Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2003-05-30

DAG: Fredag 30 maj 2003   TID: 14.15 - 18.15   SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 19 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att $m \times n$ matrisen A har rang=1 då och endast då $A = vu^T$ för vektorer $v \in R^m$ och $u \in R^n$ med $v \neq 0$ och $u \neq 0$. **(4p)**
b) Låt $A = vu^T$ för $v \in R^n$ och $u \in R^n$ med $v \neq 0$. Visa att ett egenvärde till A är $u^T v$. Vad är motsvarande egenvektor? Bestäm alla övriga egenvärden till A. Ange en bas av egenvektorer till A. **(4p)**

Uppgift 2.
Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
a) Bestäm en full QR-faktorisering av A. **(4p)**
b) Bestäm de singulära värdena till A. **(2p)**
c) Låt $b = [1\ 1\ 1\ 1]^T$. Lös ekvationssystemet $Ax = b$ i minstakvadratmening. Ange felets (residualens) storlek. **(2p)**
d) Avgör hur känsligt normalekvationssystemet är genom att bestämma konditionstalet till $A^T A$. **(2p)**

Uppgift 3. Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = (2a_1 - a_2) + 2a_0t + (a_0 - 2a_2)t^2$ från P_2 till P_2.
a) Ta fram matrisen för avbildningen i standardbasen för P_2 : $\{1,\ t,\ t^2\}$. **(2p)**
b) Ta fram inversen till avbildningen F och beskriv den på samma sätt som avbildningen F är beskriven. **(4p)**
c) Är avbildningen F "på" ("onto")? Är avbildningen F "ett till ett" ("one to one")? Motivera ordentligt! **(2p)**

Uppgift 4. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$.
a) Bestäm största värde på $Q(x)$ då $x^Tx = 1$. Bestäm en vektor u med $u^Tu = 1$ så att $Q(u)$ blir maximal. **(4p)**
b) Bestäm $max\ Q(x)$ under villkoren $x^Tx = 1,\ x^Tu = 0$, där u är vektorn från a-uppgiften. Ange en vektor v så att $Q(v)$ blir maximal under de givna villkoren. **(2p)**
c) Vilken typ av objekt i R^3 representerar ekvationen $Q(x) = 1$? **(1p)**

Uppgift 5. Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 - x_1x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ x_1^3 - x_2x_3 - 2x_3 = 0 \\ x_1^2 - 2x_2 - 2 = 0 \end{cases}$.
a) Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**
b) Ge en formel för hur felet efter en iteration skulle kunna uppskattas. Några beräkningar behöver inte göras. **(2p)**

Uppgift 6.
a) Bestäm den kvadratiska spline s(x) med inre nod i 1, som interpolerar $f(x) = x^3 + x$ i punkterna 0, 1, 2 och som uppfyller villkoret $s'(2) = 12$. **(4p)**
b) Bestäm integralen av s i a-uppgiften över intervallet (0,2) **exakt** med en numerisk metod. **(2p)**

Uppgift 7.
a) Definiera vad som menas med en tillåten riktning resp. en descentriktning i samband med optimering. Ge ett användbart villkor för att en riktning ska vara en descentriktning. **(3p)**
b) Skriv upp sökmetoden Steepest Descent samt diskutera hur steglängden kan bestämmas. **(3p)**

Uppgift 8. Heuns metod för begynnelsevärdesproblem, $y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0$, är enstegsmetoden
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$
a) Bestäm approximationsordningen för Heuns metod **(3p)**
b) Bestäm stabilitetsområdet för Heuns metod. Är den A-stabil? **(3p)**
c) Heuns metod uppstår ur en prediktor/korrektormetod med **en** fixpunktsiteration i korrektorn. Prediktorn är Eulers framåtmetod. Vilken metod är korrektorn? Förklara ordentligt! **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 30 maj 2003

1a) $\Leftarrow)$ $A = vu^T \Rightarrow Ax = vu^Tx = (u^Tx)v \in Span(v), u \neq 0 \Rightarrow \exists\ x$ med $u^Tx \neq 0, v \neq 0$. Alltså har V(A) dimensionen 1.
$\Rightarrow)$ $dim\ V(A) = 1$, någon kolonn $\neq 0$ säg den första. Då är $A = [v\ \alpha_2 v\ \alpha_3 v\ ...\ \alpha_n v]$ för $\alpha_j \in R$, dvs $A = vu^T$ med $u = [1\ \alpha_2\ ...\ \alpha_n]^T$.
b) $Av = vu^Tv = (u^Tv)v$ dvs u^Tv egenvärde med motsvarande egenvektor v. Om $u = 0$ så är $A = 0$ med alla egenvärden 0. Om $u \neq 0$ så finns ON-bas i R^n : $\{u,\ u_2,\ ...\ , u_n\}$. Då $Au_j = vu^Tu_j = 0u_j$, $j = 2,\ ...\ ,\ n$ dvs A har egenvärde 0 med multiplicitet n-1. $\{v,\ u_2,\ ...\ ,\ u_n\}$ är bas av egenvektorer, om $u^Tv \neq 0$.

2a) Gram-Schmidt: Kolonnerna $a_1,\ a_2,\ a_3$ är ortogonala, behöver bara normeras. Vi skaffar en fjärde kolonn med G-S utgående från $v = [0\ 1\ 0\ 0]^T \notin Span\{a_j\}_{j=1}^3$:
$a_4 = v - 0a_1 - \frac{1}{4}a_2 - 0a_3 = [0\ 0.5\ 0\ -0.5]^T$. Med normerade kolonner får vi då

$$Q = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{17} & 0 & 1/\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{17} & 0 & -4/\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{8} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \text{ Sedan } R = Q^TA = \begin{bmatrix} \sqrt{17} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) $A^TA = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$ Egenvärden 17, 8 och 17, dvs singulära värden $\sqrt{17},\ \sqrt{17},\ \sqrt{8}$.

c) $A^TAx = A^Tb \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 5/17 \\ 1/2 \\ -3/17 \end{bmatrix}$
$r = Ax - b = 0, \quad \| r \| = 0.$

d) $(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/17 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17 \end{bmatrix}$, $\kappa(A^TA) = \| A^TA \| \cdot \| (A^TA)^{-1} \| = 17/8$.
Inte speciellt känsligt.

3a) $F(e_1) = 2t + t^2 = 2e_2 + e_3,\ F(e_2) = 2 = 2e_1,\ F(e_3) = -1 - 2t^2 = -e_1 - 2e_3.$

$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$

b) $M^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$F^{-1}(e_1) = 0.5t,\ F^{-1}(e_2) = 0.5 + 0.125t + 0.25t^2,\ F^{-1}(e_3) = -0.25t - 0.5t^2$

$F^{-1}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \frac{1}{2}a_1 + (\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{8}a_1 - \frac{1}{4}a_2)t + (\frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{2}a_2)t^2.$

c) Avbildningen F är både "på" och "ett-till-ett" eftersom den är inverterbar, kolonnerna i M utgör bas för R^3.

4a) $Q(x) = x^T A x$ med $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Egenvärden $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, egenvektorer $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$

Största värde på $Q(x)$ är lika med största egenvärde, dvs 3. Antas för motsvarande egenvektor $u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[0,\ 1,\ 1]^T$.

b) Enligt sats i Lay, så är maximum lika med näst största egenvärde dvs 2, och maximum antas för motsvarande egenvektor, dvs $v = \pm[1,\ 0,\ 0]^T$.

c) Ellipsoid med halvaxlar längs egenvektorerna p_i och med längd $1/\sqrt{\lambda_i}$ där λ_i är egenvärdet motsvarande p_i.

5a) $f = \begin{cases} 2x_1 - x_1x_2 + x_3 - 3 \\ x_1^3 - x_2x_3 - 2x_3 \\ x_1^2 - 2x_2 - 2 \end{cases} \qquad J = \begin{bmatrix} 2 - x_2 & -x_1 & 1 \\ 3x_1^2 & -x_3 & -x_2 - 2 \\ 2x_1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad f_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},\quad J_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - s_0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

b) $\| \mathbf{x}_1 - x^* \| \approx \| J(\mathbf{x}_1)^{-1} f(\mathbf{x}_1) \|$ eller $\| \mathbf{x}_1 - x^* \| \lesssim \| J(\mathbf{x}_1)^{-1} \| \| f(\mathbf{x}_1) \|$.

6a) Ansätt $s_2 = 10 + a(x-2) + b(x-2)^2$. Då gäller $s_2(2) = f(2) = 10$.
$s_2' = a + 2b(x-2), \quad s_2'(2) = 12 \Rightarrow a = 12$
$s_2 = 10 + 12(x-2) + b(x-2)^2, \ s_2(1) = 10 - 12 + b = f(1) = 2 \Rightarrow b = 4$
$s_2 = 10 + 12(x-2) + 4(x-2)^2 = 4x^2 - 4x + 2$. klar!
Ansätt $s_1 = 2 + c(x-1) + d(x-1)^2$. Då gäller $s_1(1) = f(1) = 2$.
$s_1' = c + 2d(x-1), \ s_1'(1) = s_2'(1) = 4 \Rightarrow c = 4$
$s_1 = 2 + 4(x-1) + d(x-1)^2, \ s_1(0) = 2 - 4 + d = f(0) = 0 \Rightarrow d = 2$
$s_1 = 2 + 4(x-1) + 2(x-1)^2 = 2x^2$. klar!
$$s(x) = \begin{cases} 2x^2, \ 0 \le x \le 1 \\ 4x^2 - 4x + 2, \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$
b) Simpsons formel är exakt för andragradspolynom. Simpsons formel över de två delintervallen ger $I = \frac{1}{6}(0 + 4 \cdot 0.5 + 2) + \frac{1}{6}(2 + 4 \cdot 5 + 10) = 6$. Här använder vi splinevärdena $s_1(0.5) = 0.5$ och $s_2(1.5) = 5$.

7 a) s är en tillåten riktning i x om $x + \alpha s$ är tillåtna punkter för $0 < \alpha < \delta_1$.
s är en descentriktning till funktionen f i x om $f(x + \alpha s) < f(x)$ för $0 < \alpha < \delta_2$.
s är en descentriktning i x om $\nabla f(x)^T s < 0$.
b) Steepest Descent: $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$.
Steglängden α_k väljs genom linjesökning dvs genom problemet
$min_\alpha \ f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$, ett endimensionellt optimeringsproblem.

8 a) Heuns metod på testproblemet (T): $y' = \lambda y$:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)\} = y_k + h\lambda y_k + \frac{(h\lambda)^2}{2} y_k = (1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}) y_k$.
Tillväxtfaktorn stämmer med tre termer till exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda}$.
Metodens approximationsordning är 2.
b) $\mid 1 + z + \frac{z^2}{2} \mid \le 1$ med $z = h\lambda$. Ej A-stabil ty t.ex $z = h\lambda = -3$ ger $\mid 1 - 3 + \frac{9}{2} \mid > 1$.
c) Prediktor är Euler framåt: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$.
Korrektor är trapetsmetoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}\}$
En fixpunktsiteration i korrektorn: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))\}$, vilket är Heuns metod enligt ovan.