Institutionen för Matematik Göteborg

LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1

2001-01-09

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671

OBS! NYA KURSEN

DAG: Tisdag 9 januari 2001 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig: Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)

Förfrågningar: Ivar Gustafsson, ankn. 1094

Lösningar: Anslås på institutionen efter tentamen

Resultat: Anslås på institutionen senast 29 januari

Betygsgränser: 30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.

Hjälpmedel: Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL !

Uppgift 1

a) Visa Cauchy-Schwartz' olikhet, dvs

$$|\langle u, v\rangle| \le \| u \| \, \| v \| \quad \text{för alla } u, v \in V$$

där V är ett reellt linjärt rum med skalärprodukt. Ange speciellt när likhet inträffar. (**7p**)

b) Visa att $\|xy^t\|_2 = \|x\|_2 \|y\|_2$ för $x \in R^n$, $y \in R^n$.

Ledning: Definition av matrisnorm samt Cauchy-Schwartz olikhet. (**5p**)

Uppgift 2

a) Undersök om matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. (**4p**)

b) Ta fram en startvektor sådan att potensmetoden **inte** fungerar på matrisen A. (**2p**)

Uppgift 3

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Bestäm $rang(A)$ (**2p**)

b) Ange en bas för $N(A)$. (**2p**)

c) Ta fram en faktorisering $PA = LU$, där P står för systematiska (stabila) radbyten vid Gausselimineringen. (**4p**)

Uppgift 4
Låt $P : R^3 \to R^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $x + 2y + 3z = 0$.

a) Bestäm standardmatrisen för P. (**4p**)

b) Bestäm genom geometriskt betraktande egenvärdena till P. (**2p**)

c) Är avbildningen inverterbar? (**1p**)

d) Bestäm en bas av egenvektorer till P. (**2p**)

Uppgift 5
Vi önskar bestämma den linjära spline med nod i $x = 2$ som i minsta-kvadrat-mening bäst anpassar till punkterna $(0, 0), (1, 2), (3, 1)$ och $(4, 0)$ i planet. Sätt upp det överbestämda ekvationssystem som ska lösas för att bestämma splinen. Ekvationssystemet behöver **inte** lösas. (**5p**)

Uppgift 6
a) Betrakta approximationen $e^x \approx 1 + x$ för x nära noll. Ange framåt och bakåt-felen då $x = 0.1$. (**2p**)

b) Betrakta algoritmen att beräkna $1 + x$ i ett flyttalssystem med IEEE-standard. Genomför bakåtanalys av algoritmen. Ta hänsyn till att x måste lagras avrundat, talet 1 däremot lagras exakt. Ange, med tydlig motivering, om algoritmen är stabil eller inte. (**3p**)

Uppgift 7
En modell på formen $\psi(t) = \alpha e^{-\beta t} + \gamma$ ska genom val av parametrarna α, β och γ anpassas till en mätserie (t_i, ψ_i), $i = 1, 2 \cdots, m$, där $m > 3$. Formulera motsvarande icke-linjära minsta-kvadrat problem. Ange residual, Jacobian och teckna en iteration i Gauss-Newtons metod. (**6p**)

Uppgift 8
Betrakta ode-problem $y' = f(t, y), y(t_0) = c_0$.

a) Härled Eulers framåtmetod för problemet genom att använda lämplig approximation av derivatan. (**2p**)

b) Härled trapetsmetoden för problemet genom att använda lämplig approximation av integralformuleringen av problemet. (**2p**)

c) Betrakta problemet $y' = -Ay, y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $0 \le t \le 5$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Är Eulers framåtmetod resp trapetsmetoden stabila för steglängen $h = 0.1$? (**3p**)

d) Räkna fram en approximation till $y(0.1)$ med Eulers framåtmetod och steg $h = 0.1$ för problemet i c-uppgiften. (**2p**)

Matematik
Chalmers
Ivar Gustafsson

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671

Lösningar till tentamen 9 januari 2001

1. a) Se LAT sid 31.

   b) $\| xy^t \|_2 =$ (def)

$$\max_{\| z \|_2 \neq 0} \frac{\| xy^t z \|_2}{\| z \|_2} = \max_{\| z \|_2 \neq 0} \frac{| y^t z | \| x \|_2}{\| z \|_2}$$

   $\leq$ (C-S)

$$\frac{\| y \|_2 \| z \|_2 \| x \|_2}{\| z \|_2} = \| y \|_2 \| x \|_2 \,.$$

   Om z och y linjärt beroende så likhet i C-S (v.s.v.)

2. a) Egenvärden är $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 1$. Egenvektor till $\lambda_3 = 1$ är $(0,0,1)^t$. Egenvektorer till $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ fås från homogent system med matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Från lösningen kan vi plocka fram basen $(1,0,0)^t$, $(0,0,1)^t$ för egenvektorsrummet. Vi kan alltså inte spänna hela R^3 med egenvektorer. A är inte diagonaliserbar.

   b) $x_0 = (0,0,1)^t$ fungerar inte, det ger $Ax_0 = x_0$ hela tiden och x_0 är inte rätt egenvektor.

3. c) Gausselimination med radbyten ger successivt matriserna:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Vi gör alltså radbyten i båda stegen och permutationsmatrisen blir $P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vidare samlar vi ihop multiplikatorerna till $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

a) Rangen för A är antal linjärt oberoende kolonner i U, dvs 2.

b) Bas för $N(A)$ kan fås genom att lösa homogent system $Ux = 0$ och ur lösningen tar vi fram basen $(-2, 1, 1)^t$

4. a) Vi ska projicera standardbasens element e_i på $N(A)$ där $A = [1\ 2\ 3]$. Projektionen på $V(A^t)$ tas med normalekvationerna. För $e_1 = (1, 0, 0)^t$ får vi systemet $AA^t x = Ae_1$ med lösning $x = \frac{1}{14}$ och projektionen $A^t x = \frac{1}{14}(1, 2, 3)^t$. Projektionen av e_1 på $N(A)$ blir sedan $Pe_1 = e_1 - A^t x = \frac{1}{14}(13, -2, -3)^t$. På samma sätt får vi $Pe_2 = \frac{1}{14}(-2, 10, -6)^t$ och $Pe_3 = \frac{1}{14}(-3, -6, 5)^t$. Standardmatrisen för P blir alltså $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

b) Normalen projiceras på nollvektorn dvs $\lambda_1 = 0$.

Allt i planet blir oförändrat vid projektionen dvs $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

c) Nej, ty ett egenvärde är noll.

d) Egenvektor $(1, 2, 3)^t$ är normalen och hör alltså till egenvärde $\lambda_1 = 0$. Två linjärt oberoende egenvektorer i planet duger för $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Vi kan exempelvis ta $(2, -1, 0)^t$ och $(3, 0, -1)^t$.

5. Ansätt splinen som $s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a + bx, & 0 \le x \le 2 \\ s_2(x) = c + dx, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$.

Splinevillkoret $s_1(2) = s_2(2)$ ger ekvationen $a = c + 2d - 2b$.

Anpassning till punkterna, dvs $s(0) \approx 0,\ s(2) \approx 2,\ s(3) \approx 1,\ s(4) \approx 0$ fås genom det överbestämda systemet: $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lösningen ger $b,\ c,\ d$ och a fås ur sambandet $a = c + 2d - 2b$.

6. a) Framåt: $1 + x - e^x \approx -\frac{x^2}{2} = -\frac{0.1^2}{2} = -0.005$

Bakåt: $f^{-1}(1 + x) - x = ln(1 + x) - x \approx -\frac{x^2}{2} = -\frac{0.1^2}{2} = -0.005$

b) $y = 1 + x,\ \hat{y} = (1 + x(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_2) = 1 + \epsilon_2 + x(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)$ dvs $\hat{y} = \hat{1} + \hat{x}$, där $\hat{1} = 1 + \epsilon_2$ och $\hat{x} = x(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)$ De relativa felen blir alltså: $\frac{\hat{1}-1}{1} = \epsilon_2$ med $\mid \frac{\hat{1}-1}{1} \mid \leq \mu$ och $\frac{\hat{x}-x}{x} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2$ med $\mid \frac{\hat{x}-x}{x} \mid \leq 2\mu + \mu^2$. Små störningar, dvs algoritmen är stabil.

7. Det icke-linjära minsta-kvadrat problemet blir

$$\min_{\alpha, \beta, \gamma} \parallel f \parallel_2 \text{ där } f_i = \alpha e^{-\beta t_i} + \gamma - \Psi(t_i) \text{ är residualerna.}$$

Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e^{-\beta t_i} & -t_i \alpha e^{-\beta t_i} & 1 \\ | & | & | \end{bmatrix}$.

Låt $x = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)^t$ Då kan Gauss-Newtons metod skrivas:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases},\ k = 0,\ 1,\ 2\ ...$$

8. a) $y'(t) \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$, dvs $y(t + h) - y(t) \approx hy'(t) = hf(t,\ y(t))$. Med $y_{k+1} \approx y(t+k)$ och $y_k \approx y(t)$ får vi Eulers metod: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k,\ y_k)$.

b) Integralform: $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\ dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\ y(t))\ dt$ ger $y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\ y(t))\ dt \approx$ (trapetsformeln) $\frac{h}{2}[f(t_k,\ y_k) + f(t_{k+1},\ y_{k+1})]$, som är trapetsmetoden.

c) Egenvärdena till $-A$ är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$ med $h\lambda_1 = -0.1$ och $h\lambda_2 = -0.2$, båda i stabilitetsområdet för metoderna, som alltså är stabila för problemet.

d) $y_1 = y_0 - hAy_0,\ y_0 = (1,\ 0)^t,\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.1 \end{bmatrix}$