Institutionen för Matematik
Göteborg

LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1

2000-05-26

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671

DAG: Fredag 26 maj 2000 TID: 8.45 - 12.45 SAL: VV

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 13 juni
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL !

Uppgift 1

a) Låt U vara ett underrum till det linjära rummet V och låt $U^{\perp}$ vara ortogonala komplementet till U. Visa att följande två egenskaper är ekvivalenta för vektorer $u \in V$ och $u' \in U$

(i) $u - u' \in U^{\perp}$

(ii) $\| u - u' \| \le \| u - w \|, \ \forall w \in U$ (**6p**)

b) Tillämpning på a-uppgiften: Låt U vara det underrum till R^4 som definieras av

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Bestäm m.a.p. standardskalärprodukten bästa approximation $u' \in U$ till $u = (-2, -7, 3, 4)$. (**3p**)

Uppgift 2

Betrakta interpolationsoperatorn $I : C(R) \to P_n(R)$, dvs från mängden av kontinuerliga funktioner till mängden av polynom av grad högst n, där interpolationspunkterna (n+1 st) är givna punkter där funktion och polynom överensstämmer.

a) Visa att I är en linjär operator. (**4p**)

b) Vad är dimensionen på nollrummet till I och vad är dimensionen på värderummet? Motivera ordentligt. (**2p**)

c) Låt $f = x^3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Bestäm p_2 som interpolerar f i punkterna. (**2p**)

Uppgift 3

Låt P_2 vara det linjära rummet av alla polynom av grad ≤ 2. Avbildningen F definieras genom

$$(Fp)(x) = x^2 p\left(\frac{1}{x}\right)$$

a) Visa att F är en linjär avbildning från P_2 till P_2 (**2p**).

b) Bestäm matrisen för F i basen $\{1, x, x^2\}$ (**2p**).

c) Bestäm matrisen för F i basen $p_1 = 1 + x$, $p_2 = 1 - x$, $p_3 = 1 + x^2$. Visa först att detta är en bas (**3p**).

d) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till F. (**2p**)

Uppgift 4

a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: (**4p**)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - x_2(t), & x_1(0) = 2 \\ x_2'(t) = -2x_2(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = -3x_3(t), & x_3(0) = 1 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om andra ekvationen ändras till $x_2'(t) = -x_2(t)$? Motivera ordentligt! (**2p**)

c) Föreslå en numerisk metod som klarar av problemet i b-uppgiften. Skriv upp ett rekursionssteg med metoden. Får du några stabilitetsproblem när din metod tillämpas på det aktuella problemet? (**3p**)

Uppgift 5

a) Definiera singulärvärdesuppdelning (SVD) av en $m \times n$-matris, $m > n$ (**2p**)

b) Vad menas med kompakt SVD? (**1p**)

c) Definiera en pseudoinvers utifrån SVD. (**1p**)

d) På vilket sätt kan SVD användas för att få bästa approximation av en matris och hur stort blir felet? (**2p**)

Uppgift 6

Vi önskar beräkna $a = \dfrac{1 - e^{-0.2}}{1 + e^{-0.1}}$ med hjälp av de korrekt avrundade approximationerna $e^{-0.1} \approx 0.90$, $e^{-0.2} \approx 0.82$. Använd felfortplantningsformeln för att bestämma felet i det beräknade a-värdet. Hur många signifikanta siffror har täljaren och hur många har nämnaren? Gör en (grov) uppskattning av felet i det beräknade a-värdet och ange antalet signifikanta siffror i approximationen. (**5p**)

Uppgift 7

Det tryck som behövs för att sänka ner tunga föremål i mjukt underlag kan bestämmas genom experiment med lättare föremål. Speciellt gäller att trycket p, som krävs för att en cirkulär platta med radie r ska sjunka ner ett avstånd d i underlaget, kan approximeras med ekvationen

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

där k_1, k_2 och k_3 är konstanter som beror på underlagets beskaffenhet och d, men inte på r. För att bestämma dessa konstanter kan man alltså mäta trycken som krävs för att sänka ner tre små plattor med olika radier r_1, r_2 och r_3 till samma djup d.

a) Skriv upp det icke-linjära ekvationssystem som ska lösas. Ange en iterativ metod för dess lösning och kommentera vilket subproblem som ska lösas i varje iteration och vilken metod som kan användas för detta subproblem. (**3p**)

b) Om man gör fler än tre prov av ovanstående slag blir systemet överbestämt. Ange en iterativ metod att lösa detta problem i minsta-kvadrat mening. Tala även här om hur ingående subproblem ser ut och hur det löses. (**3p**)

Uppgift 8

I en cirkulär, porös katalysatorpartikel beskrivs koncentrationen av det ämne katalysatorn verkar på av följande randvärdesproblem

$$y'' = \Phi^2 y \, exp\left(\gamma \beta \frac{1 - y}{1 + \beta(1 - y)}\right), \quad 0 < x < 1$$
$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

där Φ, γ och β är konstanter.

a) Formulera inskjutningsmetoden för problemet. Ange speciellt den icke-linjära ekvation som ska lösas samt teckna en numerisk metod för att lösa denna ekvation. (**4p**)

b) Formulera en differensmetod för problemet och skriv upp det resulterande icke-linjära ekvationssystemet. (**4p**)

Matematik
Chalmers
Ivar Gustafsson

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 26 maj 2000

1. a) se LAT sid 35.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $AA^Tx = Au$ blir då $\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -28 \\ 0 \end{bmatrix}$
   med lösning $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

   Vi får alltså $u'' = A^Tx = (-2,\ -4,\ 0,\ 6)^T$, $u' = u - u'' = (0,\ -3,\ 3,\ -2)^T$

2. a) $I(f) = p$ innebär $f_i = p(x_i) = p_i$, $i = 1, ..., n+1$ och på samma sätt innebär $I(g) = q$ att $g_i = q_i$, $i = 1, ..., n+1$

   Vidare gäller $(f+g)(x_i) = f_i + g_i = p_i + q_i = (p+q)(x_i)$ dvs

   $I(f+g) = p + q = I(f) + I(g)$ ty interpolationen är entydig.

   På liknande sätt visas $I(\alpha f) = \alpha p = \alpha I(f)$, där α är en skalär och därmed har vi visat att I är en linjär operator.

   b) Nollrummet är oändligtdimensionellt eftersom det är mängden av alla funktioner som är noll i interpolationspunkterna, exempelvis funktioner $(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n+1})h(x)$ för godtycklig funktion $h(x)$. Värderummet är $P_n(R)$ eftersom till ett givet polynom finns alltid en funktion med samma värden som polynomet i de givna interpolationspunkterna. Dimensionen på värderummet är alltså $n + 1$.

   c) Ansätt $p_2 = a + bx + cx(x-1)$. Interpolationsvillkoren ger: $p_2(0) = f(0) = 0$ dvs $a = 0$, $p_2(1) = f(1) = 1$ dvs $b = 1$ och $p_2(2) = f(2) = 8$ dvs $c = 3$. Polynomet är alltså $p_2(x) = x + 3x(x-1)$.

3. a) $F(1) = x^2,\ F(x) = x,\ F(x^2) = 1$ ger $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b) A (linjär) matris, $V(F) = P_2$ så ok!

c) Transformationsmatrisen $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är reguljär, alltså basen ok! Vidare gäller $Fp_1 = x^2 + x = p_3 - p_2,\ Fp_2 = x^2 - x = p_3 - p_1,\ Fp_3 = x^2 + 1 = p_3$ dvs $A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) Från b) ser vi att $-1 + x^2$ är egenvektor med egenvärde -1 och att x är egenvektor med egenvärde 1. Vidare ser vi från c) att p_3 är egenvektor med egenvärde 1, dvs $Span(x,\ x^2+1)$ egenvektorer med egenvärde 1.

4. a) $A = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och vi får $z_1 = c_1 e^{-t},\ z_2 = c_2 e^{-2t},\ z_3 = c_3 e^{-3t}$ och $x = Tz = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \\ c_2 e^{-2t} \\ c_3 e^{-3t} \end{bmatrix}$. Begynnelsevärdena $x(0) = (2,\ 1,\ 1)^T$ ger

$c = (1,\ 1,\ 1)^T$ och lösningen $x = (e^{-t} + e^{-2t},\ e^{-2t},\ e^{-3t})^T$.

b) $A = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ej diagonaliserbar, $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är singulär.

c) Exempelvis Eulers framåtmetod: $x_{k+1} = x_k + hAx_k$. Matrisen A är inte styv så det blir inga problem med stabilitet. Steglängden h väljes endast med tanke på önskad noggrannhet.

5. a) $A = U\Sigma V^T$ där U är ortogonal $m \times m$, Σ är diagonal $m \times n$ och V är ortogonal $n \times n$.

b) $A = U_1 \Sigma_r V_1^T$ där U_1 är $m \times r$, Σ är $r \times r$, V är $n \times r$ och r är A:s rang.

c) $A^+ = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i^{-1} v_i u_i^T$

d) $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$, $\| A - A_k \|_2 = \sigma_{k+1}$

6. Med $x = e^{-0.1} \approx 0.90,\ y = e^{-0.2} \approx 0.82$ ska vi alltså beräkna $a = \frac{1-y}{1+x}$. Felfortplantning: $\delta a \approx \frac{1-y}{(1+x)^2}\delta x - \frac{1}{1+x}\delta y$ med $| \delta a | \leq (\frac{0.0185}{1.855^2} + \frac{1}{1.855})0.005 \leq 0.005$. Den uträknade approximationen blir $\bar{a} = \frac{1-0.82}{1+0.90} = \frac{0.18}{1.90} = 0.09..$ och vi ser att täljaren $1 - y \approx 0.18$ är angiven med två

signifikanta siffror, nämnaren $1 + x \approx 1.90$ med tre signifikanta siffror och $a \approx 0.09$ med en signikant siffra.

7. a) Lös $f(k) = 0$ där $f_i = p_i - k_1 e^{k_2 r_i} - k_3 r_i,\ i = 1, 2, 3$. Newtons metod blir: $k^{(l+1)} = k^{(l)} + d^{(l)},\ J(k^{(l)})d^{(l)} = -f(k^{(l)}),\ l = 1,\ 2,\ ....$ Här är J Jacobianmatrisen $J = \begin{bmatrix} | & | & | \\ -e^{k_2 r_i} & -r_i k_1 e^{k_2 r_i} & -r_i \\ | & | & | \end{bmatrix}$ Ett linjärt ekvationssystem löses i varje iteration, exempelvis med Gausselimination.

   b) Problemet kan formuleras

   $min_k \parallel f(k) \parallel_2,\ f_i = p_i - k_1 e^{k_2} r_i - k_3 r_i,\ i = 1, 2, ..., m.$

   Här kan Gauss-Newtons metod användas. Den ser ut som Newtons metod ovan men ett överbestämt ekvationssystem löses i varje iteration exempelvis med QR-faktorisering (eller SVD).

8. $y_1 = y$ och $y_2 = y'$ ger system $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = g(y_1) \end{cases},\ \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$

   a) Begynnelsevärdesproblemet blir $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = g(y_1) \end{cases},\ \begin{cases} y_1(0) = s \\ y_2(0) = 0 \end{cases}.$

   Om lösningen till detta system är $y(x, s)$ ska ekvationen

   $q(s) = y_1(1, s) - 1 = 0$ lösas. Med sekantmetoden blir det:

   $s^{(k+1)} = s^{(k)} - \frac{y_1(1,s^{(k)})(s^{(k)} - s^{(k-1)})}{y_1(1,s^{(k)}) - y_1(1,s^{(k-1)})},\ k = 1, 2, ...$

   b) Centraldifferenser ger beräkningsspindlarna: $y'' \approx \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

   $y' \approx \frac{1}{2h}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Villkoret $y'(0) = 0$ ger spindeln

   $y'' \approx \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ i vänster ändpunkt.

   Det ickelinjära ekvationssystemet som approximerar $y'' - g(y) = 0$ blir alltså:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g(y_1) \\ g(y_2) \\ \dots \\ \dots \\ g(y_{n-2}) \\ g(y_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{1}{h^2} \end{bmatrix}$$