Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2002-01-14

DAG: Måndag 14 januari 2002 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 28 januari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1
a) Visa spektralsatsen: Låt F vara en symmetrisk linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt reellt linjärt rum V. Då finns det en ON-bas för V bestående av egenvektorer till F. **(7p)**
b) Den reella symmetriska 3×3 - matrisen A har egenvärdena 2, 5 och 7. Dessutom gäller att $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ange en egenvektor till egenvärdet 7. **(3p)**

Uppgift 2
a) Låt $u \in V$, ett linjärt rum med skalärprodukt och låt $\{e_i\}_{i=1}^k$ vara ON-bas för ett underrum U till V. Visa att $\sum_{i=1}^k < u, e_i >^2 \quad \leq \quad \| u \|^2$. **(3p)**
b) Betrakta det linjära rummet $C[-\pi, \pi]$ med skalärprodukt $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt$ samt funktionen $f(t) = t, \ -\pi \leq t \leq \pi$. Bestäm bästa approximationen till f i underrummet Span $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} sin(t), \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(t)\}$. **(4p)**

Uppgift 3

Betrakta den reella matrisen $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & q \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm p och q så att $dim\ V(A) = dim N(A)$ och ange baser för rummen $V(A)$ och $N(A)$ samt för ortogonala komplementen till dessa rum, för dessa värden på p och q. **(6p)**

Uppgift 4

Låt A vara en $n \times 1$-matris (bara en kolonn).

a) Ange explicit den kompakta QR-faktoriseringen av A. **(2p)**

b) Ange minstakvadratlösningen till det överbestämda ekvationssystemet $Ax = b$, där b är en n-vektor. **(2p)**

c) Bestäm explicit den kompakta SVD-faktoriseringen av A. **(2p)**

d) Bestäm explicit den kompakta SVD-faktoriseringen av A^T. **(2p)**

Uppgift 5

En funktion är given genom tabellen

x	0	1	2	3	4
f	-1.2	0.3	1.2	2.4	3.0

Beräkna en approximation till $\int_0^4 f(x)\ dx$ genom att använda trapetsformeln och ett stegs Richardsonextrapolation. Gör feluppskattning. Tabellvärdena antas vara korrekt avrundade. **(6p)**

Uppgift 6

a) Definiera vad som menas med fixpunktsiteration vid ekvationslösning och skriv upp ett villkor för konvergens för fallet en variabel. **(3p)**

b) Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} x_1^3 + 3x_2 - 4 = 0 \\ x_2^2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3^3 + 2 = 0 \end{cases}$

Gör en iteration med Newtons metod och start i origo. **(4p)**

Uppgift 7

Du ska anpassa parametrarna a och b i modellen $y(t) = \frac{1}{ae^{-bt}}$ till mätningar $(t_i,\ y_i),\ i = 1,\ ...,\ m$ med $m > 2$.

a) Formulera om modellen så att linjär minsta kvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas. **(4p)**.

b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(4p)**

Uppgift 8

Rörelseekvationen för en vertikalt upphängd kedja av längd 1, som sätts i rörelse med ett distinkt slag med hastighet 1 m/sek på mitten, kan modelleras av differentialekvationen

$$\begin{cases} x\, y''_{xx} + y'_x = g^{-1}\, y''_{tt},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ y(x,0) = 0 \\ y'_t(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0.5 \\ 0, & x \neq 0.5 \end{cases} \\ y(0,t) = 0 \\ y(1,t) = 0 \end{cases}$$

där g är gravitationen. Vi vill lösa problemet med linjemetoden. Sätt upp det system av första ordningens ordinära differentialekvationer som ska lösas. Använd centraldifferens vid rumsdiskretiseringen. **(8p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 14 januari 2002

1 a) Se LAT, sid 66.
b) Egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala. $[1 \;\; 1 \;\; 0]^T$ är egenvektor till $\lambda = 2$ och $[1 \;\; -1 \;\; 0]^T$ är egenvektor till $\lambda = 5$. Egenvektor till $\lambda = 7$ är då $[1 \;\; 1 \;\; 0]^T \times [1 \;\; -1 \;\; 0]^T = [0 \;\; 0 \;\; -2]^T$.

2 a) Bästa approximation till u i U är $\hat{u} = \sum_{i=1}^{k} < u, e_i > e_i$, med $u - \hat{u}$ ortogonal mot $\hat{u}$. Pythogoras sats ger $\| \hat{u} \| \leq \| u \| \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} < u, e_i >^2 \leq \| u \|^2$.
b) De angivna funktionerna $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} sin(t)$ och $e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(t)$ är ON-bas ty $\int_{-\pi}^{\pi} e_i^2 \; dt = 1, \;\; i = 1, \; 2, \; 3$ och $\int_{-\pi}^{\pi} e_i e_j \; dt = 0, \;\; i \neq j$. Bästa approximation blir då $\sum_{i=1}^{3} < f, e_i > e_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; t \; dt + \frac{sin(t)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \; t \; sin(t) \; dt + \frac{cos(t)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \; t \; cos(t) \; dt = 0 + 2sin(t) + 0 = 2sin(t)$.

3 $dim \; V(A) + dim \; N(A) = 2 \Rightarrow dim \; V(A) = dim \; N(A) = 1$. Kolonnerna ska alltså vara parallella dvs $p = 2, \; q = 2$. $V(A) = Span([2 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1]^T)$, dvs $[2 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1]^T$ är bas för $V(A)$. Vidare är $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ dvs $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in N(A)$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är bas för $N(A)$. $N(A)^{\perp}$ spänns av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, som alltså är bas för $N(A)^{\perp}$. Slutligen fås $V(A)^{\perp} = N(A^T)$ ur homogena systemet $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ med lösning $x = [\frac{1}{2}(-u - 2s - t) \;\; u \;\; s \;\; t]^T$, dvs $[-\frac{1}{2} \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^T$, $[-\frac{1}{2} \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T$ och $[-1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]^T$ är bas för $V(A)^{\perp}$.

4 a) $A = Q_1 R, \;\; Q_1 = A / \| A \|_2$ har norm $= 1 \Rightarrow \;\; R = \| A \|_2$
b) $Rx = Q_1^T b \Rightarrow x = Q_1^T b / \| A \|_2 = A^T b / \| A \|_2^2$
c) $A = U_1 \Sigma_1 V_1^T, \;\; U_1 = A / \| A \|_2$ har norm $= 1 \Rightarrow \Sigma_1 = \| A \|_2, \;\; V_1 = 1$ har norm $= 1$.
d) $A^T = V_1 \Sigma_1 U_1^T$, dvs $A^T = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ med $U_1 = 1, \;\; \Sigma_1 = \| A \|_2, \;\; V_1 = A / \| A \|_2$

5 $T(4) = 4(-1.2/2 + 3.0/2) = 3.6, \;\; T(2) = 2(-1.2/2 + 1.2 + 3.0/2) = 4.2$
$T(1) = 1(-1.2/2 + 0.3 + 1.2 + 2.4 + 3.0/2) = 4.8$
$R(2) = 4.2 + \frac{4.2 - 3.6}{3} = 4,4, \;\; R(1) = 4.8 + \frac{4.8 - 4.2}{3} = 5$
$| R_T | \leq | R(1) - R(2) | = 0.6, \;\;\; | R_f | \leq 4 \cdot 0.05 = 0.2$. Svar: $\int_0^4 f(x) \; dx \approx 5 \pm 0.8$

6 a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$. Fixpunktsiteration: $x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),\quad k = 0,\ 1,\ ...$
Konvergens om $\mid g'(x) \mid < 1$ i en omgivning av lösningen och om man startar i den omgivningen.

b) $f = \begin{bmatrix} x_1^3 + 3x_2 - 4 \\ x_2^2 - 2x_3 \\ x_1 - x_3^3 + 2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 3 & 0 \\ 0 & 2x_2 & -2 \\ 1 & 0 & -3x_3^2 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x^{(1)} = x^{(0)} - d^{(0)}$, där $J(x^{(0)})d^{(0)} = f(x^{(0)})$. Ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} d^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow d^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4/3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7 a) Invertera: $\frac{1}{y} = ae^{-bt}$. Logaritmera : $ln\ \frac{1}{y} = ln\ a - b\ t$ eller $ln\ a - b\ t = -ln\ y$.

Linjärt ekvationssystem $\begin{bmatrix} 1 & -t_1 \\ ... & ... \\ ... & ... \\ 1 & -t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ln\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ln\ y_1 \\ ... \\ ... \\ -ln\ y_m \end{bmatrix}$ ger $ln\ a$ och b och sedan $a = e^{ln\ a}$.

b) Residualer $f_i = \frac{1}{ae^{-bt_i}} - y_i$, Jacobian: $J = \begin{bmatrix} -\frac{e^{bt_1}}{a^2} & \frac{t_1 e^{bt_1}}{a} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ -\frac{e^{bt_m}}{a^2} & \frac{t_m e^{bt_m}}{a} \end{bmatrix}$

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{(l)} - J(a^{(l)}, b^{(l)})^{-1} f(a^{(l)}, b^{(l)})$.

8 Linjemetoden: $y''_{tt} = g(x\ y''_{xx} + y'_x)$. Låt $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ ... \\ ... \\ y_n \end{bmatrix}$, och $W = Y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ ... \\ ... \\ y'_n \end{bmatrix}$, där $y_i(t)$ är linjefunktioner motsvarande en diskretisering i rummet (x-led).

Vi får då följande system av första ordning: $\begin{cases} Y' = W \quad , \ Y(0) = 0 \\ W' = AY \quad , \ W(0) = \begin{bmatrix} f_1 \\ ... \\ ... \\ f_n \end{bmatrix} \end{cases}$

Matrisen A kommer från rumsdiskretiseringen som vi gör med centraldifferens och steglängd h. Vi får se till att diskretiseringen görs så att $x_i = 0.5$ för något i. För detta i-värde tar vi då $f_i = 1$ och alla övriga $f_j = 0, \quad j \neq i$ (distinkt slag).

Centraldifferensmatrisen blir $A = \frac{g}{h^2} \begin{bmatrix} -2x_1 & x_1 + \frac{h}{2} & 0 & 0 & 0 \\ x_2 - \frac{h}{2} & -2x_2 & x_2 + \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & x_{n-1} - \frac{h}{2} & -2x_{n-1} & x_{n-1} + \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & x_n - \frac{h}{2} & -2x_n \end{bmatrix}$