av vinkel ger $cos\ \theta = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{2}$ och $\theta = \frac{\pi}{3}$.
c) Ortogonalisera den andra kolonnen mot den första med Gram-Schmidt's metod:
$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$. Normalisering av kolonnerna ger då $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ och $R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

3a) $F(e_1) = t + 2t^2 = e_2 + 2e_3,\ F(e_2) = t = e_2,\ F(e_3) = 1 - t = e_1 - e_2$.
$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $b_1 = e_1,\ b_2 = e_1 + e_2,\ b_3 = e_1 + e_2 + e_3 \Rightarrow P_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. För q gäller $[q]_E = [3\ \ -2\ \ 4]^T$ och koordinattransformationen blir $P_B[q]_B = [q]_E$. Detta är ett uppåt triangulärt system som lätt löses till $[q]_B = [5\ \ -6\ \ 4]^T$.
c) $F(b_1) = t+2t^2 = 2b_3-b_2-b_1,\ F(b_2) = 2t+2t^2 = 2b_3-2b_1,\ F(b_3) = 1+t+2t^2 = 2b_3-b_2$.
$M' = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Alternativt kan M' bestämmas genom $M' = P_B^{-1}MP_B$.
$[F(q)]_B = M'[q]_B = [7\ \ -9\ \ 6]^T$.

4a) Systemet kan skrivas $x' = Ax$ med $A = -\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Egenvärden i $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, egenvektorer i $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösningen kan skrivas $x = c_1e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3e^{-3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Begynnelsevillkoret $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ger ekvationssystem $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och lösningen blir då $x = e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) $A = -\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ med $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, som inte är inverterbar.
c) Eulers framåtmetod går bra. Välj steglängd $h = 0.1$. Vi får då $x_{k+1} = x_k + hAx_k$
$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \ x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 1.4 \end{bmatrix}$.
Det blir inga stabilitetsproblem om h väljs tillräckligt litet, $h \leq \frac{2}{3}$.

5) Framåtanalys: $fl(\frac{a}{b+c}) = \frac{a(1+\epsilon_2)}{(b+c)(1+\epsilon_1)}$ med $\mid \epsilon_i \mid \leq \mu,\ i = 1,\ 2$ där μ är avrundningsenheten (maskintalet). Vi får då $fl(\frac{a}{b+c}) = \frac{a}{b+c}(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_1)^{-1} = \frac{a}{b+c}(1+\epsilon_2)(1-\epsilon_1+O(\mu^2))$.
För relativa framåtfelet F_r får vi alltså $F_r = \frac{fl(\frac{a}{b+c})-\frac{a}{b+c}}{\frac{a}{b+c}} = \epsilon_2 - \epsilon_1 + O(\mu^2)$ och uppskattningen i norm blir $\mid F_r \mid \leq 2\mu + O(\mu^2)$, dvs framåtfelet är alltid litet.
Bakåtanalys: $fl(\frac{a}{b+c}) = \frac{a(1+\epsilon_2)}{(b+c)(1+\epsilon_1)} = \frac{a(1+\epsilon_2)}{b(1+\epsilon_1)+c(1+\epsilon_1)} = \frac{\hat{a}}{\hat{b}+\hat{c}}$,
där $\hat{a} = a(1+\epsilon_2),\ \hat{b} = b(1+\epsilon_1)$ och $\hat{c} = c(1+\epsilon_1)$.
Resultatet motsvarar alltså de relativa felen i indata enligt: $\mid \frac{\hat{a}-a}{a} \mid = \mid \epsilon_2 \mid \leq \mu$,
$\mid \frac{\hat{b}-b}{b} \mid = \mid \epsilon_1 \mid \leq \mu$, $\mid \frac{\hat{c}-c}{c} \mid = \mid \epsilon_1 \mid \leq \mu$. Bakåtfelen är alltså små och algoritmen är stabil.

6a) Största möjliga tal q så att $\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^q} \leq C < \infty$, där x^* är exakta lösningen och x_k approximationer, är metodens konvergensordning och C är asymptotiska felkonstanten.
b) Newtons metod har konvergensordning 2 med felkonstant $\frac{1}{2} \mid \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \mid$ för enkelrot och konvergensordning 1 med felkonstant $\frac{m-1}{m}$ vid multipelrot med multiplicitet m.

7 a) $R_i = bW_i^a$. Linjärisering: $ln(R_i) = \hat{b} + a\ ln(W_i)$, med $\hat{b} = ln(b)$

Överbestämt linjärt ekvationssystem: $\begin{bmatrix} ln(W_1) & 1 \\ ln(W_2) & 1 \\ ... & ... \\ ln(W_m) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ln(R_1) \\ ln(R_2) \\ ... \\ ln(R_m) \end{bmatrix}$. Återformera $b = e^{\hat{b}}$.

b) Residualer $f_i = R_i - bW_i^a$, $F = [f_1\ f_2\ ...\ f_m]^T$. Jakobian $J = \begin{bmatrix} -b\ ln(W_1)W_1^a & -W_1^a \\ -b\ ln(W_2)W_2^a & -W_2^a \\ ... & ... \\ -b\ ln(W_m)W_m^a & -W_m^a \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k)$, $F_k = F(a_k, b_k)$.
Starta med lösningen från linjäriserat problem enligt a-uppgiften.

8) Sätt $a = -2y'(5) + y(5)$ och skriv på systemform genom $y_1 = y,\ y_2 = y'$: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = (y_1 + a)(y_2^2 - 2) \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$

Inskjutning på a innebär att lösa ekvationen $q(a) = 0$ där $q(a) = a + 2y_2(5,a) - y_1(5,a)$.
Ekvationen $q(a) = 0$ kan lösas med sekantmetoden, som blir
$a_{k+1} = a_k - \frac{q(a_k)(a_k - a_{k-1})}{q(a_k) - q(a_{k-1})}$, $k = 1,\ 2,\ ....$ I varje iteration i sekantmetoden måste man lösa ode-problemet för att få nya värden på $y_2(5, a_k)$ och $y_1(5, a_k)$.