Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2001-08-31

DAG: Fredag 31 augusti 2001 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1
Visa att för en reell symmetrisk matris A med minsta egenvärde λ_{min} och största egenvärde λ_{max} gäller att

$$\lambda_{min} \parallel x \parallel^2 \leq x^T Ax \leq \lambda_{max} \parallel x \parallel^2$$

för alla x. Visa också att likhet gäller (förutom för $x = 0$) då och endast då x är egenvektor hörande till λ_{min} respektive λ_{max}. **(7p)**

Uppgift 2
a) Vid produktionen i en viss fabrik finns begränsningen att förhållandet mellan tre ingående ämnen x, y och z måste uppfylla villkoret $x-y+2z = 0$. Det blir alltså fråga om att välja bästa approximation i detta plan. För att hjälpa företaget att automatisera produktionen ska Du ta fram (standard-)matrisen för den ortogonala projektionen $P : R^3 \to R^3$ på planet $x - y + 2z = 0$. **(4p)**
b) Bestäm alla egenvärden och en bas av egenvektorer till projektionen i a)-uppgiften. **(4p)**

Uppgift 3
Betrakta avbildningen $F : C(R) \to C(R)$ definierad av $F(f) = \int g(x)f(x)\ dx$, där $g \in C(R)$ och integrationskonstanten tas lika med noll.
a) Visa att F är en linjär avbildning. **(2p)**
b) Låt $g(x) = x$ och betrakta avbildningen F på mängden av polynom av grad högst n, dvs $F : P_n \to P_{n+2}$. Bestäm matrisen för F i lämpliga baser för P_n och P_{n+2}. **(5p)**.

Uppgift 4
a) Visa genom att använda Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess att man kan faktorisera en $m\ x\ n$-matris A, där $m \geq n$, i en produkt $A = QR$, där Q har ortonormala kolonner och R är uppåt triangulär. **(4p)**
b) Bestäm den kompakta QR-faktoriseringen enligt a)-uppgiften då $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. **(2p)**
c) Bestäm kompakt SVD-faktoriseringen av matrisen i b)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 5
a) Definiera vad som menas med konvergensordning för en numerisk metod för ekvationslösning i en variabel. **(2p)**
b) Vilken konvergensordning har Newtons metod vid enkelrot resp vid multipelrot av multiplicitet m? Vad blir den asymptotiska felkonstanten i det senare fallet? **(2p)**
c) Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} x_1^2 + 2x_2 - 3 = 0 \\ x_2^3 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$
Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**

Uppgift 6
Du ska anpassa parametrarna a och b i modellen $y(t) = 1/(a + be^{-t})$ till mätningar $(t_i,\ y_i),\ i = 1,\ ...,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att linjär minsta kvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas. **(4p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(4p)**

Uppgift 7
a) Formulera linjesökningsproblemet vid minimering av en funktion av flera variabler utan bivillkor. **(3p)**
b) Ange två lämpliga metoder för att lösa linjesökningsproblemet. **(2p)**

Uppgift 8
Heuns metod för begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer definieras av:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k,\ y_k) + f(t_k + h,\ y_k + hf(t_k,\ y_k))\}$
a) Klassificera metoden - är den enstegs eller flerstegs, är den explicit eller implicit, är den en Runge-Kutta-metod? **(3p)**
b) Visa att stabilitetsområdet för Heuns metod är $\{z \in C; |\ 1 + z + \frac{z^2}{2}\ | \leq 1\}$. **(6p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 31 augusti 2001

1 Se LAT, sid 77.

2 a) $A = [1\ \ -1\ 2],\quad P = I - A^T(AA^T)^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) Normalen projiceras till origo: $\lambda_1 = 0$
Allt i planet är oförändrat av projektionen: $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
Egenvektorer är normalen= $[1\quad -1\quad 2]^T$ samt två linjärt oberoende vektorer i planet, exempelvis $[1\ \ 1\ \ 0]^T$ och $[2\ \ 0\ \ -1]^T$

3 a) $F(f+h) = \int g(x)[f(x)+h(x)]\ dx = \int g(x)f(x)\ dx + \int g(x)h(x)\ dx = F(f) + F(h)$
$F(\alpha f) = \int g(x)\alpha f(x)\ dx = \alpha \int g(x)f(x)\ dx = \alpha F(f)$. Alltså linjär.
b) Bas för P_n: $e_i = x^{i-1},\ i = 1,\ \ldots\ ,\ n+1$. Bas för P_{n+2}: $e'_i = x^{i-1},\ i = 1,\ \ldots\ ,\ n+3$.
$F(e_i) = \int x x^{i-1}\ dx = \int x^i\ dx = \frac{1}{i+1}x^{i+1} = \frac{1}{i+1}e'_{i+2},\ i = 1,\ \ldots\ ,\ n+1$.

Matrisen blir $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1/(n+2) \end{bmatrix}$

4 a) Gramm-Schmidt på kolonnerna i $A = [A_1\ A_2\ \ldots\ A_n]$ ger $\tilde{Q} = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_n]$. Kan utökas till Q, $m \times m$ ortogonal matris. Gramm-Schmidt beräknar skalärprodukter $r_{ij} = \langle Q_i, A_j \rangle$ och om vi låter R vara matris med element r_{ij} så gäller $Q^T A = R$ eller $A = QR$, där $r_{ij} = 0,\ i > j$, ty $\langle Q_i, A_j \rangle = 0,\ i > j$ enligt Gramm-Schmidt.

b) $A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, som är ortogonal. Normalisera $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 1/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \end{bmatrix}$ och R är då $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

c) Eftersom R i b)-uppgiften är diagonal så duger den som Σ i SVD och som V kan vi ta enhetsmatrisen, dvs $A = U\Sigma V^T = QRI$.

5 a) Konvergensordning är största q i $\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)}-x^*|}{|x^{(k)}-x^*|^q} = C < \infty$
b) Kvadratisk resp. linjär med $C = \frac{m-1}{m}$.
c) $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_2 - 3 \\ x_2^3 - x_3 \\ 2x_1 - x_3^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad J(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2 & 0 \\ 0 & 3x_2^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2x_3 \end{bmatrix}$
$x^{(0)} = [0 \ \ 0 \ \ 0]^T, \quad x^{(1)} = x^{(0)} - J(x^{(0)})^{-1} f(x^{(0)})$ Ekvationssystemet $J(x^{(0)})d^{(0)} = f(x^{(0)})$ blir $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} d^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ med lösning $d^{(0)} = [-0.5 \quad -1.5 \ \ 0]^T$ och därmed
$x^{(1)} = x^{(0)} - d^{(0)} = [0.5 \ \ 1.5 \ \ 0]^T$

6 a) $y(t) = 1/(a + be^{-t})$. Invertera $1/y(t) = a + be^{-t}$.
Ekvationssystem $\begin{bmatrix} 1 & e^{-t_1} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ 1 & e^{-t_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/y_1 \\ ... \\ ... \\ 1/y_m \end{bmatrix}$.
b) Residualer $f_i = \frac{1}{a+be^{-t_i}} - y_i$, Jacobian $J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(a+be^{-t_1})^2} & -\frac{e^{-t_1}}{(a+be^{-t_1})^2} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ -\frac{1}{(a+be^{-t_m})^2} & -\frac{e^{-t_m}}{(a+be^{-t_m})^2} \end{bmatrix}$.
Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{(l)} - J(a^{(l)}, b^{(l)})^{-1} f(a^{(l)}, b^{(l)})$.

7 a) Sökmetod: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$ för att minimera $f(x)$.
Linjesökning: $\min_\alpha f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$
b) Gyllene snittet, polynomapproximation, Newtons metod med varianter.

8 a) Enstegs, explicit och Runge-Kutta-metod.
b) Testproblem för stabilitet: $y' = \lambda y$, dvs $f = \lambda y$.
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k = \lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k + h\lambda y_k + \frac{(h\lambda)^2}{2} y_k = [1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}]y_k$. Begränsade lösningar för $z = h\lambda$ i stabilitetsområdet: $\{z \in C; |\ 1 + z + \frac{z^2}{2}\ | \leq 1\}$.