Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2002-05-31

DAG: Fredag 31 maj 2002 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 17 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1
Låt A vara en $m \times n$-matris.
a) Visa dimensionssatsen: $dimN(A) + dimV(A) = n$. **(6p)**
Anta nu att $m \geq n$ och att A har full rang.
b) Ange matrisen för spegling i $V(A)$, värderummet till A. **(2p)**
c) Ange matrisen för spegling i $N(A)$, nollrummet till A. **(2p)**
d) Matriserna i b) och c) är ortogonala. Visa det för matrisen i b). **(2p)**

Uppgift 2
Låt $V = Span\{x,\ sin^2x,\ cos^2x\}$ vara underrum i $C(R)$, rummet av kontinuerliga funktioner på R, med de angivna elementen som standardbas. Visa att även $\{1,\ x,\ sin^2x\}$ är bas och bestäm koordinaterna i denna bas för den vektor som i standardbasen har koordinaterna $[2,\ 4,\ 1]$. **(5p)**

Uppgift 3
Undersök för vilka värden på $\alpha \geq 0$ som matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. **(6p)**

Uppgift 4

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm en full QR-faktorisering av A. **(5p)**
b) Bestäm de singulära värdena till A. **(3p)**

Uppgift 5

Bestäm den kvadratiska spline s, med nod i punkten $\pi/2$, som interpolerar $f(x) = cos(x)$ i punkterna $0,\ \pi/2$ och π och som uppfyller villkoret $s'(0) = f'(0)$. **(5p)**

Uppgift 6

Betrakta ekvationssystemet $Ax = b$ med $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi önskar lösa systemet med fixpunktsiteration. Ekvationssystemet formuleras om genom att x_1 löses ut ur första ekvationen, x_2 löses ut ur andra ekvationen och x_3 löses ut ur tredje ekvationen. Då blir systemet på form $x = Bx + c$, för en matris B och vektor c, och fixpunktsiterationen utförs sedan på vanligt sätt. Visa att fixpunktsiterationen konvergerar och gör två iterationer med start i origo. **(5p)**

Uppgift 7

En modell på formen $\Psi(t) = \alpha\ sin(\beta t)$ ska genom val av parametrarna α och β anpassas till en mätserie $(t_i,\ \Psi_i),\ i = 1,\ ...,\ m$. Formulera motsvarande icke-linjära minsta-kvadrat problem. Ange residual, Jacobian och teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(6p)**

Uppgift 8

Betrakta ett system av första ordningens differentialekvationer:
(*) $y' = f(t,\ y),\quad y(t_0) = c_0$.
a) Härled trapetsmetoden för lösning av systemet genom att använda lämplig approximation av integralformuleringen av problemet. **(3p)**
b) Bestäm approximationsordningen för trapetsmetoden. **(2p)**
c) Bestäm stabilitetsområdet för trapetsmetoden. **(2p)**
d) Betrakta följande två-punkts randvärdesproblem med given funktion $f(x)$:
$y'' + 2y' - 3y = f(x),\quad 0 \le x \le 1$
$y'(0) = 1,\ y'(1) = 2$
Överför med inskjutningsteknik problemet på formen (*) och formulera en lämplig iterativ metod för att lösa den ekvation som uppkommer. **(6p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 31 maj 2002

1 a) Se LAT, sid 17.
b) $P_1 = 2A(A^TA)^{-1}A^T - I$, ("dubbla" projektionen).
c) $P_2 = -I$, ($N(A) = O$, spegling i origo).
d) $P_1^T P_1 = (2A(A^TA)^{-1}A^T - I)^2 = 4A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T + I - 4A(A^TA)^{-1}A^T = I$

2 $1 = sin^2x + cos^2x$, Överföringsmatris $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. T är reguljär så nya basen är okey. Ekvationssystem $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger svaret $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3 Egenvärden: $\lambda_1 = 3$ och egenvärdena till delmatrisen $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$, dvs $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2\alpha}$. Olika egenvärden om $\alpha \neq 0$ och $\alpha \neq 0.5$ Då diagonaliserbar.
Undersök $\alpha = 0$ som ger $\lambda_{2,3} = 2$. Homogena systemet $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger parameterlösningen $v_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, som tillsammans med egenvektorn $v_1 = s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ till egenvärdet $\lambda_1 = 3$ inte spänner hela R^3, alltså är matrisen inte diagonaliserbar då $\alpha = 0$.
Undersök $\alpha = 0.5$ som ger $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Homogent system $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger parameterlösningen $v_3 = \begin{bmatrix} s/2 \\ s \\ t \end{bmatrix}$. Vidare ger på motsvarande sätt $\lambda_2 = 1$ en parameterlösning $v_2 = \begin{bmatrix} -u/2 \\ u \\ 0 \end{bmatrix}$. Tillsammans spänner dessa R^3 och matrisen är därför diagonaliserbar. Slutsatsen blir att matrisen är diagonaliserbar för alla $\alpha \neq 0$.

4 a) Gram-Schmidt: $q_1,\ q_2$ okey som första kolonnerna i A ty ortogonala.

$$q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 - \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}.$$

Normering ger $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ och $R = Q^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ har egenvärden 1 och 5. Singulära värdena till A är då $\sqrt{1} = 1$ och $\sqrt{5}$.

5 $s = \begin{cases} s_1, & 0 \le x \le \pi/2 \\ s_2, & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$ och ansätt $s_1 = 1 + ax + bx^2$ och $s_2 = c(x - \pi/2) + d(x - \pi/2)^2$.
Villkoren $s_1(0) = cos(0) = 1$ och $s_2(\pi/2) = cos(\pi/2) = 0$ har då redan utnyttjats vid ansatsen.
Vi har $s_1' = a + 2bx$ och ändpunktsvillkoret $s_1'(0) = f'(0) = 0$ ger $a = 0$ och interpolationsvillkoret $s_1(\pi/2) = cos(\pi/2) = 0$ ger $1 + b\frac{\pi^2}{4} = 0$ dvs $b = -\frac{4}{\pi^2}$.
Vidare blir $s_2' = c + 2d(x - \pi/2$ och splinevillkoret $s_2'(\pi/2) = s_1'(\pi/2) = -\frac{4}{\pi}$ ger $c = -\frac{4}{\pi}$.
Interpolationsvillkoret $s_2(\pi) = cos(\pi) = -1$ ger $-2 + \frac{\pi^2}{4}d = -1$ dvs $d = \frac{4}{\pi^2}$.
Splinen blir alltså $s = \begin{cases} 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2, & 0 \le x \le \pi/2 \\ -\frac{4}{\pi}(x - \pi/2) + \frac{4}{\pi^2}(x - \pi/2)^2, & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$

6 Det omskrivna systemet blir $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(1 + x_2) \\ x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{4}(2 + x_2) \end{cases}$ med Jacobian av högersidan

$J = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ med $\parallel J \parallel_\infty = 1/2$.

Eftersom Jacobianens norm är mindre än 1 så har vi konvergens. Två iterationer ger

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix},\ x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

7 Problemet formuleras: $min_{\alpha,\beta} \parallel f \parallel_2$ där $f_i = \alpha\ sin(\beta\ t_i) - \Psi_i$ är residualerna.

Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} sin(\beta\ t_1) & \alpha\ t_1\ cos(\beta\ t_1) \\ .. & .. \\ .. & .. \\ sin(\beta\ t_m) & \alpha\ t_m\ cos(\beta\ t_m) \end{bmatrix}$

Gauss-Newtons metod: $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$

8 a) $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y' \, dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y) \, dt, \quad t_{k+1} = t_k + h$
Trapetsregeln ger: $y(t_{k+1}) - y(t_k) \approx \frac{h}{2}\,[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$
och så metoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\,[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$.

b) Tillämpad på testproblemet $y' = \lambda y$ blir metoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\,[\lambda y_k + \lambda y_{k+1}]$
Om vi löser ut y_{k+1} får vi: $y_{k+1} = (\frac{1+h\lambda/2}{1-h\lambda/2})y_k$
och tillväxtfaktorn utvecklad blir $(1+h\lambda/2)(1+h\lambda/2+(h\lambda/2)^2+(h\lambda/2)^3+...) = 1+h\lambda+(h\lambda)^2/2+(h\lambda)^3/4+....$
Detta stämmer med tre termer i utvecklingen av $e^{h\lambda} = 1+h\lambda+(h\lambda)^2/2+(h\lambda)^3/6+....$
Alltså har metoden ordning 2.

c) Stabilitetsområde: $\{z \in C; |\ \frac{1+z/2}{1-z/2}\ | \leq 1\}$, där $z = h\lambda$. Med $z/2 = a + ib$ får vi $(1+a)^2 + b^2 \leq (1-a)^2 + b^2$ dvs $a \leq 0$ eller $Re(z) \leq 0$.

d) Sätt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$. Då system: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f - 2y_2 + 3y_1 \\ y_2(0) = 1 \\ y_2(1) = 2 \end{cases}$

Inskjutning: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f - 2y_2 + 3y_1 \\ y_1(0) = s \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$. Beteckna lösningen $y(x,s)$.
Ekvationen är då: $y_2(1,s) - 2 = 0$.
Kan lösas med sekantmetoden: $s^{(k+1)} = s^{(k)} - \frac{(y_2(1,s^{(k)})-2)(s^{(k)}-s^{(k-1)})}{y_2(1,s^{(k)})-y_2(1,s^{(k-1)})}, \ k = 1,\ 2,\ ...$