Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2002-08-30

DAG: Fredag 30 augusti 2002 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 23 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1
a) Låt U vara ett underrum till det linjära rummet V och låt $U^{\perp}$ vara ortogonala komplementet till U. Visa att följande två egenskaper är ekvivalenta för vektorer $u \in V$ och $u' \in U$:
(i) $u - u' \in U^{\perp}$
(ii) $\| u - u' \| \leq \| u - w \|, \forall w \in U$ **(6p)**
b) Tillämpning på a-uppgiften: Låt U vara det underrum i R^4 som definieras av
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
Bestäm map standardskalärprodukten bästa approximation $u' \in U$ till
$u = (2,\ 0.25\ ,\ 0,\ \ -1)$. **(3p)**

Uppgift 2. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Ta fram en faktorisering $PA = LU$, där P står för systematiska (stabila) radbyten vid Gausselimineringen. Ange explicit P, L och U. **(4p)**
b) Bestäm $rang(A)$, gärna med hjälp av resultatet i a)-uppgiften. **(2p)**
c) Bestäm en bas för nollrummet $N(A)$, gärna med hjälp av resultatet från a)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 3. Låt P_n var det linjära rummet av polynom p av grad $\leq n$, med bas $\{1, x, \ldots, x^n\}$. Betrakta avbildningarna F och G definierade genom
$(Fp)(x) = x^2 p(\frac{1}{x})$
$Gp = p'$ (derivering)
a) Visa att F är en linjär avbildning från P_2 till P_2. **(2p)**
b) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen GF från P_2 till P_1 (i angiven bas). **(5p)**
c) Är den sammansatta avbildningen GF inverterbar? Motivera! **(1p)**

Uppgift 4
a) Ange hur en singulärvärdesuppdelning (SVD) av en $m \times n$-matris A med rang $r < n < m$ ser ut. **(3p)**
b) Visa genom att betrakta diagonalisering av $A^T A$ att de singulära värdena till A är roten ur egenvärdena till $A^T A$. **(3p)**
c) Hur kan det största singulära värdet av A bestämmas med potensmetoden? Hur hänger den vektor, som potensmetoden itererar fram, ihop med SVD-faktorerna? **(3p)**

Uppgift 5. En kalkylator arbetar med sexsiffrig decimal aritmetik och korrekt avrundning. Kalkylatorn klarar även att ge sex korrekta siffror i värdena för enkla matematiska funktioner bland annat $\sqrt{x}$.
a) Vad blir på denna kalkylator $\sqrt{4318} - \sqrt{4317}$? Uppskatta absoluta och relativa felens gränser. **(2p)** Hjälpresultat: Följande korrekt avrundade värden gäller: $\sqrt{4318} = 65.7115$, $\sqrt{4317} = 65.7039$
b) Skriv om uttrycket i a)-uppgiften så att det kan beräknas med bättre noggrannhet och genomför uträkningen så som kalkylatorn skulle ha gjort det. Uppskatta absoluta och relativa felen samt ange svar med felgräns. **(4p)** Hjälpresultat: Följande korrekt avrundade värde gäller: $\frac{1}{131.415} = 0.00760948$

Uppgift 6
a) Gör två iterationer med Steepest Descent-metoden på problemet att minimera funktionen $f(x) = 5x_1^2 + x_1 x_2 + 0.5x_2^2 - x_1$. Starta i origo. **(4p)**
b) Hur många iterationer skulle det krävas med Newtons metod på problemet i a)-uppgiften om man startar i origo? Motivera! **(1p)**
c) Härled Gauss-Newtons metod för lösning av överbestämda icke-linjära ekvationssystem. **(4p)**

Uppgift 7
a) Skriv upp prediktor/korrektor-metoden:
(p) Euler framåt   (k) Trapetsmetoden
för ett begynnelsevärdesproblem för ett system av ordinära differentialekvationer. **(2p)**
b) Vilken explicit metod får man om man endast gör en fixpunktsiteration i korrektorn i a)-uppgiften? **(3p)**

Uppgift 8. Betrakta följande två-punkts randvärdesproblem med given funktion $f(x)$:
$y'' + 2y' - 3y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$
$y'(0) = 1, \; y'(1) = 2$
Formulera en numerisk metod att lösa problemet som bygger på centraldifferens av derivatorna. Skissa det linjära ekvationssystem som man ska lösa för att få fram approximationen. **(6p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 30 augusti 2002

1 a) Se LAT, sid 35.
b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad AA^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad Au = \begin{bmatrix} 3 \\ 4.5 \end{bmatrix}.$
Systemet $AA^T x = Au$ har lösning $x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ med $u'' = A^T x = (3/2,\ 1,\ 1/2,\ -1/2)$ och svaret $u' = u - u'' = (1/2,\ -3/4,\ -1/2,\ -1/2)$.

2 a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{P_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{elim}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{P_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$
$\overset{elim}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$
$P = P_2 \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$
b) $rang(A) = dim\ V(A) = 2$ ty 2 linjärt oberoende kolonner i U.
c) Lös $Ux = 0$: Ger parameterlösning $x = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dvs som bas kan vi ta $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3 a) $p = a + bx + cx^2 \in P_2, \quad Fp = ax^2 + bx + c \in P_2$
Avbildningens matris: $Fe_1 = e_3,\ Fe_2 = e_2,\ Fe_3 = e_1$ dvs $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
A är en (linjär) matris så avbildningen är linjär.
b) Avbildningen G's matris: $Ge_1 = 0,\ Ge_2 = e_1,\ Ge_3 = 2e_2$, dvs $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Sammansatta avbildningens matris $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
c) BA ej inverterbar matris alltså är avbildningen inte inverterbar.

4 a) $A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$, där U och V är ortogonala $m \times m$ resp $n \times n$ matriser. U_1 och V_1 har lika många kolonner som rangen r av A. Σ_r är en diagonalmatris med de positiva singulära värdena $\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad ..., \quad \sigma_r$ i diagonalen.
b) $A^T A = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T$, diagonalisering med egenvärdena till $A^T A$ i $\Sigma^T \Sigma$, dvs egenvärdena till $A^T A$ är $\sigma_i^2, \ i = 1, \ 2, \ ..., \ n$.
c) Potensmetoden på $A^T A$ ger σ_1^2, där σ_1 är största singulära värde. Vektorn blir motsvarande kolonn i V, dvs den första.

5 a) $y = \sqrt{4318} - \sqrt{4317} = 65.7115 - 65.7039 = 0.0076 \pm 10^{-4}$ med relativt fel $10^{-4}/0.0076 < 1.3 \cdot 10^{-2}$.
b) Förläng med konjugatkvantiteten: $y = \frac{(\sqrt{4318}-\sqrt{4317})(\sqrt{4318}+\sqrt{4317})}{\sqrt{4318}+\sqrt{4317}} = \frac{1}{\sqrt{4318}+\sqrt{4317}} = \frac{1}{131.413} = 0.00760948$.
Relativ felgräns $\approx 0.6 \cdot 10^{-3}/131 \leq 4.6 \cdot 10^{-6}$
Absolut felgräns $\approx 0.0076 \cdot 4.6 \cdot 10^{-6} \leq 3.5 \cdot 10^{-8}$
Svaret kan anges: $y = 0.00760948 \pm 4 \cdot 10^{-8}$

6 a) $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}, \quad \alpha_k$ är steglängd och $d^{(k)}$ är sökriktning.
SD: $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$. Kvadratisk funktion: Steglängd enligt sluten formel.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 10x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_0 = -\frac{\nabla f^{(0)} \cdot d^{(0)}}{d^{(0)} \cdot H d^{(0)}} = 0.1$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}.$$

$$\alpha_1 = -\frac{\nabla f^{(1)} \cdot d^{(1)}}{d^{(1)} \cdot H d^{(1)}} = -\frac{-0.1}{0.1} = 1, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}.$$

b) Kvadratisk funktion gör att det blir endast en iteration oavsett startpunkt med Newtons metod.
c) $f(x) = 0, \quad f : R^n \rightarrow R^m, \quad m > n$.
Minstakvadratlösning: $min_x \parallel f(x) \parallel_2$.
Stegvis linjärisering enligt Taylor: $f(x) \approx f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)})$
Approximation: $min_x \parallel f(x) \parallel_2 \approx min_x \parallel f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \parallel_2$
Detta är nu ett linjärt minstakvadratproblem. Ta $x^{(k+1)}$ som lösning till detta problem och iterera vidare, så har vi Gauss-Newtons metod.

7 a) $(p): \ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad (k): \ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]$
b) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))\right]$

8 Diskretisering i punkterna $x_0 = 0, \ x_1 = x_0 + h, \ x_2 = x_1 + h, \ ..., \ x_n = x_{n-1} + h = 1$ och $y_i \approx y(x_i), \ i = 0, \ 1, \ ,..., \ n$.
Låt vidare $f_i = f(x_i), \ i = 1, \ 2, \ ..., \ n$ och inför hjälppunkterna $x_{-1} = -h$ och $x_{n+1} = 1+h$.
Centraldifferenser: $y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, \ 2, \ ..., \ n-1, \quad y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = 0, \ 1, \ ..., \ n$
Diskretiseringen ger följande linjära ekvationssystem för de obekanta $y_{-1}, \ ..., \ y_{n+1}$:

$$\begin{bmatrix} -h & 0 & h & & & \\ 1-2h & -3h^2-2 & 1+2h & & & \\ & .. & .. & .. & & \\ & & .. & .. & .. & \\ & & & 1-2h & -3h^2-2 & 1+2h \\ & & & -h & 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ .. \\ .. \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} 1 \\ f_0 \\ .. \\ .. \\ f_n \\ 2 \end{bmatrix}.$$