Institutionen för Matematik Göteborg

LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1

2000-08-25

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671

OBS! NYA KURSEN

DAG: Fredag 25 augusti 2000 **TID: 8.45 - 12.45 SAL: VV**

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 11 september
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL !

Uppgift 1. Visa spektralsatsen: Låt F vara en symmetrisk linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt reellt linjärt rum V. Då finns det en ON-bas för V bestående av egenvektorer till F. (**8p**)

Uppgift 2

a) Undersök om mängden av matriser på formen $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, för godtyckliga $a, b \in R$ är ett linjärt rum med avseende på de vanliga matrisoperationerna. Om inte, ange alla axiom som inte gäller. Hur blir det om man i stället betraktar $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$? (**4p**)

b) Låt $A = D + \alpha uu^t$, där $\alpha \in R$, $u \in R^n$ och $D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$. Visa att om det för något i gäller att $d_i = d_{i+1}$ eller att $u_i = 0$ så är d_i ett egenvärde till A. Bestäm egenvektorerna hörande till d_i i de båda fallen. (**4p**)

c) Visa att om en matris är ortogonal och triangulär så är den diagonal. Bestäm diagonalelementen. (**4p**)

Uppgift 3. Betrakta den reella matrisen $A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestäm p och q så att $dim\ V(A) = dim\ N(A)$ och ange ON-baser för rummen för dessa värden på p och q.

Bestäm även baser för $N(A)^\perp$ och $V(A)^\perp$ (ortogonala komplementen till nollrummet resp värderummet). (**6p**)

Uppgift 4

a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: (**5p**)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - x_3(t)\,, & x_1(0) = 2 \\ x_2'(t) = -2x_2(t) - x_3(t)\,, & x_2(0) = 3 \\ x_3'(t) = -3x_3(t)\,, & x_3(0) = 2 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om tredje ekvationen ändras till $x_3'(t) = -x_3(t)$? Motivera ordentligt! (**2p**)

c) Betrakta Trapetsmetoden för att lösa systemet i b)-uppgiften. Metoden är i allmänhet implicit, som bekant. Visa att den kan formuleras explicit i detta fall. (**3p**)

Uppgift 5

Visa hur man kan bestämma integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ genom att formulera och lösa ett lämpligt ODE-problem. Om man använder trapetsmetoden på ODE-problemet, vilken numerisk metod för kvadratur, dvs för att approximera integralen, motsvarar det? (**6p**)

Uppgift 6

Bestäm en QR-faktorisering och en SVD-faktorisering av matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (**5p**)

Uppgift 7

a) Ange följande metoder vid optimering i flera variabler:

Steepest Descent (**1p**)

Newtons metod med och utan dämpning (**1p**)

Levenberg-Marquardts metod för icke linjär minsta kvadrat. (**2p**)

b) Härled Gauss-Newtons metod för icke-linjära minsta kvadrat problem. (**3p**)

Uppgift 8

För studium av mekaniska påfrestningar på ryggraden hos människan används följande differentialekvationsmodell

$$\begin{aligned} & y'' = p^2(y + a)(\tfrac{1}{2}(y')^2 - 1)\,, \quad 0 \le x \le L \\ & y(0) = 0\,, \quad y'(0) = v \\ & a = -(q\,y'(L) + y(L)) \end{aligned}$$

där p, q och v är givna parametrar.

a) För över problemet till ett system av första ordningens ekvationer. (**2p**)

b) Om a vore känt vore det inga problem att lösa systemet. Helt analogt med inskjutningsmetoden kan man formulera en ekvation vars lösning ger korrekt a-värde och därmed lösningen. Ange denna ekvation och ange en lämplig metod att lösa den. (**4p**)

Matematik
Chalmers
Ivar Gustafsson

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 25 augusti 2000

1. Se LAT sid 66.

2. a) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ utgör ej linjärt rum : (1) och (2) gäller inte, (3) och (4) gäller, (5) gäller inte ty nollmatrisen är inte med, (6) - (9) gäller, (10) gäller inte eftersom (5) inte gäller.

   $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ utgör linjärt rum.

   b) $u_i = 0$: Med $e_i = (0,0,..,0,1,0,...,0,0)^T$ (ettan på plats i) får vi: $Ae_i = De_i + 0 = d_i e_i$

   $d_i = d_{i+1}$: Med $f_i = (0,0,...,0,u_{i+1},-u_i,0,...,0,0)^T$ (u_i på plats $i+1$) får vi: $Af_i = Df_i = d_i f_i$

   c) Betrakta matrismultiplikationen $AA^T = E$, som gäller eftersom A är ortogonal. Anta att A är nedåt triangulär, då är A^T uppåt triangulär. Första kolonnen i A måste då ha nollor under diagonalen, annars skulle inte AA^T kunna ha det. Första elementet i kolonn 1 måste ha värdet $+1$ eller -1 eftersom kvadraten blir 1. Fortsätt sedan resonemanget för successivt kolonn 2, kolonn 3 etc. Vi finner att A måste vara diagonal med $+1$ eller -1 i diagonalen.

3. Enligt dimensionssatser är $dimV(A) + dimN(A) = 2$ och eftersom de är lika måste rummens dimension vara 1. Kolonnerna i A ska alltså vara linjärt beroende och enda möjligheten är alltså $p = 1$ och $q = 0$. En ON-bas för $V(A)$ är då $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1)^T$. Vidare ser vi direkt att $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$ är en ON-bas för $N(A)$ och dess ortogonala komplement har då ON-basen $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$. Slutligen är ortogonala komplementet till $V(A)$ samma som $N(A^T)$ och detta kan bestämmas genom att lösa ett homogent ekvationssystem $A^T x = 0$. Denna lösning blir tre-parametrig och vi kan ta ut följande bas: $(0,0,1,0)^T$, $(-1,0,0,1)^T$, $(-1,1,0,0)^T$

4. a) $A = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ och vi får $z_1 = c_1 e^{-t}$, $z_2 = c_2 e^{-2t}$, $z_3 = c_3 e^{-3t}$ och $x = Tz = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_3 e^{-3t} \\ c_2 e^{-2t} + 2c_3 e^{-3t} \\ 2c_3 e^{-3t} \end{bmatrix}$. Begynnelsevärdena $x(0) = (2,\ 3,\ 2)^T$ ger $c = (1,\ 1,\ 1)^T$ och lösningen $x = (e^{-t} + e^{-3t},\ e^{-2t} + 2e^{-3t},\ 2e^{-3t})^T$.

b) $A = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ej diagonaliserbar, $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är singulär.

c) Trapetsmetoden: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(Ax_k + Ax_{k+1})$. Om vi löser ut x_{k+1} får vi alltså: $x_{k+1} = (E - \frac{h}{2}A)^{-1}(E + \frac{h}{2}A)x_k = B(h)x_k$ där $B(h) = (E - \frac{h}{2})^{-1}(E + \frac{h}{2}A)$ är oberoende av iterationsindex.

5. $I = \int_a^b f(x)\,dx$. ODE: $\begin{cases} F' = f \\ F(a) = 0 \end{cases}$ vars lösning ger $F(b) = I$. Trapetsmetoden: $F_0 = 0,\ F_1 = F_0 + \frac{h}{2}[f_0 + f_1],\ F_2 = F_1 + \frac{h}{2}[f_1 + f_2], ..., F_n = F_{n-1} + \frac{h}{2}[f_{n-1} + f_n] = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + ... + 2f_{n-1} + f_n]$, vilket är trapetsformeln för approximation av I.

6. Vi ser att kolonnerna i A är ortogonala, $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Vi skaffar en tredje ortogonal kolonn med Gram-Schmidt's metod: $e_1 = (1,2,1)^T$, $e_2 = (2,-1,0)^T$, $e_3 = (1,1,1)^T - \frac{4}{6}(1,2,1)^T - \frac{1}{5}(2,-1,0)^T = \frac{1}{15}(-1,-2,5)^T$. Normering ger $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$ och R blir då $R = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

SVD: $A = U\Sigma V^T$ gäller med $U = Q$ (enligt ovan) och $\Sigma V^T = R$, dvs $\Sigma = R$ och $V^T = V = E$.

7. a) $x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$. SD: $d^{(k)} = -\bigtriangledown f(x^{(k)})$,

Newton: $d^{(k)} = -\alpha H(x^{(k)})^{-1} \bigtriangledown f(x^{(k)})$, $\alpha < 1$ innebär dämpning, $\alpha = 1$ innebär odämpad Newton.

LM: $d^{(k)} = -(J(x^{(k)})^T J(x^{(k)}) + \mu E)^{-1} J(x^{(k)})^T f(x^{(k)})$

b) $min_x \parallel f(x) \parallel \approx min_x \parallel f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \parallel_2$. Ta $x^{(k+1)}$ som lösningen till minproblemet, då får vi Gauss-Newtons metod:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k+1)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$$

8. a) Systemet skrivs om som (BVP): $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = p^2(y_1 - a)(\frac{1}{2}y_2^2 - 1) \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = v \end{cases}$

b) Inskjutning på a innebär att lösa ekvationen

$g(a) = 0$ där $g(a) = a + qy_2(L, a) + y_1(L, a)$

Sekantmetoden på ekvationen blir: $a^{(k+1)} = a^{(k)} - \frac{g(a^{(k)})(a^{(k)} - a^{(k-1)})}{g(a^{(k)}) - g(x^{(k-1)})}$, $k = 1, 2, ...$ Varje nytt $g(a^{(k)})$ kräver att (BVP) löses, dvs detta görs en gång per iteration i sekantmetoden.