sar 4

Lana öv.

25 kr

Lösningar till övningar i kursen
Linjär algebra och numerisk analys, F1

Greger Cronquist

VT 2000

Sammanfattning

Här finns alla de övningsuppgifter som jag räknade på tavlan under kursen våren 2000. Lösningarna är inte perfekta. Böcker: (KH) Kjell Holmåker, *Linjär algebra med tillämpningar*, Chalmers, Göteborg, 1997. (Heath) Michael T. Heath, *Scientific Computing*, McGraw-Hill, N.Y., 1996. (Tenta) Gamla tentor ur kurserna Linjär algebra och analys, F1 (examinator Ivar Gustafsson), Chalmers, och Numerisk analys, F2 (examinator Ivar Gustafsson), Chalmers.

KH:2

Uppgift: Visa att V är ett vektorrum om V är mängden av alla reella tal med operatorerna

$$a \oplus b = ab, \quad \alpha \odot a = a^\alpha, \qquad a, b, \alpha \in \boldsymbol{R}.$$

Lösning: Vi skall alltså visa att V passar in på definition 1.1 i kurshäftet.

(1) Gäller att $(a \oplus b) \in V \; \forall a, b \in V$? Ja, eftersom $ab \in \boldsymbol{R}$.

(2) Gäller att $(\alpha \odot a) \in V \; \forall a, \alpha \in \boldsymbol{R}$? Ja, eftersom $a^\alpha \in \boldsymbol{R}$.

(3) Gäller den kommutativa lagen $(a \oplus b) = (b \oplus a) \; \forall a, b \in V$? Ja, $ab = ba$.

(4) Gäller den associativa lagen för addition, $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \; \forall a, b, c \in V$? Ja, $(ab)c = a(bc)$ för reella tal.

(5) Har V ett nollelement? Dvs. $\exists \mathbf{0} : \mathbf{0} \oplus a = a \oplus \mathbf{0} = a \; \forall a \in V$? Ja, om $\mathbf{0} := 1$.

(6) Gäller den associativa lagen för multiplikation, $\alpha \odot (\beta \odot a) = (\alpha\beta) \odot a \; \forall a \in V, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$? Ja, VL $= \alpha \odot a^\beta = a^{\alpha\beta} =$ HL.

(7) Gäller den distributiva lagen $\alpha \odot (a \oplus b) = \alpha \odot a \oplus \alpha \odot b$? Ja, VL $= (ab)^\alpha = (a^\alpha)(b^\alpha) =$ HL.

(8) Gäller den distributiva lagen $(\alpha + \beta) \odot a = \alpha \odot a \oplus \beta \odot a$? Ja, VL $= a^{\alpha+\beta} = (a^\alpha)(a^\beta) =$ HL.

(9) Gäller att $1 \odot a = a$? Ja.

(10) Gäller att $0 \odot a = \mathbf{0}$? Ja, $a^0 = 1 = \mathbf{0}$.

KH:3

Uppgift: V är mängden $\boldsymbol{R}^2$ med operatorerna

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1), \\ \alpha \odot (x_1, x_2) &= (\alpha + \alpha x_1 - 1, \alpha + \alpha x_2 - 1). \end{aligned}$$

Är V ett vektorrum?
Lösning: Vi skall alltså återigen kolla att V uppfyller definition 1.1.

(1) OK: $x \oplus y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) \in \boldsymbol{R}^2$.

(2) OK: $\alpha \odot x = (\alpha + \alpha x_1 - 1, \alpha + \alpha x_2 - 1) \in \boldsymbol{R}^2$.

(3) OK: $x \oplus y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) = (y_1 + x_1 + 1, y_2 + x_2 + 1) = y \oplus x$.

(4) OK: $(x \oplus y) \oplus z = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) \oplus z = (x_1 + y_1 + z_1 + 2, x_2 + y_2 + z_2 + 2) = x \oplus (y_1 + z_1 + 1, y_2 + z_2 + 1) = x \oplus (y \oplus z)$.

(5) Denna är lite trixigare. Vi vill alltså att $\mathbf{0} \oplus x = x$, dvs. $(0_1 + x_1 + 1, 0_2 + x_2 + 1) = (x_1, x_2)$. Alltså måste $\mathbf{0} = (-1, -1)$.

(6) OK: $\alpha \odot (\beta \odot x) = \alpha \odot (\beta + \beta x_1 - 1, \beta + \beta x_2 - 1) = (\alpha + \alpha\beta + \alpha\beta x_1 - \alpha - 1, \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta x_2 - \alpha - 1) = (\alpha\beta + \alpha\beta x_1 - 1, \alpha\beta + \alpha\beta x_2 - 1) = (\alpha\beta) \odot x$.

(7) OK: $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) = (\alpha + \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha - 1, \alpha + \alpha x_2 + \alpha y_2 + \alpha - 1) = (\alpha + \alpha x_1 - 1 + \alpha + \alpha y_1 - 1 + 1, \alpha + \alpha x_2 - 1 + \alpha + \alpha y_2 - 1 + 1) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

8) OK: $(\alpha + \beta) \odot x = ((\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)x_1 - 1, (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)x_2 - 1) = (\alpha + \alpha x_1 + \beta + \beta x_1 - 1 - 1 + 1, \alpha + \alpha x_2 + \beta + \beta x_2 - 1 - 1 + 1) = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$.

(9) OK: $1 \odot x = (1 + x_1 - 1, 1 + x_2 - 1) = x$.

(10) OK: $0 \odot x = (0 + 0x_1 - 1, 0 + 0x_2 - 1) = (-1, -1) = \mathbf{0}$.

KH:5 a–c

Uppgift: Vilka av följande delmängder till $\boldsymbol{R}^n$ är underrum och vilka är multiplan (=affina mängder)?
Lösning: Vi skall kontrollera för vilka mängder sats 1.1 gäller och för den inte gäller, dvs. för vilka gäller att

$$u, v \in M, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in M$$

a) $M = \{x \in \boldsymbol{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. Detta är ett (3d-)plan som går genom origo, så det bör vara ett underrum. Om vi stoppar in $\alpha u + \beta v$ i ekvationen som definierar M får vi

$$\begin{aligned} &3(\alpha u_1 + \beta v_1) - 2(\alpha u_2 + \beta v_2) + (\alpha u_3 + \beta v_3) - (\alpha u_4 + \beta v_4) \\ &\qquad = \alpha(3u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4) + \beta(3v_1 + 2v_2 + v_3 - v_4) = 0, \end{aligned}$$

dvs. $(\alpha u + \beta v) \in M$.

b) $M = \{x \in \boldsymbol{R}^4 : 9x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1\}$. Detta är ett (3d-)plan som *inte* går genom origo, så därför bör det inte vara ett underrum till $\boldsymbol{R}^4$. På samma sätt som förut får vi, med $\alpha u + \beta v$,

$$9(\alpha u_1 + \beta v_1) - 2(\alpha u_2 + \beta v_2) + \alpha u_3 + \beta v_3 + 4(\alpha u_4 + \beta u_4) \\ = \alpha + \beta \neq 1 \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}.$$

Skapar vi däremot rummet $N = \{x - (0,0,1,0) : x \in M\}$ får vi att N är ett underrum, och därmed är M en affin delmängd enligt definition 1.3.

c) $M = \{x \in \boldsymbol{R}^4 : x = s(2,3,4,5) + t(6,7,8,9),\ s,t \in \boldsymbol{R}\}$. Detta är ett (2d-)plan som går genom origo, så det bör vara ett underrum. Vi stoppar in $\alpha u + \beta v$:

$$\alpha s_u(2,3,4,5) + \alpha t_u(6,7,8,9) + \beta s_v(2,3,4,5) + \beta t_v(6,7,8,9) \\ = (\alpha s_u + \beta s_v)(2,3,4,5) + (\alpha t_u + \beta t_v)(6,7,8,9),$$

vilket helt klart ligger i M.

KH:6 e–g

Uppgift: Undersök om M är ett underrum till V i några olika fall.
Lösning: Vi skall undersöka om sats 1.1 gäller för
e) $V = A_{n\times n}$, $M = \{$alla matriser i V som kommuterar med en given matris $B \in V\}$. Om A_1, A_2 tillhör $M, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ ligger då $\alpha A_1 + \beta A_2$ i M? Det vi skall undersöka är alltså om

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)B = B(\alpha A_1 + \beta A_2),$$

vilket ju inses eftersom VL $= \alpha A_1 B + \beta A_2 B = \alpha B A_1 + \beta B A_2 =$ HL. M är alltså ett underrum till V.
f) $V = A_{n\times n}$, $M = \{A \in V : \mathrm{sp}\, A = 0\}$, där spåret av A är summan av A:s diagonalelement, dvs. $\mathrm{sp}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Vi tar det hela ett steg i taget. Först och främst, om $A \in M$ så måste ju även $\alpha A \in M$ eftersom

$$\mathrm{sp}\,(\alpha A) = \alpha \mathrm{sp}\, A = 0.$$

Sedan får vi, med $A, B \in M$, att

$$\mathrm{sp}\,(A+B) = \mathrm{sp}\, A + \mathrm{sp}\, B = 0,$$

varför M är ett underrum till V.
g) $V = C(\boldsymbol{R})$, $M = \{f \in V : \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)e^{-x^2}\,dx < \infty\}$. Först och främst ser vi att om $f \in M$ så är det lätt att se att även $\alpha f \in M$ för vilket reellt tal α som helst. Hur blir det då med summan av två funktioner som båda tillhör M?

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f+g)^2 e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 e^{-x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} g^2 e^{-x^2}\,dx + 2\int_{-\infty}^{\infty} (fg)^2 e^{-x^2}\,dx \\ \leq [2ab \leq a^2 + b^2] \leq 2\int_{-\infty}^{\infty} f^2 e^{-x^2}\,dx + 2\int_{-\infty}^{\infty} g^2 e^{-x^2}\,dx \leq \infty,$$

alltså är M ett underrum till V.

KH:13

Uppgift: Visa att $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,2,0,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,1,0,2)$ och $\boldsymbol{v}_4 = (4,1,1,6)$ är linjärt beroende.
Lösning: Lite repetition, vi skall alltså visa att en av vektorerna ovan kan skrivas som en linjärkombination av de övriga, dvs. att det finns $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ som inte alla är lika med noll s.a.

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{v}_4 = 0$$

T.ex. ser vi att $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3$. Ser man inte detta direkt kan man ställa upp, och lösa ekvationssystemet ovan, dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

KH:16

Uppgift: Visa att $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,0,1,2)$ och $\boldsymbol{v}_4 = (0,0,0,1)$ bildar en bas i $\boldsymbol{R}^4$.
Lösning: Vi skall alltså visa att $\boldsymbol{v}_i$ är linjärt oberoende samt genererar $\boldsymbol{R}^4$ (enligt definition 1.7). Vi börjar med det linjära oberoendet. Kan man hitta $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0}$ s.a.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Nej. $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$ är den enda lösningen. Alltså är $\boldsymbol{v}_i$ linjärt oberoende. Genererar de $\boldsymbol{R}^4$, dvs. kan vi uttrycka alla element i $\boldsymbol{R}^4$ med våra $\boldsymbol{v}_i$? Det är tillräckligt att visa att de "vanliga" vektorerna, $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0)$ osv. kan uttryckas mha. $\boldsymbol{v}_i$. Vi vill alltså entydigt kunna lösa ekvationsystemen

$$V\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad V\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{e}_2, \quad V\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{e}_3, \quad V\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{e}_4.$$

Detta är möjligt (V har determinanten 1 och är därför inverterbar) med lösningen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \\ \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4, \\ \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - 2\boldsymbol{v}_4, \\ \boldsymbol{e}_4 &= \boldsymbol{v}_4. \end{aligned}$$

KH:17d

Uppgift: Bestäm dimensionen för det underrum i $\boldsymbol{R}^4$ som genereras av $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,4,3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2,1,5,0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,1,3,1)$, $\boldsymbol{u}_4 = (4,2,10,0)$.
Lösning: Vi skriver upp basmatrisen och tar reda på dess rang med hjälp av kolonnoperationer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Så det finns två oberoende kolumner, och alltså är dimensionen 2.

KH:19

Uppgift: Antag att $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ är linjärt oberoende i $\boldsymbol{R}^n$. Vad är dimensionen hos det underrum som genereras av

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3, \dots, \boldsymbol{v}_{k-1} - \boldsymbol{v}_k,\ \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_1?$$

Lösning: Basmatrisen för vårt nya rum kan vi uttrycka med hjälp av basen $\boldsymbol{v}_i$ som

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{v}}$$

Man ser nu att om man lägger ihop alla kolumner till den sista, så blir det bara noll kvar i sista raden. Kvar blir $k-1$ oberoende kolumner, vilket då är dimensionen på underrummet.

KH:20ab

Uppgift: Vi skall här bestämma dimensionen av några matrisrelaterade rum.
Lösning:
a) Vad är dimensionen av det linjära rummet av alla $n \times n$-matriser? Vi kan bygga upp vilken matris som helst som en linjärkombination av matriser med endast en enda etta och resten nollor ($M = (m_{ij})$, $m_{ij} = 1, i = a, j = b$, 0 annars). I fallet $n = 2$ har vi t.ex. basmatriserna

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det finns totalt, för ett givet n, n^2 sådana basmatriser. Dimensionen hos rummet är alltså n^2.

b) Vad är dimensionen av det linjära rummet av alla symmetriska $n \times n$-matriser? För en symmetrisk matris gäller att $M^T = M$, dvs. baselementen måste vara på formen

$$M = (m_{ij}), \quad m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om } i = a,\ j = b \text{ och } i = b,\ j = a, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

I fallet $n = 2$ har vi alltså baselementen

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Generellt gäller att på den i:te raden finns $n+1-i$ "fria element" — på rad i i baselementen kan vi sätta noll eller ett på alla platser till vänster (eller till höger) om diagonalen inklusive diagonalen, på andra sidan diagonalen är sedan värdena (noll eller ett) bestämda. För att få det totala antalet baselement summerar vi då över i:

$$\dim = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) = n^2 + n - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

KH:21

Uppgift: Visa att vektorrummet $\mathcal{C}(\boldsymbol{R})$ av alla kontinuerliga funktioner över $\boldsymbol{R}$ är oändligtdimensionellt.
Lösning: Vi skall alltså visa att det finns ett oändligt antal (oberoende) vektorer i $\mathcal{C}(\boldsymbol{R})$ (definition 1.7). Vi gör detta genom att betrakta två exempel. Börja med att betrakta

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \quad \dots$$

Dessa är alla linjärt oberoende (vilket man ganska lätt inser), och faktum är att de också spänner upp $\mathcal{C}(\boldsymbol{R})$, jfr. Taylorutvecklingen.
Även vektorerna

$$1, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \sin 2x, \quad \cos 2x, \quad \sin 3x, \quad \cos 3x, \quad \dots$$

är linjärt oberoende. Även dessa spänner upp $\mathcal{C}(\boldsymbol{R})$, men det kan vara lite krångligare att inse, varför vi lämnar det.

KH:22a

Uppgift: Visa att

$$\sin 2t, \quad \cos 2t, \quad \sin^2 t, \quad \cos^2 t$$

är linjärt beroende.
Lösning: Tag t.ex. formeln för cosinus av dubbla vinkeln:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

KH:25

Uppgift: Givet att U_1 och U_2 är underrum i V, visa att även $U_1 \cap U_2$ och $U_1 + U_2$ är underrum i V.
Lösning: Vi skall alltså kontrollera sats 1.1. Vi börjar med den första utsagan. Om ett element $v \in (U_1 \cap U_2)$ betyder det att $v \in U_1$ *och* $v \in U_2$. Tag därför $u, v \in (U_1 \cap U_2)$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. Då gäller att

$$\begin{cases} \alpha u + \beta v \in U_1 \text{ (eftersom } U_1 \text{ är ett underrum)} \\ \alpha u + \beta v \in U_2 \text{ (eftersom } U_2 \text{ är ett underrum)} \end{cases} \Rightarrow \quad (\alpha u + \alpha v) \in (U_1 \cap U_2)$$

Alltså är $U_1 \cap U_2$ ett underrum till V.

Den andra utsagan. Ett element $u \in (U_1 + U_2)$ betyder att $u = u_1 + u_2$ där $u_1 \in U_1$ och $u_2 \in U_2$. Tag nu $u, v \in (U_1 + U_2)$ och $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. Vi kan då skriva

$$\alpha u + \beta v = \alpha(u_1 + u_2) + \beta(v_1 + v_2) = \underbrace{(\alpha u_1 + \beta v_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(\alpha u_2 + \beta v_2)}_{\in U_2}.$$

Alltså är $U_1 + U_2$ ett underrum till V.

KH:26a

Uppgift: Bestäm dimensionen för $U_1 \cap U_2$ och $U_1 + U_2$ då

$$U_1 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \end{cases}, \quad U_2 : \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases},$$

eller

$$U_1 = \{x : A_1 x = 0\}, \qquad U_2 = \{x : A_2 x = 0\},$$

där matriserna fås ur som koefficienterna ovan.
Lösning: $U_1 \cap U_2$: Vi skall alltså beräkna dimensionen för nollrummet till matrisen $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ som vi får då alla fyra ekvationer är uppfyllda.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösningen till ekvationssystemen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ är alltså en linje — en fri parameter. Dimensionen av nollrummet är alltså 1. Dvs. $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

$U_1 + U_2$: En vektor i $U_1 + U_2$ är sådan att $x = x_1 + x_2$ där $A_1 x_1 = 0$ och $A_2 x_2 = 0$. Så basen för $U_1 + U_2$ består av baserna för $N(A_1)$ och $N(A_2)$.

$$N(A_1) : \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 7s + 3t \\ -3s - t \\ s + 0 \\ 0 + t \end{pmatrix}$$

$$N(A_2) : \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -13s - 6t \\ -3s - t \\ s + 0 \\ 0 + t \end{pmatrix}.$$

Så basvektorerna för $U_1 + U_2$ är $e_1 = (7, -3, 1, 0)$, $e_2 = (3, -1, 0, 1)$, $e_3 = (-13, -3, 1, 0)$ och $e_4 = (-6, -1, 0, 1)$. Hur många av dessa är linjärt oberoende?

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -13 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E}}{\sim} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Så dimensionen är 3.

KH:31a, 33a

Uppgift: Bestäm baser för $N(A)$ och $V(A)$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösning: $N(A)$: Vi löser $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$A \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Alltså två fria parametrar varför $\dim N(A) = 2$. Lösningen blir

$$\begin{cases} x_1 = s + 2t - 3t - 3s \\ x_2 = -s - 2t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = s \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2}$$

Där $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ är basvektorer till $N(A)$.

$V(A)$: Vi skall ta reda på vilka kolumner i A som är linjärt oberoende eftersom varje vektor $\boldsymbol{y} \in V(A)$ kan skrivas

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n$$

där A_i är den i:te kolumnen i A. Vi utför alltså elementära kolonnoperationer på A.

$$A \overset{\text{K.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{K.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi har alltså två oberoende vektorer, den första och den andra kolumnen. Basvektorerna $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ är alltså

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Observera: $\dim N(A) + \dim V(A) = n$ för en $m \times n$-matris.

KH:35(M)

Uppgift: Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Undersök om nollrummen $N(A)$ och $N(B)$ i $\boldsymbol{R}^4$ har någon gemensam vektor $\neq \mathbf{0}$.

b) Har värderummen $V(A)$ och $V(B)$ i $\boldsymbol{R}^3$ någon gemensam vektor $\neq \mathbf{0}$?

Lösning:
a) Med `null(A)` kan vi bestämma basen i nollrummet, och med `rank(A)` kan vi bestämma matrisens rang, så med raden

```
rank([null(A) null(B)])
```

vilken ger svaret 2 får vi antalet oberoende gemensamma basvektorer i nollrummen. Det finns alltså gott om gemensamma vektorer i nollrummen till A och B.
b) Baser för värderummen är enklast att bestämma med MARTLAB:s `orth`-kommando.

```
rank([orth(A) orth(B)])
```

vilket ger svaret 3. Det finns alltså gemensamma vektorer i värderummen till A och B.

KH:39

Uppgift: Vilken är dimensionen av $U \subset \boldsymbol{R}^5$ om U genereras av

$$(1,2,1,2,1); \quad (1,3,1,1,2); \quad (2,1,4,3,-3); \quad (3,2,4,8,-2)?$$

Bestäm A sådan att $U = N(A)$.
Lösning: Vi kollar hur många av vektorerna som spänner U är linjärt oberoende:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alltså är $\dim U = 3$. Eftersom $\dim N(A) + \dim V(A) = \dim \boldsymbol{R}^5 = 5$ och $\dim N(A) = \dim U = 3$ är $\dim V(A) = 2$ och A måste vara en 2×5-matris. Då

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{span}\,\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$$

söker vi alltså A sådan att

$$A \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{u}_1 & - \\ - & \boldsymbol{u}_2 & - \\ - & \boldsymbol{u}_3 & - \end{pmatrix} A^T = 0$$

Detta är en ekvation man löser på "det gamla vanliga sättet"—med Gausseliminering, trots att man söker en matris och inte en vektor. Ekvationen är ekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = 0$$

vilken har lösningen

$$\boldsymbol{x} = (-6s, s-t, 2s+t, s, t) = s(-6,1,2,1,0) + t(0,-1,1,0,1)$$

vilket ger

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(eller en med denna matris radekvivalent matris).

KH:41a(M)

Uppgift: Ange rangen av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: I MATLAB räknar man lättast ut rangen med `rank(A)`. Man får då att A:s rang är 2.

KH:44a(M)

Uppgift: Visa att $p_1(t)$, $p_2(t)$ och $p_3(t)$ är en bas för $\mathcal{P}^2$ (rummet av polynom av högst grad 2) då

$$p_1(t) = (t+1)^2, \quad p_2(t) = (t+2)^2, \quad p_3(t) = (t+3)^2,$$

uttryck t^2 i p_i. **Lösning:** Kan varje element i $\mathcal{P}^2$ uttryckas entydigt med hjälp av p_1, p_2 och p_3? Den förmodligen enklast tänkbara basen i $\mathcal{P}^2$ är

$$e_1 = 1, \quad e_2 = t, \quad e_3 = t^2.$$

Kan vi uttrycka dessa med hjälp av p_i? Det går om avbildningen

$$\begin{cases} p_1 = 1 + 2t + t^2 = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ p_2 = 4 + 4t + t^2 = 4e_1 + 4e_2 + e_3 \\ p_3 = 9 + 6t + t^2 = 9e_1 + 9e_2 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

är inverterbar. Detta är fallet om rangen av T är lika med 3 eller om determinanten av densamma är skild från 0, vilket är fallet (-4).

För att uttrycka t^2 räknar vi ut matrisens invers. Den sista raden motsvarar då $t^2 = e_3$ uttryckt i p-koordinaterna.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -5/4 & 2 & -3/4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -5/4 & 2 & -3/4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow t^2 = e_3 = 3p_1 - 3p_2 + p_3$$

KH:45a(M)

Uppgift: I ett linjärt rum V finns två koordinatsystem med baserna $\boldsymbol{e}$ och $\boldsymbol{e}'$, där $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{x}'$ alltså är samma vektor uttryckt i de olika koordinatsystemen. Om

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e_2' = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ e_3' = 2e_1 + 3e_2, \end{cases}$$

uttryck $\boldsymbol{x}'$-koordinaterna med hjälp av $\boldsymbol{x}$-koordinaterna.
Lösning: Vi vill alltså ta reda på vad x_i är om vektorn $\boldsymbol{u}$ skrivs

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i = \sum_{j=1}^{3} x_j' e_j'$$
$$= \begin{pmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ e_1' & e_2' & e_3' \\ | & | & | \end{pmatrix}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{x}'$$

där $\boldsymbol{f}$ är ett tredje koordinatsystem. Ur den sista ekvationen kan vi lösa ut $\boldsymbol{x}'$:

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} | & | & | \\ e_1' & e_2' & e_3' \\ | & | & | \end{pmatrix}_{\boldsymbol{f}}^{-1} \begin{pmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{x},$$

och om vi låter $\boldsymbol{e}$-koordinaterna vara lika med $\boldsymbol{f}$-koordinaterna blir den andra matrisen lika med enhetsmatrisen och den första kan vi plocka ur relationen i uppgiftstexten. Med

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

får vi

$$\boldsymbol{x}' = T^{-1}\boldsymbol{x} = [\text{MATLAB}] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -9 & 6 & 1 \\ 8 & -5 & -1, \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

det vill säga

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2, \\ x_2' = -9x_1 + 6x_2 + x_3, \\ x_3' = 8x_1 - 5x_2 - x_3. \end{cases}$$

KH:46

Uppgift: Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{x} = (1,2,3,1,1)$ och $\boldsymbol{y} = (1,2,1,-1,1)$ i $\boldsymbol{R}^5$.
Lösning: Om vi använder definition 2.3, så fås vinkeln θ mellan två vektorer ur

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}.$$

Eftersom vi använder standardskalärprodukten för $\boldsymbol{R}^n$, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ får vi

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 8$$
$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{1+4+9+1+1} = \sqrt{16} = 4$$
$$\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{1+4+1+1+1} = \sqrt{8}$$

och

$$\cos\theta = \frac{8}{4\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

KH:50

Uppgift: Visa att

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x \cos x}\, dx \leq 1.$$

Lösning: Vi använder Cauchy-Schwartz olikhet med skalärprodukten

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} fg\, dx.$$

Cauchy-Schwartz säger då att

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|,$$

där då $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\, dx}$. Här väljer vi till exempel

$$f(x) = \sqrt{\sin x}, \quad g(x) = \sqrt{\cos x}$$

varför

$$|\langle f, g\rangle| \leq \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx}\sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx} = \sqrt{\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}\sqrt{\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{1}\sqrt{1} = 1.$$

KH:52

Uppgift: Visa att

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

är en skalärprodukt i $\boldsymbol{R}^2$. Ta fram en ON-bas för $\boldsymbol{R}^2$ med avseende på denna skalärprodukt.
Lösning: Uppgiften är först att kontrollera definition 2.1:

1) Gäller den kommutativa lagen $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$? Ja, för $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ och $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = 2y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 5y_2x_2$.
2) Gäller den associativa lagen $\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$? Ja, eftersom $\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 2\alpha x_1y_1 - 2\alpha x_1y_2 - 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2 = \alpha(2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2) = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$.
3) Gäller den distributiva lagen $\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}\rangle$? Ja, då $\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}\rangle = 2(x_1 + z_2)y_1 - 2(x_1 + z_1)y_2 - 2(x_2 + z_2)y_1 + 5(x_2 + z_2)y_2 = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2z_1y_1 - 2z_1y_2 - 2z_2y_1 + 5z_2y_2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}\rangle$.
4) Är $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \geq 0$ för alla $\boldsymbol{x}$, och likhet endast då $\boldsymbol{x} = 0$? Ja, eftersom vi kan kvadratkomplettera och få $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5x_2^2 = 2(x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$.

Alla kraven är uppfyllda och vi har alltså en skalärprodukt framför oss.
En ON-bas tar vi fram med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi utgår från en känd bas i $\boldsymbol{R}^2$, förslagsvis $\boldsymbol{f}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0,1)$. Vi skapar sedan ON-basen i enlighet med sats 2.3 i kompendiet:

$$e_1 = \frac{\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{f}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cdot 0 - 2\cdot 0 + 5\cdot 0}}(1,0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0),$$
$$e_2' = \boldsymbol{f}_2 - \langle \boldsymbol{f}_2, e_1\rangle e_1 = (0,1) - \frac{1}{2}(2\cdot 0 - 2\cdot 1 - 2\cdot 0 + 5\cdot 0)(1,0) = (1,1)$$
$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2 - 2 + 5}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1).$$

KH:53

Uppgift: Är någon av

a) $\langle f, g\rangle = \int_a^b f'(t)g'(t)\, dt$,

b) $\langle f, g\rangle = \int_a^b f'(t)g'(t)\, dt + f(a)g(a)$

en skalärprodukt på $C[a,b]$?
Lösning: Det blir ytterligare en kontroll av definition 2.1.

1) $\langle f, g\rangle \stackrel{?}{=} \langle g, f\rangle$. a) Ja, enkelt, b) likaså.
2) $\langle \alpha f, g\rangle \stackrel{?}{=} \alpha\langle f, g\rangle$. a) Ja, enkelt, b) likaså.
3) $\langle f + g, h\rangle \stackrel{?}{=} \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$. a) Ja, b) Ja.
4) $\langle f, f\rangle \stackrel{?}{\geq} 0$, likhet bara då $f = 0$? a) $\langle f, f\rangle = \int_a^b [f'(t)]^2\, dt \geq 0$, men likhet för alla konstanta funktioner $f =$ konst. b) $\langle f, f\rangle = \int_z^b [f'(t)]^2\, dt + f^2(a) \geq 0$ med likhet bara då $f = 0$.

Slutsats: Endast alternativ b) är en skalärprodukt.

KH:55

Uppgift: Givet att $\|u\| > \|v\|$, visa att u och $u - v$ inte är ortogonala, det vill säga att

$$\langle u, u - v\rangle \neq 0.$$

Lösning: Vi använder först triangelolikheten och sedan Cauchy-Schwartz olikhet:

$$|\langle u, u - v\rangle| \geq |\langle u, u\rangle| - |\langle u, v\rangle| \geq \|u\|^2 - \|u\|\|v\| > \|u\|^2 - \|u\|\|u\| = 0.$$

KH:58

Uppgift: Ange samtliga vektorer i $\boldsymbol{R}^4$ som är ortogonala mot de båda vektorerna $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,1,3)$ och $\boldsymbol{u}_2 = (2,5,1,4)$.
Lösning: Uppgiften består alltså i att hitta alla vektorer $\boldsymbol{x}$ sådana att

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\rangle = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{x} = 0, \tag{1}$$

och

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\rangle = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{x} = 0, \tag{2}$$

om vi antar standardskalärprodukten i $\boldsymbol{R}^4$,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Ekvationerna ovan, (1) och (2), kan vi skriva om som ett ekvationssystem på formen $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Detta har vi gjort tidigare — när vi bestämde en bas för $N(\mathrm{A})$, nollrummet till A. Alla vektorer $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{R}^4$ som är ortogonala mot $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ är tillhör alltså $N(\mathrm{A})$. Vi kan då skriva alla tänkbara vektorer $\boldsymbol{x}$ som en linjärkombination av basen till $N(\mathrm{A})$. Vi löser ekvationen med elementära radoperationer. Multiplicera den första raden i A med två och subtrahera detta från den andra raden:

$$\mathrm{A} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Om $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ betyder det att vi kan välja $x_3 = s$ och $x_4 = t$ fritt. Den andra ekvationen (den andra raden i A ovan) säger då att

$$x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = s + 2t, \tag{3}$$

och ur den första ekvationen får vi

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2(s+2t) - s - 3t = -3s - 7t. \tag{4}$$

Vårt $\boldsymbol{x}$ har alltså blivit

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3s-7t \\ s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2},$$

där alltså e_1 och e_2 spänner $N(\mathrm{A})$ och därmed beskriver alla vektorer ortogonala mot $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$.

KH:61a

Uppgift: Ange en ortonormerad bas i det underrum i $\boldsymbol{R}^4$ som genereras av vektorerna

$$\boldsymbol{w}_1 = (1,1,1,1),\ \boldsymbol{w}_2 = (1,2,2,1),\ \boldsymbol{w}_3 = (2,3,1,6).$$

Lösning: Först noterar vi att $\boldsymbol{w}$-vektorerna är linjärt oberoende, eftersom rangen på matrisen

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

är 3 (kontrollera med t.ex. `rank(A)` i MATLAB. Alltså är dimensionen på underrummet som de genererar 3. För att bestämma en ortonormerad bas till detta underrum använder vi självklart Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Den finns i sats 2.5 på sidan 33 i Holmåkers kompendium.

Principen för Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod är att man har ett underrum med dimensionen n som har $n-1$ ortonormerade vektorer som man vill lägga till ännu en normerad vektor som skall vara ortogonal mot alla de andra. Man börjar med en normerad vektor i rummet, vilken som helst, och lägger sedan till en annan som man ser till är ortogonal mot den första. Genom att ta bort alla delar av den andra vektorn som är parallella mot den första ser man till att de blir ortogonala.

Om man kallar vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vill vi alltså att $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}'\rangle = 0$, där $\boldsymbol{v}'$ är den nya vektorn som är ortogonal mot $\boldsymbol{u}$. Genom att välja $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\, \boldsymbol{u}$ uppfylls detta eftersom $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}'\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ ($\boldsymbol{u}$ var ju normerad).

Låtom oss sålunda illustrera principen ovan genom att applicera ovan genomgångna tillvägagångssätt på uppgiftens givna vektorer. Börja med att normera $\boldsymbol{w}_1$ med standardskalärprodukten (ingen annan given),

$$e_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1).$$

Sedan skapar vi en vektor e_2' med hjälp av e_1 och $\boldsymbol{w}_2$ som inte är normerad men däremot ortogonal mot e_1, med

$$\begin{aligned} e_2' = \boldsymbol{w}_2 - \langle \boldsymbol{w}_2, e_1\rangle\, e_1 &= (1,2,2,1) - \frac{1}{2}(1+2+2+1)\frac{1}{2}(1,1,1,1) \\ &= (1,2,2,1) - \frac{1}{2}(3,3,3,3) = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1). \end{aligned}$$

Normeringen då,

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{1}\frac{1}{2}(-1,1,1,-1) = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)$$

(ganska meningslöst). Till sist skapar vi $\boldsymbol{e}'_3$ som skall vara ortogonal både mot e_1 och e_2:

$$\begin{aligned} e_3' &= \boldsymbol{w}_3 - \langle \boldsymbol{w}_3, e_2\rangle\, e_2 - \langle \boldsymbol{w}_3, e_1\rangle\, e_1 \\ &= (2,3,1,6) - \frac{1}{2}(-2+3+1-6)\frac{1}{2}(-1,1,1,-1) - \frac{1}{2}(2+3+1+6)\frac{1}{2}(1,1,1,1) \\ &= (2,3,1,6 + (-1,1,1,-1) - 3(1,1,1,1) \\ &= (-2,1,-1,2). \end{aligned}$$

Denna vektorn skall också normeras:

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+1+4}}(-2,1,-1,2) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2).$$

Alltså,

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \\ e_2 = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1) \\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2). \end{cases}$$

För självkänslans skull kan det vara vettigt att kontrollera att vektorerna verkligen är ortogonala mot varandra:

$$\langle e_1, e_2\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{2}[1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1)] = 0$$
$$\langle e_1, e_3\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{10}}[1\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2] = 0$$
$$\langle e_2, e_3\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{10}}[(-1)\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 2] = 0$$

Yes! :-)

KH:63

Uppgift: Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till underrummet $U \subset \mathbf{R}^5$ om U genereras av

$$u_1 = (1,2,0,0,0), \qquad u_2 = (1,0,3,0,0).$$

Lösning: Enligt definition 2.5 definieras $U^\perp$, det ortogogonala komplementet till U, enligt

$$U^\perp = \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall u \in U\}.$$

Vi vill alltså hitta alla vektorer v sådana att $\langle u_1, v\rangle = 0$ och $\langle u_2, v\rangle = 0$. Med andra ord skall vi lösa ekvationssystemet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} v = 0$$

vilket är det samma som att bestämma en bas för nollrummet till matrisen A.

$$A \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ger

$$v = (-6r, 3r, 2r, t, s) = r\underbrace{(-6,3,2,0,0)}_{e_1'} + t\underbrace{(0,0,0,1,0)}_{e_2} + s\underbrace{(0,0,0,0,1)}_{e_3}$$

där de tre basvektorerna är ortogonala men ej normerade ($e_1 = \frac{1}{7}e_1'$).

KH:64a

Uppgift: Ange den ortogonala projektionen av

$$u = (0,4,4,0)$$

på det underrum i $\mathbf{R}^4$ som genereras av

$$v_1 = (1,1,1,1), \qquad v_2 = (1,-1,1,-1).$$

Lösning: Eftersom $v_1 \perp v_2$ så kan vi använda normerade $e_i = v_i/\|v_i\|$ direkt i formeln ur sats 2.7.

$$u' = \langle u, e_1\rangle\, e_1 + \langle u, e_2\rangle\, e_2$$

där u' är den ortogonala projektionen av u på det aktuella underrummet, det vill säga

$$u = u' + u'', \quad u' \in U, u'' \in U^\perp.$$

Här får vi då

$$e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$$

och

$$\langle u, e_1\rangle = 4, \quad \langle u, e_2\rangle = 0,$$

så

$$u' = 4e_1 = (2,2,2,2).$$

KH:67a

Uppgift: Bestäm avståndet från $(0,4,4,0)$ till underrummet som genereras av

$$v_1 = (1,1,1,1), \qquad v_2 = (1,-1,1,-1).$$

Lösning: Vi söker alltså $\|u''\|$. I KH:64a räknade vi ut u', så då är u'' lätt att ta fram:

$$u'' = u - u' = (0,4,4,0) - (2,2,2,2) = (-2,2,2,-2),$$

vilket alltså ger oss $\|u''\| = \sqrt{4\cdot 4} = 4$.

KH:70(M)

Uppgift: Beräkna de minsta avståndet från $u = (0, 2, 4, 1, 6)$ till skärningen mellan de två hyperplanen

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \quad \text{och} \quad x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0.$$

Lösning: Vi skall alltså beräkna längden av det ortogonala komplementet av u på skärningen mellan planen. En bas för skärningen mellan planen är basen till $N(A)$, då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

vilken fås med `NA=null(A)`. Koefficienterna för ortogonala projektionen av u på $N(A)$, $u' \in N(A)$, får vi sedan genom att multiplicera `NA` med u, dvs. `k=NA'*u`. Själva u' får vi genom att beräkna `up=NA*k`. Vi söker dock längden på $u'' = u - u'$, vilken vi får som `norm(u-up)` vilken blir $3.6056 \approx \sqrt{13}$.

KH:73

Uppgift: Visa att

$$1,\ \sin t\ \cos t\ \sin 2t\ \cos 2t\ \sin 3t,\ \cos 3t\ \ldots$$

är sinsemellan ortogonala i $C[-\pi, \pi]$ med skalärprodukten $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$.
Lösning: Vi behöver alltså visa att följande tre likheter gäller

$$1)\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\,dt = 0, \quad n, m \geq 0$$
$$2)\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt\,dt = 0, \quad n \neq m$$
$$3)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\,dt = 0, \quad n \neq m$$

1) Använd att $\sin nt \cos mt = \frac{1}{2}[\sin(n+m)t + \sin(n-m)t]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\,dt = \begin{cases} -\frac{1}{2(n+m)}\Big[\cos(n+m)t\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(n-m)}\Big[\cos(n-m)t\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0, & n \neq m, \\ -\frac{1}{4n}\Big[\cos 2nt\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0, & n = m. \end{cases}$$

2) Använd att $\sin nt \sin mt = \frac{1}{2}[\cos(n+m)t - \cos(n-m)t]$ och titta bara på fallet $n \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt\,dt = \frac{1}{2(n+m)}\Big[\sin(n+m)t\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(n-m)}\Big[\sin(n-m)t\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

3) Använd att $\cos nt \cos mt = \frac{1}{2}[\cos(n+m)t + \cos(n-m)t]$ och titta bara på fallet $n \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\,dt = \frac{1}{2(n+m)}\Big[\sin(n+m)t\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(n-m)}\Big[\sin(n-m)t\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Mer allmänt: basfunktionerna e^{int}, $n \in \boldsymbol{N}$.

KH:74

Uppgift: Antag att $e_1, \ldots, e_n$ är en ortonormerad mängd i ett linjärt rum V med skalärprodukt. **a)** Om $u \in V$, $u' = \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j\rangle e_j$, visa att $\langle u - u', u'\rangle = 0$, **b)** Visa att $\sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j\rangle^2 \leq \|u\|^2$ (Bessels olikhet).
Lösning:
a) Vi skall alltså visa att $u' \in U$, $(u - u') \in U^{\perp}$ är ortogonala. Vi räknar på:

$$\langle u - u', u'\rangle = \langle u, u'\rangle - \underbrace{\langle u', u'\rangle}_{=\|u'\|^2} = \left\langle u, \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j\rangle e_j \right\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j\rangle^2$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j\rangle \langle u, e_j\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j\rangle^2 = 0$$

b) Först använder vi standardtricket

$$\|u\|^2 = \|u - u' + u'\|^2 = \langle u - u' + u', u - u' + u'\rangle = 2\langle u - u', u'\rangle + \|u - u'\|^2 + \|u'\|^2$$
$$= [\text{a})] = \|u - u'\|^2 + \|u'\|^2 \geq \|u'\|^2$$

eftersom en längd alltid är minst 0. Alltså är $\|u\| \geq \|u'\|$, vilket inte borde vara speciellt förvånande (projektionen är alltid kortare än originalvektorn). Nu kan vi räkna ut hur lång projektionen är med

$$\|u'\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j\rangle e_j, \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle e, e_j\rangle \sum_{j-1}^{k} \langle e, e_k\rangle \langle e_j, e_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j\rangle^2$$

eftersom $\langle e_j, e_k\rangle = 1$ om $j = k$ och noll annars. Vi är nu klara.

KH:77

Uppgift: **a)** Visa att $\langle f, g\rangle = \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,dt$ definierar en skalärprodukt på $\mathcal{P}^n$. **b)** Konstruera en ortonormerad bas för $\mathcal{P}^2$ med skalärprodukten ovan med hjälp av en Gram-Schmidt-ortogonalisering utgående från $v_1 = 1$, $v_2 = t$ och $v_3 = t^2$.
Lösning:
a) Vi skall kolla att definition 2.1 är uppfylld. De första tre kriterierna, kommutativiteten, associativiteten och distributiviteten är enkla och rakt på. Den fjärde, ickenegativiteten får man genom att studera

$$\langle f, f\rangle = \int_0^{\infty} f^2(t)e^{-t}\,dt \geq 0$$

vilket bara kan vara noll om $f = 0$ på hela $[0, \infty)$.
b) Vi följer formeln, där vi har nytta av att

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t}\,dt = n!$$

och vi får

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty 1 \cdot 1e^{-t}\,dt}} = 1$$

$$e_2' = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle\, e_1 = t - \langle t, 1\rangle\, 1 = t - \int_0^\infty te^{-t}\,dt = t - 1$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{t-1}{\int_0^\infty (t-1)^2 e^{-t}\,dt} = \frac{t-1}{2-2+1} = t-1$$

$$e_3' = v_3 - \langle v_3, e_1\rangle\, e_1 - \langle v_3, e_2\rangle\, e_2 = t^2 - \int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt - \int_0^\infty t^2(t-1)e^{-t}\,dt \cdot (t-1) =$$

$$= t^2 - 2 - (3! - 2!)(t-1) = t^2 - 4t + 2$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3\|} = \frac{t^2-4t+2}{\sqrt{\int_0^\infty (t^2-4t+2)^2 e^{-t}\,dt}} = \frac{t^2-4t+2}{\sqrt{\int_0^\infty (t^4 - 8t^3 + 20t^2 - 16t + 4)^2 e^{-t}\,dt}} =$$

$$= \frac{t^2-4t+2}{24 - 8\cdot 6 + 40 - 16 + 4} = \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 2).$$

KH:79c(M)

Uppgift: Lös med hjälp av minsta kvadratmetoden ekvationssytemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ -2x_1 + x_2 &= -4, \\ x_1 - 3x_2 &= -2, \\ -x_1 + x_2 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 &= 5. \end{cases}$$

Lösning: Vi skall alltså lösa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{b}}.$$

Enligt sats 2.10 så är minsta kvadratmetoden ekvivalent med att lösa

$$A^T A\boldsymbol{x} = A^T \boldsymbol{b}.$$

I MATLAB kan vi göra detta på två sätt:

1. (bra sätt) `x=A\b`,
2. (mindre bra sätt) `x=inv(A'A)*A'*b`.

Svaret blir att $x_1 = 2$ och $x_2 = 1$.

KH:81a(M)

Uppgift: Ange den andragradskurva $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ som, i minsta kvadratmening, bäst ansluter till

$$(x, y) = (-2. -2), \quad (-1, 1), \quad (0, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 3).$$

Lösning: För varje enskild punkt får vi skriva upp ekvationen

$$ax^2 + bx + c = y,$$

vilket ger oss ett ekvationssystem på formen

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}.$$

Insättning av alla punkterna ger

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Med MATLAB:s `x=A\y` får vi att $a = \frac{25}{70}$, $b = \frac{3}{10}$ och $c = \frac{38}{35}$.

KH:83

Uppgift: Låt e_i vara en ortonormerad bas i det linjära rummet V med skalärprodukt, och sätt

$$\begin{cases} 3e_1' &= e_1 + 2e_2 + 2e_4, \\ 3e_2' &= 2e_1 - e_2 + 2e_3, \\ 3e_3' &= 2e_2 + e_3 - 2e_4, \\ 3e_4' &= -2e_1 + 2e_3 + e_4. \end{cases}$$

Verifiera att även e_i' är en ortonormerad bas och uttryck koordinaterna i den ursprungliga basen.

Lösning: Vi har att

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_1' & e_2' & e_3' & e_4' \\ | & | & | & | \end{pmatrix}_e = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}_e = T.$$

Om e_i' är en ortonormerad bas innebär detta att $\left\langle e_i', e_j' \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, vilket kan översättas med att $T^T T = E$:

$$T^T T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E.$$

Alltså är e'_i en ortonormerad bas. Vi skall nu ser hur koordinaterna ändras mellan koordinatsystemen. Dvs, vi vill ha reda på var $\boldsymbol{x}'$ är givet $\boldsymbol{x}$ i

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}_{e''} \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e'_1 & e'_2 & e'_3 & e'_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}_{e''} \boldsymbol{x}'.$$

Väljer vi att $\boldsymbol{e}'' = \boldsymbol{e}$, får vi att

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}' = T^{-1}\boldsymbol{x} = T^T\boldsymbol{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

eftersom e_i är ortonormerad innebär att T är detsamma.

KH:87

Uppgift: Låt A vara en ortogonal $n \times n$-matris, där n är udda, och låt $\det A = 1$. Visa att $\det(A - E) = 0$.
Lösning: Eftersom A är ortogonal har vi (enligt definitionen av ortogonal matris) att $A^TA = AA^T = E$. Om vi använder detta tillsammans med att $\det A = 1$ får vi

$$\begin{aligned}\det(A-E) &= \det(A - AA^T) = \det A \det(E - A^T) = \det(E - A^T) = \det(E-A)^T = \\ &= \det(E - A) = \det(-E(A-E)) = \det(-E)\det(A-E) = \\ &= (-1)^n \det(A-E) = -\det(A-E).\end{aligned}$$

Om $x = -x$ måste $x = 0$, alltså är $\det(A - E) = 0$.

KH:90

Uppgift: Om T är ortogonal och $T + E$ är inverterbar, visa att $A = (T-E)(T+E)^{-1}$ är skevsymmetrisk.
Lösning: Om en matris A är skevsymmetrisk innebär det att $A^T = -A$. Ytterligare en bra sak att använda är att $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$. Vi kan börja räkna, och vi försöker använda T:s ortogonalitet på lämpligt sätt.

$$\begin{aligned} A &= (T-E)(T+E)^{-1} = T(T+E)^{-1} - (T+E)^{-1} = [(T+E)T^{-1}]^{-1} - (T+E)^{-1} = \\ &= [T^{-1} = T^T] = [(T+E)T^T]^{-1} - (T+E)^{-1} = (T^T+E)^{-1} - (T+E)^{-1} \\ \Rightarrow A^T &= [(T^T+E)^{-1}]^T - [(T+E)^{-1}]^T = [(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T] = \\ &= (T+E)^{-1} - (T^T+E)^{-1} = -A. \end{aligned}$$

KH:91

Uppgift: Bestäm andragradspolynomet $p(t) = at^2 + bt + c$ så att integralen

$$\int_{-1}^{1} [t^4 - p(t)]^2\,dt$$

blir så liten som möjligt.
Lösning: Uppgiften är att beräkna längden på den del av t^4 som ligger i det ortogonala komplementet till $\mathcal{P}^2$. Vi kan se problemet som att vi ursprungligen befinner i ett stort funktionsrum, t.ex. $C[-1,1]$. I detta rum finns underrummet $\mathcal{P}^2[-1,1]$ som genereras av t.ex. 1, t, t^2, dvs. en godtycklig vektor i $\mathcal{P}^2[-1,1]$ skrivs precis som $p(t)$. Uppgiften är alltså att hitta det minsta avståndet från $u = t^4 \in C[-1,1]$ till $\mathcal{P}^2[-1,1]$. Vi mäter detta avstånd med skalärprodukten

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

För att kunna göra projektionen $u' \in \mathcal{P}^2[-1,1]$ av $u = t^4$ måste vi dock ha en ON-bas, vilken vi t.ex. tar fram med Gram-Schmidt. I MATHEMATICA:

```
In[1]:=   << LinearAlgebra`Orthogonalization`
In[2]:=   GramSchmidt[{1, t, t^2},
            InnerProduct -> (Integrate[#1 #2,
            {t, -1, 1}] &)] // Simplify
```

Out[2]:= $\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}t,\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(-1+3t^2)\}$
På riktigt, där vi utnyttjar att

$$\int_{-1}^{1} t^n\,dt = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & n \text{ jämn} \\ 0, & n \text{ udda}\end{cases}$$

får vi

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$e'_2 = t - \langle t, e_1\rangle\, e_1 = t - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = t,$$

$$e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = \frac{t}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

$$e'_3 = t^2 - \langle t^2, e_1\rangle\, e_1 - \langle t^2, e_2\rangle\, e_2 = t^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,dt - \frac{3}{2}t\int_{-1}^{1} t^3\,dt = t^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3} = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{e'_3}{\|e'_3\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{1}{3})^2\,dt}} = (t^2 - \frac{1}{3})\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{9}}} = (3t^2-1)\frac{1}{\sqrt{\frac{18}{5} - 4 + 2}} = \\ &= \sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2 - 1). \end{aligned}$$

Projektionen av t^4 på underrummet blir nu

$$
\begin{aligned}
u' &= \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2 + \langle u, e_3\rangle e_3 = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^4\,dt + \frac{3}{2}t\int_{-1}^{1} t^5\,dt + \frac{5}{8}(3t^2-1)\int_{-1}^{1} t^4(3t^2-1)\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{5} + \frac{5}{8}\left(3\frac{2}{7} - \frac{2}{5}\right)(3t^2-1) = \frac{1}{5} + \frac{5}{8}\frac{16}{35}(3t^2-1) = -\frac{3}{35} + \frac{6}{7}t^2
\end{aligned}
$$

vilket alltså är det sökta polynomet (som minimerar avståndet från t^4 till $\mathcal{P}^2[-1,1]$).

KH:92

Uppgift: Avgör vilka av följande tre avbildningar $T : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ som är linjära:

$$T_1(x) = (x_2^2, x_2), \quad T_2(x) = (x_1 + x_2, x_1), \quad T_3(x) = (x_1, 1).$$

Lösning: Vi skall alltså kontrollera att definition 3.1 är uppfylld — T skall uppfylla 1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$ och 2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)\ \forall \alpha \in \boldsymbol{R}$. Vi börjar med det första testet.

$$
\begin{aligned}
T_1(x+y) &= ((x_1+y_1)^2, x_2+y_2) = (2x_1y_1 + x_1^2 + y_1^2, x_2+y_2) = T_1(x) + T_1(y) + (2x_1y_1, 0) \neq \\
&\neq T_1(x) + T_1(y) \qquad \forall x, y \\
T_2(x+y) &= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 + y_1) = (x_1 + x_2, x_1) + (y_1 + y_2, y_1) = \\
&= T_2(x) + T_2(y) \qquad \forall x, y \\
T_3(x+y) &= (x_1 + y_1, 1) = (x_1, 1) + (y_1, 0) = T_3(x) + T_3(y) - (0,1) \neq \\
&\neq T_3(x) + T_3(y) \qquad \forall x, y
\end{aligned}
$$

Kvar har vi då bara en enda kandidat, T_2, som vi gör det andra testet på:

$$T_2(\alpha x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1) = \alpha(x_1 + x_2, x_1) = \alpha T_2(x).$$

(Även T_3 uppfyller det andra testet, men det spelar ju ingen roll.) Slutsats: T_2 är en linjär avbildning, T_1 och T_3 är bara avbildningar sådär i största allmänhet.

KH:94cd

Uppgift: Låt x_1 och x_2 vara koordinater med avseende på en ON-bas $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ i ett plan. Bestäm matrisen för följande linjära avbildningar

c) den ortogonala projektionen på linjen $x_1 + x_2 = 0$,

d) speglingen i linjen $x_1 + x_2 = 0$.

Lösning:
c)) Linjen $x_1 + x_2 = 0$ är parallel med vektorn $(1,-1)$, vilket betyder att projektionen $\boldsymbol{p}$ av en godtycklig vektor $\boldsymbol{v}$ på linjen kan beräknas med den gamla hederliga projektionsformeln,

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{v}\cdot(1,-1)}{\|(1,-1)\|^2}(1,-1) = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)(1,-1) = \frac{1}{2}(v_1 - v_2, v_2 - v_1),$$

vilket är det samma som att skriva

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v},$$

vilket då ger den sökta avbildningsmatrisen. Det finns också ett annat sätt att lösa uppgiften på — vi projicerar ner koordinataxlarna var för sig på linjen. Om vi kallar projektionerna för $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ får vi

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{2}(1,-1), \qquad F(\boldsymbol{e}_2) = \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{2}(-1,1)$$

Och matrisen blir

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ F(\boldsymbol{e}_1) & F(\boldsymbol{e}_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rent allmänt blir matrisen för projektion på en vektor $\boldsymbol{e}$, $A = \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T$.
d) Med samma beteckningar som i c) med tillägget att $\boldsymbol{s}$ är speglingen av $\boldsymbol{v}$ i linjen, får vi att

$$\boldsymbol{s} + \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{p},$$

vilket vi kan skriva om som

$$\boldsymbol{s} = 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{v} = [\text{ur c)}] = (v_1 - v_2, v_2 - v_1) - (v_1, v_2) = (-v_2, -v_1).$$

Eller, med hjälp av avbildningsmatrisen,

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}.$$

Allmänt blir avbildningsmatrisen för spegling i en vektor $\boldsymbol{e}$, $A = 2\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T - E$.

KH:95d

Uppgift: Låt x_1, x_2 och x_3 vara koordinater med avseende på en positivt orienterad ON-bas $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ i rummet. Bestäm matrisen i denna basen för speglingen i planet

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Lösning: Den normerade normalen till planet är $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Speglingen av en vektor $\boldsymbol{v}$ ges nu av

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s} &= \boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = (v_1, v_2, v_3) - \frac{2}{3}(v_1 + v_2 + v_3)(1,1,1) = \\
&= \frac{1}{3}(v_1 - 2v_2 - 2v_3, -2v_1 + v_2 - 2v_3, -2v_1 - 2v_2 + v_3),
\end{aligned}
$$

eller med hjälp av avbildningsmatrisen,

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}.$$

KH:96

Uppgift: Givet avbildningen

$$F(u) = \frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt},$$

Vi får då

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t - 2t(\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2) = \\ &= 2\alpha_2 + (6\alpha_3 - 2\alpha_1)t - 4\alpha_2 t^2 - 6\alpha_3 t^3 \end{aligned}$$

Vilket kan formuleras som att om man skriver

$$u = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

så får man att

$$F(u) = (2\alpha_2, 6\alpha_3 - 2\alpha_1, -4\alpha_2, -6\alpha_3),$$

vilket på matrisform blir

$$F(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} u.$$

KH:103

Uppgift: Låt e_1, e_2 och e_3 vara en bas i rummet och F en linjär avbildning med matrisen

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i denna bas. Vad är då F i basen

$$\begin{cases} e_1' = e_2 - e_3 \\ e_2' = e_1 - e_2 + e_3 \\ e_3' = -e_1 + e_2 \end{cases} ?$$

Lösning: Om vi tittar på hur avbildningen fungerar i de olika baserna ser ut har vi att

$$\boldsymbol{y} = F\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{y}' = F'\boldsymbol{x}'.$$

Om vi kan fundera ut hur transformationsmatrisen mellan baserna, T, ser ut, har vi också relationerna

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}', \qquad \boldsymbol{y} = T\boldsymbol{y}'.$$

Vi kan då skriva

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y} = F\boldsymbol{x}, \\ \Leftrightarrow\quad &T\boldsymbol{y}' = FT\boldsymbol{x}', \\ \Leftrightarrow\quad &\boldsymbol{y}' = \underbrace{T^{-1}FT}_{=F'}\boldsymbol{x}'. \end{aligned}$$

Alltså gäller att $F' = T^{-1}FT$. Ur uppgiften kan vi plocka fram att

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Denna är tyvärr inte ortogonal, så måste man räkna för hand får man invertera den, t.ex. med Jacobis metod. Alternativet är t.ex. MATLAB. Man får i alla fall att

$$F' = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

KH:104(M)

Uppgift: Samma som uppgift 103, fast med matriserna

$$F = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösning: Precis som förut, med `Fprim=inv(T)*F*T` får man

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(T har F:s egenvektorer som kolonner, F:s egenvärden är 1, 2 och 3).

KH:105

Uppgift: Låt $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ och $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ vara baser i $\boldsymbol{R}^3$ där

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= (2,1,1), \quad \boldsymbol{u}_2 = (2,-1,1), \quad \boldsymbol{u}_3 = (1,2,1), \\ \boldsymbol{v}_1 &= (3,1,-5), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,1,-3), \quad \boldsymbol{v}_3 = (-1,0,2). \end{aligned}$$

a) Bestäm övergångsmatrisen från B till B'.

b) Låt $\boldsymbol{w} = (-5,8,-5)$. Bestäm $\boldsymbol{w}$:s koordinater i baserna B och B'.

Lösning:
a) Uttryckt i den vanliga basen i $\mathbb{R}^3$, skrivs en godtycklig vektor som

$$w = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} w_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} w_{B'}, \tag{5}$$

så övergångsmatrisen från B till B' blir

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ -4 & -6 & -1 \\ 10 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Ur ekvation (5) ser vi hur vi kan bestämma w:s koordinater i t.ex. basen B':

$$w_{B'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} w = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} w = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Koordinaterna i basen B får vi sen mha

$$w_B = T^{-1} w_{B'} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

KH:108

Uppgift: Låt $\mathcal{P}^n$ vara vektorrummet av alla polynom av högst grad n. Betrakta deriveringsavbildningen,

$$Dp(x) = p'(x), \qquad \forall p \in \mathcal{P}^n.$$

Bestäm matrisen för D i baserna

a) $B_1 = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$,

b) $B_2 = \{1, x-c, \frac{1}{2!}(x-c)^2, \frac{1}{3!}(x-c)^3, \dots, \frac{1}{n!}(x-c)^n\}$.

Lösning:
a) Med ett visst missbruk av notationen kan man skriva

$$DB_1 = \{0, 1, 2x, 3x^2, \dots, nx^{n-1}\}$$

varför

$$[D]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Med samma notationsmissbruk får vi nu istället

$$\begin{aligned} DB_2 &= \{0, 1, \frac{2}{2!}(x-c), \frac{3}{3!}(x-c)^2, \dots, \frac{n}{n!}(x-c)^{n-1}\} = \\ &= \{0, 1, x-c, \frac{1}{2!}(x-c)^2, \frac{1}{3!}(x-c)^3, \dots, \frac{1}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}\}, \end{aligned}$$

varför

$$[D]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

KH:116d

Uppgift: Bestäm den geometriska betydelsen av avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösning: Observera först att $\det A = 1$, samt att A är ortogonal. Enligt sats 3.5 är den då en rotation. Det betyder att A har formen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Testar man med att $\cos\theta = \frac{3}{5}$ får man att $\theta \approx 53.1°$. Kontroll ger att detta stämmer även med övriga element i A.

KH:117c

Uppgift: Matrisen

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

motsvarar en rotation kring en viss axel. Visa detta samt ange rotationsaxeln och rotationsvinkeln.
Lösning: Observera först att A är ortogonal och att $\det A = 1$. Om vi tar en vektor x som är parallell med rotationsaxeln måste

$$\begin{aligned} & Ax = x \\ \Leftrightarrow \quad & (A - E)x = 0 \end{aligned}$$

gälla. Detta ger ett ekvationssystem som vi kan lösa med Gausseliminering:

$$A - E = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{R.E.}} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 0 & 42 & -28 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{\text{R.E.}} \begin{pmatrix} 0 & -126 & 84 \\ 2 & -10 & 6 \\ 0 & 42 & -28 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{R.E.}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så $\boldsymbol{x} = t(1,2,3)$, vilket alltså motsvarar rotationsaxelns riktning. Hur skall vi nu få reda på rotationsvinkeln? Kanske enklast är att ta en vektor som är vinkelrät mot rotationsaxeln och se hur mycket den vrids när den blir utsatt för A. Alla vektorer som är vinkelräta mot $\boldsymbol{x}$ ligger i planet

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0,$$

till exempel vektorn $\boldsymbol{u} = (1,1,-1)$. Vi får nu att

$$\boldsymbol{u}' = A\boldsymbol{u} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vinkeln mellan $\boldsymbol{u}'$ och $\boldsymbol{u}$ får vi med hjälp av definitionen av skalärprodukten:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{u}'\|} = \frac{-1-1-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -1 \quad\Longrightarrow\quad \theta = \pi + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

eller med andra ord en rotation med ett halvt varv kring axeln.

KH:119

Uppgift: Beräkna

$$\int (xe^x \cos x - 3e^x \sin x)\,dx \tag{6}$$

med "matrismetoden".
Lösning: Se exempel 3.10 i kompendiet för ett exempel. Vi vill försöka hitta ett lämpligt rum med lämpliga basfunktioner så att vi kan skriva om (6),

$$g = \int f\,dx,$$

som

$$Dg = f.$$

Dvs. vi vill hitta en lämplig D-matris. Ett förslag på ett rum med de önskvärda egenskaperna är $U \subset C^1(\boldsymbol{R})$ med basfunktionerna

$$f_1 = \sin xe^x, \quad f_2 = \cos xe^x, \quad f_3 = x\sin xe^x, \quad f_4 = x\cos xe^x.$$

Deriverar vi dessa får vi

$$\begin{aligned} Df_1 &= (\cos x + \sin x)e^x = f_1 + f_2 \\ Df_2 &= (\cos x - \sin x)e^x = -f_1 + f_2 \\ Df_3 &= (\sin x + x\cos x + x\sin x)e^x = f_1 + f_3 + f_4 \\ Df_4 &= (\cos x - x\sin x + x\cos x)e^x = f_2 - f_3 + f_4 \end{aligned}$$

så på matrisform får vi

$$D\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{f}.$$

Eftersom (6) kan skrivas som

$$g = \int (f_4 - 3f_1)\,dx$$

har vi att

$$Dg = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket är ett ekvationssytem vi lätt kan lösa med Gausseliminering. Lösningen är $g = \frac{1}{2}(-4,3,1,1) = -2\sin xe^x + \frac{3}{2}\cos xe^x + \frac{1}{2}x\sin xe^x + \frac{1}{2}x\cos xe^x$.

KH:120

Uppgift: Om T är ortogonal 2×2-matris sådan att $T^2 + E = 0$, vilken geometrisk tolkning har då T?
Lösning: Enligt sats 3.5 kan alla ortogonala 2×2-matriser antingen tolkas som speglingar eller rotationer. Det betyder att $T^2\boldsymbol{v}$ är antingen $\boldsymbol{v}$ roterad eller speglad två gånger. Då

$$(T^2 + E)\boldsymbol{v} = T^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

kan vi utesluta att T är en spegling eftersom två speglingar rimligtvis ger tillbaka den ursprungliga vektorn. Istället måste T vara en rotation. Nu har vi att

$$T^2\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v},$$

så T^2 måste vara en rotation ett halvt varv kring origo. Då måste T vara en kvarts varvs rotation (antingen mot- eller medurs, det går inte att avgöra).

KH:123cd

Uppgift: Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till

c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösning:
c) Vi utgår från egenvärdesekvationen

$$\begin{aligned} & Ag = \lambda g \\ \Leftrightarrow \quad & (A - \lambda E)g = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \det(A - \lambda E) = 0 \end{aligned}$$

För att beräkna egenvärdena är det enklast att utgå från den tredje varianten ovan. Vi får då

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 + 1 - 1 - (2-\lambda) - (2-\lambda) + (2-\lambda) =$$
$$= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2)$$

Så $\lambda_2 = 2$, $\lambda_{1,3} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$. För att räkna ut egenvektorerna löser vi egenvärdesekvationen, variant två $[(A-E)g = 0]$, för de olika λ_i:

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_3 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Här gör vi på precis samma sätt:

$$0 = \det(A - E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda) + 3 - 5(2+\lambda) - 2(3+\lambda) =$$
$$= (4-\lambda^2)(3+\lambda) - 13 - 7\lambda =$$
$$= (12 + 4\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3) - 13 - 7\lambda = -(\lambda+1)^3$$

så A har bara ett enda reellt egenvärde, $\lambda = -1$. Motsvarande egenvektor blir nu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow g = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

KH:124

Uppgift: Visa att om u är en egenvektor med egenvärdet λ till den linjära avbildningen F, så är u en egenvektor med egenvärdet λ^2 till F^2.
Lösning: Vi använder egenvärdesekvationen:

$$\begin{aligned} & Fu = \lambda u \\ \rightarrow \quad & F^2 u = \lambda F u = \lambda^2 u. \end{aligned}$$

KH:126

Uppgift: Låt T vara en linjär avbildning, och låt u_1 och u_2 vara två egenvektorer med olika egenvärden till T. Visa att om $\alpha_1 \neq 0$ och $\alpha_2 \neq 0$ så är $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ ej någon egenvektor till T.
Lösning: Vi har ur uppgiftstexten att

$$\begin{cases} Tu_1 = \lambda_1 u_1, \\ Tu_2 = \lambda_2 u_2, \end{cases}$$

där $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Om vi använder detta får vi för vår eventuella, men helst inte, egenvektor $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$,

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 \neq \lambda_3(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$$

eftersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En linjärkombination av egenvektorer tillhörande olika egenvärden är alltså inte någon egenvektor, vilket känns ganska bra. Varför?

KH:127

Uppgift:

a) Bestäm konstanten a så att $u = (1, 2, -2)$ blir en egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

b) Finn, för detta a, en ortonormerad bas av egenvektorer i $\boldsymbol{R}^3$.

Lösning:
a) För att hitta a, använder vi egenvärdesekvationen $Au = \lambda u$ rakt av:

$$Au = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2-2a \end{pmatrix}$$

Så a måste vara lika med 4 för att u skall bli en egenvektor, med egenvärdet $\lambda = 3$.
b) Vi försöker nu hitta resterande två egenvärden med tillhörande egenvektorer.

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(2-\lambda) = \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) + 8(\lambda - 3) = (3-\lambda)\lambda(\lambda - 6) \end{aligned}$$

så egenvärdena är $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 6$. Egenvektor svarande mot λ_2 blir då, genom lösning av $Au_2 = \lambda_2 u_2$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Egenvektorn tillhörande λ_3 blir likaledes

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att alla de tre egenvektorerna är ortogonala, och för att få en ortonormerad bas behöver vi bara normera dem. Alla har längden 3 så vi får ON-basen

$$e_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2), \qquad e_2 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1), \qquad e_3 = \frac{1}{3}(2, 2, 1).$$

KH:130

Uppgift: Låt $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ vara en avbildning definierad genom

$$T(p(x)) = xp'(x+1) + p(x) \qquad \forall p \in \mathcal{P}_2.$$

a) Visa att T är linjär.

b) Bestäm matrisen för T i basen $\{1, x, x^2\}$.

c) Ange alla egenvärden och egenvektorer till T.

Lösning:
a)

$$\begin{aligned} T(p+q) &= xD(p(x+1) + q(x+1)) + p(x) + q(x) = \\ &= xp'(x+1) + p(x) + xq'(x+1) + q(x) = T(p) + T(q), \\ T(\alpha p) &= xD(\alpha p(x+1)) + \alpha p(x) = \alpha(xp'(x+1) + p(x)) = \alpha T(p), \end{aligned}$$

T är alltså linjär.
b) Med $B = \{1, x, x^2\}$ får vi (med lite notationsmissbruk)

$$DB = \{x \cdot 0 + 1, x \cdot (1) + x, x \cdot 2(x+1) + x^2\} = \{1, 2x, 2x + 3x^2\}$$

så på matrisform får vi att

$$D_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Vi håller oss fortfarande till basen $\{1, x, x^2\}$. Från linjär algebra och geometri kommer vi ihåg (?) att determinanten av en triangulär matris är lika med produkten av diagonalelementen (om du inte kommer ihåg det, visa det!) Detta ger att en triangulär matris har sina egenvärden som diagonalelement. Vi har alltså

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Egenvektorerna blir relativt enkla att beräkna. För λ_1 tittar vi på

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{g}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

λ_2 ger oss

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{g}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

och till sist, för λ_3 har vi

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{g}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

KH:132

Uppgift: Låt $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vara rötterna (räknade med multiplicitet) till den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$. Visa att

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \operatorname{sp} A \quad \text{och} \quad \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A.$$

Lösning: Vi försöker utnyttja att

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) \tag{7}$$

där högerledet helt enkelt är det faktoriserade karakteristiska polynomet. Vi börjar med att försöka beräkna vänsterledet.

För att beräkna $\det(A - \lambda E)$ för ett allmänt A skriver vi $\det(A - \lambda E) = \det(B_1\ B_2\ B_3\ \cdots\ B_n)$, där B_i är den i:te kolumnen i matrisen $A - \lambda E$. Vi kan nu skriva $B_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}) - \lambda e_i = A_i - \lambda e_i$ där e_i är en vektor bestående av nollor utom på plats i som är en etta (den i:te enhetsvektorn). Eftersom $\det(A' + A''\ B) = \det(A'\ B) + \det(A''\ B)$ får vi då att

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= \det(A_1 - \lambda e_1\ A_2 - \lambda e_2\ \cdots\ A_n - \lambda e_n) = \\
&= \det(A_1\ A_2 - \lambda e_2\ \cdots\ A_n - \lambda e_n) + \det(-\lambda e_1\ A_2 - \lambda e_2\ \cdots\ A_n - \lambda e_n) = \dots = \\
&= \det(-\lambda e_1\ -\lambda e_2\ \cdots\ -\lambda e_n) + \sum \det(\text{en kolumn med } A_i) + \\
&+ \sum \det(\text{två kolumner med } A_i) + \dots + \det(A_1\ A_2\ \cdots\ A_n) = \\
&= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \dots + \det A.
\end{aligned}$$

Högerledet i (7) kan vi å andra sidan utveckla till

$$(-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \dots + \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

Identifierar vi termer ser vi att $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \operatorname{sp} A$ och att $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det A$, vilket var vad vi skulle visa.

KH:134ab(M)

Uppgift: Avgör om matrisen A är diagonaliserbar och beräkna i så fall T sådan att $T^{-1}AT$ är en diagonalmatris om

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning: En matris är diagonaliserbar om alla egenvektorerna är linjärt oberoende. Detta inträffar a) om man har tur, eller b) om alla egenvärdena är olika. Eftersom vi får använda MATLAB är det en smal sak att direkt räkna ut T-matrisen:

```
[T,v] = eig(A)
```

För att sedan kolla om det är en bra T-matris räknar vi bara ut rangen på den med `rank(T)`. På detta vis får vi

$$\text{a)}\quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(fast man behöver *inte* normera kolumnerna). Båda matriserna är således diagonaliserbara.

KH:139

Uppgift: Antag att A är diagonaliserbar med samtliga egenvärden ≥ 0. Visa att det finns en matris B sådan att $B^2 = A$.
Lösning: Eftersom A är diagonaliserbar, kan vi skriva

$$A = TDT^{-1} = T\sqrt{D}\sqrt{D}T^{-1} = T\sqrt{D}T^{-1}T\sqrt{D}T^{-1} = B^2,$$

där

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

vilket går bra eftersom egenvärdena $\lambda_i \geq 0$. Ett alternativt sätt som speglar hur man kan definiera godtyckliga funktioner av matriser (eller komplexa tal för den delen) är att betrakta Taylorutvecklingen av $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$$

Motsvarande matrisfunktion skulle då bli

$$\sqrt{B+E} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}B^n.$$

KH:140

Uppgift: Antag att A är en reell, symmetrisk matris sådan att $A^3 = E$. Visa att $A = E$.
Lösning: Eftersom A är reell och symmetrisk gäller enligt spektralsatsen att $A = TDT^T$, där alltså $T^TT = E$. Vi får då att

$$A^3 = TD\underbrace{T^TT}_{E}D\underbrace{T^TT}_{E}DT^T = TD^3T^T = E$$

dvs.

$$D^3 = T^T ET = T^T T = E,$$

så $D = E$ och $A = TDT^T = TT^T = E$.

KH:144c

Uppgift: Bestäm en ortogonal matris T sådan att $T^T AT$ är en diagonalmatris om

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Först noterar vi att A är reell och symmetrisk, så enligt spektralsatsen är det möjligt att hitta en ortogonal diagonaliseringsmatris T. För att lösa en sån här uppgift bör vi göra följande 3 steg:

1. Beräkna egenvärdena till A.
2. Beräkna de normerade egenvektorerna till A.
3. $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ och $T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$, där λ_i är egenvärdena och $\boldsymbol{g}_i$ är de normerade egenvektorerna till A.

Egenvärdena: Lös $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -5-\lambda & 7 \\ -2 & 7 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (5+\lambda)^2(4-\lambda) + 28 + 28 + 49(\lambda - 4) + 4(5+\lambda) + 4(5+\lambda) = \\
&= (5+\lambda)(20 - \lambda - \lambda^2 + 8) + 56 - 196 + 49\lambda = \\
&= 140 + 23\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3 - 140 + 49\lambda = \\
&= -\lambda(\lambda^2 + 6\lambda - 72) = -\lambda(\lambda + 12)(\lambda - 6) = 0,
\end{aligned}$$

så egenvärdena är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -12$ och $\lambda_3 = 6$.

Egenvektorerna: För varje egenvärde skall vi nu lösa $(A - \lambda E)\boldsymbol{g} = 0$. Vi börjar med $\lambda_1 = 0$, och får

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -12 & 12 \\ -2 & -5 & 7 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Med $\lambda_2 = -12$:

$$\begin{pmatrix} 16 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 7 \\ -2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 54 & 54 \\ -2 & 7 & 7 \\ -2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Till sist $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -11 & 7 \\ -2 & 7 & -11 \end{pmatrix} \overset{\text{R.E.}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}_3 = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Vi får alltså

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

KH:150

Uppgift: Talen a_k och b_k definieras för $k \geq 0$ av

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + 2b_k, & a_0 = 3 \\ b_{k+1} = 2a_k + b_k, & b_0 = 1. \end{cases}$$

Beräkna a_{10} och b_{10}.
Lösning: Om vi sätter $x_k = (a_k, b_k)$ kan vi skriva det hela på matrisform som

$$x_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} x_k,$$

så vad vi skall beräkna är $x_{10} = A^{10}x_0$. Vi ser att eftersom A är symmetrisk kan vi enligt spektralsatsen skriva $A = TDT^T$, och

$$A^3 = TDT^TTDT^TTDT^T = TD^3T^T \quad \Longrightarrow \quad A^n = TD^nT^T,$$

där D^n är mycket enkel att räkna ut. Vi behöver alltså räkna ut egenvärdena och egenvektorerna till A. Först egenvärdena,

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

så $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Egenvektorerna så (vilka vi måste normera för att T skall bli ortogonal), λ_1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} g_2 = 0 \Rightarrow g_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

λ_2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} g_2 = 0 \Rightarrow g_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}.a$$

Detta betyder att vi kan skriva $A = TDT^T$ med

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får nu ($T^T = T$!)

$$A^n = TD^nT^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ 3^n & 3^n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^{n+2}+3^n & (-1)^{n+1}+3^n \\ (-1)^{n+1}+3^n & (-1)^n+3^n \end{pmatrix}.$$

Med $x_0 = (3,1)$ och $n = 10$ får vi då

$$x_{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^{10} & -1+3^{10} \\ -1+3^{10} & 1+3^{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-1+3\cdot 3^{10}+3^{10} \\ -3+1+3\cdot 3^{10}+3^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\cdot 3^{10} \\ -1+2\cdot 3^{10} \end{pmatrix}.$$

KH:151

Uppgift: Talen x_n, y_n och z_n definieras för $n \geq 0$ av

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 4y_n - 3z_n, & x_0 = 3 \\ y_{n+1} = -3x_n + 2y_n + 3z_n, & y_0 = 2 \\ z_{n+1} = -4x_n - 4y_n + 2z_n, & z_0 = 1. \end{cases}$$

Visa att $y_n \cdot 5^{-n}$ har ett gränsvärde då $n \to \infty$ och beräkna detta.
Lösning: Som i förra uppgiften; med $u_n = (x_n, y_n, z_n)$ har vi att

$$u_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} u_n,$$

och $u_n = A^n u_0$, så vi måste beräkna egenvärdena och egenvektorerna till A.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -3 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ -4 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2(1-\lambda) + 48 - 36 + 12(1-\lambda) + 12(\lambda-2) + 12(\lambda-2) =$$

$$= (\lambda-2)^2(1-\lambda) + 12(2-\lambda) + 12(\lambda-2) + 12(\lambda-2) =$$

$$= (\lambda-2)[(\lambda-2)(1-\lambda) + 12] =$$

$$= (\lambda-2)(-\lambda^2 + 3\lambda + 10) = (\lambda-2)(\lambda+2)(5-\lambda)$$

Så A:s egenvärden är $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$. Motsvarande egenvärden då. λ_1:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & -16 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

λ_2:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 0 & 12 & 12 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow g_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

λ_3:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -12 & -12 & -9 \\ -12 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_3 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom A inte var symmetrisk kunde vi inte heller vänta oss att egenvektorerna skulle vara ortogonala, vilket betyder att vi måste räkna ut inversen till T-matrisen. Det gör man lämpligtvis med Jacobi:s metod:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{R.E.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{R.E.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{R.E.}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Äntligen kan vi nu skriva upp A^n:

$$A^n = TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & (-2)^n & 0 \\ -2^n & -2^n & 2^n \\ -5^n & 0 & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n - 2^n + 5^n & (-2)^n - 2^n & 2^n - 5^n \\ 2^n - 5^n & 2^n & -2^n + 5^n \\ (-2)^n - 2^n & (-2)^n - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

Eftersom nu $u_n = A^n u_0$ kan vi lätt beräkna y_n:

$$y_n = 3(2^n - 5^n) + 2(2^n) + 1(-2^n + 5^n) = 4\cdot 2^n - 2\cdot 5^n \quad \Longrightarrow \quad y_n \cdot 5^{-n} \to -2, \text{ då } n \to \infty.$$

KH:153

Uppgift: Bestäm talföljden b_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ som definieras av att

$$b_{k+2} = 5b_{k+1} - 6b_k, \qquad b_1 = 1, \quad b_0 = 0.$$

Lösning: I denna uppgiften måste vi vara lite listiga. Om vi sätter $x_k = (b_k, b_{k+1})$ så får vi

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} b_{k+1} \\ b_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k+1} \\ 5b_{k+1} - 6b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_k \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} x_k,$$

och vi är tillbaka till KH:150. Efter lite beräkningar får vi så (dessa är fullständigt analoga med KH:150, så jag skriver inte ut dem)

$$x_k = TD^kT^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^k + 3^k \\ -2^{k+1} + 3^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Vårt svar blir alltså att $b_k = 3^k - 2^k$.

KH:157a(M)

Uppgift: Bestäm en ortonormerad bas för $\boldsymbol{R}^3$ i vilken q är på diagonalform, om

$$q(\boldsymbol{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Ange även diagonalformen.
Lösning: Med koefficientmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

får vi att

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}.$$

Tanken är nu att vi vill byta variabler till $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ så att vi diagonaliserar systemet, dvs. vi vill att

$$q(\boldsymbol{x}) = (T\boldsymbol{y})^T AT\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T T^T AT\boldsymbol{y} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y},$$

där D är en diagonalmatris. Eftersom A är reell och symmetrisk vet vi att detta går om vi väljer T som matrisen bestående av A:s egenvektorer vilka då utgör den sökta ON-basen. Med MATLAB blir beräkningen tämligen enkel;

```
[T D]=eig(A)
```

och vi får (med t.ex. `format rat`)

$$T = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

där de sökta basvektorerna är kolumnerna i T. Diagonalformen blir, med egenvärdena som koefficienter,

$$3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

KH:158ab(M)

Uppgift: Vad är det största och minsta värde som följande kvadratiska former antar då $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$?

a) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,

b) $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Lösning: Om vi har en kvadratisk form,

$$q = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y},$$

gäller att

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}\lambda_{\min} \leq q \leq \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}\lambda_{\max}$$

eftersom

$$q = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 \begin{cases} \leq \lambda_{\max}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \\ \geq \lambda_{\min}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2). \end{cases}$$

Här är $1 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T T^T T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$, så uppgiften är att hitta det största och det minsta egenvärdet. Med koefficientmatriserna

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_b = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

får vi största respektive minsta egenvärde med MATLAB:s `eig`, `max` och `min` funktioner:

MATLAB-kod	svar
`min(eig(Aa))`	-2
`max(eig(Aa))`	4
`min(eig(Ab))`	6
`max(eig(Ab))`	9

KH:160a(M)

Uppgift: Visa att kurvan

$$q(\boldsymbol{x}) = 17x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 20$$

är en ellips och bestäm längd och riktning hos halvaxlarna. (x_i-systemet är ett ON-system).
Lösning: Detta är också en diagonaliseringsuppgift. Koefficientmatrisen för den kvadratiska formen är

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

Vi vill nu göra koordinatbytet $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ så att

$$q(\boldsymbol{x}) = (T\boldsymbol{y})^T AT\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T T^T AT\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y},$$

vilket vi gör genom att beräkna egenvärdena och egenvektorerna till A med MATLAB:s `eig`-kommando. Vi får då

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

så ekvationen kan skrivas

$$20y_1^2 + 5y_2^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1^2 + \frac{y_2^2}{4} = 1$$

så axlarna har längderna 1 resp. 2 och är riktade $(-2, 1)$ resp. $(1, 2)$.

KH:164a(M)

Uppgift: Är följande kvadratiska form positivt definit på $\mathbf{R}^3$?

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Lösning: Eftersom

$$q \geq \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} \lambda_{\min}$$

är påståendet att en kvadratisk form är positivt definit ekvivalent med att koefficientmatrisen till den kvadratiska matrisen endast har positiva egenvärden. Den aktuella koefficientmatrisen är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

vilken har egenvärdena $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \approx (0.3973, -1.2924, 3.8951)$, så den kvadratiska formen är indefinit (blandade tecken på egenvärdena) vilket inte är lika med positivt definit.

KH:166a

Uppgift: För vilka värden på a är den kvadratiska formen

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$$

positivt definit?
Lösning: Vi behöver kolla för vilka a som samtliga egenvärden till koefficientmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

är positiva. Vi beräknar egenvärdena på vanligt vis,

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & a \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ a & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - a^2(1-\lambda) =$$
$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 1 - a^2] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1 - a^2)$$

så

$$\lambda_1 = 1,$$
$$\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - (1 - a^2)}$$
$$\lambda_{2,3} > 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < 1.$$

Alltså är den kvadratiska formen positivt definit om $|a| < 1$.

KH:182(M)

Uppgift: Finn den allmänna lösningen till

$$\begin{cases} x''(t) + 3x(t) + 2y(t) = 0, \\ y''(t) + 2x(t) + 3y(t) = 0. \end{cases}$$

Lösning: Om vi kallar differentialoperatorn $D : Dx = x'$ kan vi skriva om ekvationen som

$$D^2\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Om vi nu hittar en lämplig koordinattransformation $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$, dvs. med $T = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 \\ | & | \end{pmatrix}$, där $\boldsymbol{g}_i$ är A:s egenvektorer. Eftersom A är symmetrisk kan vi välja T så att $T^{-1} = T^T$ och vi kan då skriva om ekvationen som

$$T^T D^2 T\boldsymbol{y} + T^T A T\boldsymbol{y} = \mathbf{0},$$
$$D^2\boldsymbol{y} + F\boldsymbol{y} = \mathbf{0},$$

där F är diagonalmatrisen med A:s egenvärden längs diagonalen. Eftersom A har egenvärdena $(\lambda_1, \lambda_2) = (5, 1)$ och egenvektorerna $\boldsymbol{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\boldsymbol{g}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ får vi nu, med $\boldsymbol{y} = (\tilde{x}, \tilde{y})$,

$$\begin{cases} \tilde{x}'' + 5\tilde{x} = 0 \\ \tilde{y}'' + \tilde{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x} = A\cos\sqrt{5}t + B\sin\sqrt{5}t \\ \tilde{y} = C\cos t + D\sin t \end{cases}$$

Byter vi sedan tillbaka till de ursprungliga koordinaterna $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ får vi alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\cos\sqrt{5}t + B\sin\sqrt{5}t \\ C\cos t + D\sin t \end{pmatrix}.$$

KH:183(M)

Uppgift: Ange den allmänna lösningen $(x_1(t), x_2(t))$ till

$$\begin{cases} x_1'(t) = 7x_1(t) - 6x_2(t) + 4e^{2t}, \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + 2e^{2t}. \end{cases}$$

Lösning: Vi skall alltså lösa

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},$$

vilket vi gör med ett lämpligt koordinatbyte, $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ där vi, som vanligt i den här kursen, låter T vara matrisen med A:s egenvektorer som kolumner. Denna, tillsammans med diagonalmatrisen med A:s egenvärden får man i MATLAB med hjälp av `[T,D]=eig(A)`. Om vi gör koordinatbytet och samtidigt multiplicerar ekvationen med T^{-1} från vänster får vi

$$\boldsymbol{y}' = D\boldsymbol{y} + T^{-1}B\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

vilket lika gärna kan skrivas som

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2e^{2t} \\ y_2' = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{4t} - e^{2t} \\ y_2 = C_2 e^t \end{cases}.$$

Vi får lösningen i det ursprungliga koordinatsystemet genom att utföra transformationen $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^{4t} - e^{2t} \\ C_2 e^t \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

KH:184(M)

Uppgift: Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) + e^t \end{cases}, \qquad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$$

Lösning: Denna uppgiften är nästan identisk med den föregående förutom att det tillkommer ett begynnelsevillkor. Om vi använder MATLAB för att ta fram diagonal- och transformationsmatriserna får vi den transformerade differentialekvationen som

$$\boldsymbol{y}' = D\boldsymbol{y} + T^{-1}B\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t,$$

vilken har lösningen

$$\boldsymbol{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Transformerar vi tillbaka till de ursprungliga koordinaterna får vi

$$\boldsymbol{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

Eftersom $\boldsymbol{x}(0) = (1,0)$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 = C_1 - C_2 - \frac{1}{3} \\ 0 = C_1 + 3C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases},$$

varför den slutgiltiga lösningen till differentialekvationerna är

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

KH:185be

Uppgift: Beräkna e^{At} då

b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lösning:
b) När man skall beräkna e^{At} är det alltid lättast om man kan diagonalisera A, för då får man

$$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}.$$

I vårt fall har A egenvärdena

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ -\beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

Egenvektorerna blir

$$\boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{g}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},$$

och vi kan skriva

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-i\beta)t} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t} & -i\left(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}\right) \\ i\left(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}\right) & e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t} \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

e) Eftersom A är triangulär kan vi läsa av egenvärdena längs diagonalen, och vi finner att $\lambda_{1,2,3} = 2$. Tyvärr ser vi också att vi bara har en egenvektor, $\boldsymbol{g} = (1,0,0)$, så A är inte diagonaliserbar — vi måste räkna för hand. För att göra detta utnyttjar vi definitionen

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

där vi då har att

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2+2 & 1 \\ 0 & 2^2 & 2+2 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2+2(2+2) & (2+2)+2 \\ 0 & 2^3 & 2^2+2(2+2) \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 3\cdot 2^2 & 3\cdot 2 \\ 0 & 2^3 & 3\cdot 2^2 & 3\cdot 2 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2^4 & 3\cdot 2^3+2^3 & 3\cdot 2^2+3\cdot 2^2 \\ 0 & 2^4 & 4\cdot 2^3 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{pmatrix}$$

$$t^nA^n = \begin{pmatrix} t^n2^n & nt^n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}t^n2^{n-2} \\ 0 & 2^nt^n & nt^n2^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (tA)^n & nt(2t)^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}t^2(2t)^{n-2} \\ 0 & (2t)^n & nt(2t)^{n-1} \\ 0 & 0 & (2t)^n \end{pmatrix}$$

så, eftersom $nt(2t)^{n-1}/n! = t(2t)^{n-1}/(n-1)!$ och $t^2/2\cdot n(n-1)(2t)^{n-2}/n! = t^2/2\cdot(2t)^{n-2}/(n-2)!$, får vi

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Heath:1.2

Uppgift: Vilka är de absoluta och relativa felen när man approximerar π med 3, 3.14 resp. 22/7.
Lösning: Vi förutsätter att vi inte befinner oss i någon amerikansk delstat där π är 3 enligt lag. Vi har att

$$\text{Absolut fel} = \text{approximativt värde} - \text{riktigt värde},$$
$$\text{Relativt fel} = \frac{\text{absolut fel}}{\text{riktigt värde}}$$

så vi får de absoluta felen (i tur och ordning, med MATLAB:s approximation av π) $1.415926535897931\cdot 10^{-1}$, $1.592653589792992\cdot 10^{-3}$ och $1.264489267349678\cdot 10^{-3}$ medan de relativa felen blir 4.507%, 0.05070% och 0.04025%.

Heath:1.4

Uppgift: Betrakta problemet att beräkna $\sin x$ speciellt då argumentet störs med ett litet fel h.

a) Uppskatta det absoluta felet vid beräkning av $\sin x$.

b) Uppskatta det relativa felet vid beräkning av $\sin x$.

c) Uppskatta konditionstalet för detta problem.

d) För vilka värden på x är problemet känsligast?

Lösning:
a,b,c) De absoluta och relativa felen och konditionstalen får vi alltså som (jfr. exempel 1.2 och 1.3, s. 6)

$$\text{absolut fel} = f(x+h) - f(x) \approx hf'(x) = h\cos x$$
$$\text{relativt fel} = \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} \approx f\frac{f'(x)}{f(x)} = h\cot x$$
$$\text{konditionstal} = \frac{|\text{relativ ändring i utdata}|}{|\text{relativ ändring i indata}|} \approx \frac{|hf'(x)/f(x)|}{|h/x|} = \left|x\frac{f'(x)}{f(x)}\right| = |x\cot x|.$$

d) Det absoluta felet är störst när $x = 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, det relativa felet och konditionstalet är störst för $x = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Heath:1.6

Uppgift: Sinusfunktionen ges av den oändliga serien

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

a) Vilka är framåt- och bakåtfelen om vi approximerar sinus med enbart den första termen i serieutvecklingen då $x = 0.1$, 0.5 och 1.0?

b) Samma sak fast med de två första termerna i serieutvecklingen.

Lösning: Om $\hat{f}$ betecknar den approximerande funktionen och $\hat{x}$ det approximerande argumentet definieras

$$\text{Framåtfel} = \hat{f}(x) - f(x)$$
$$\text{Bakåtfel} = \hat{x} - x = f^{-1}(\hat{f}(x)) - x,$$

Eftersom $f(x) = \sin x$ är $f^{-1}(y) = \arcsin y$, och vi kan skriva upp följande tabell

x	$f(x)$	$\hat{f}_b(x) = x - x^3/3!$	$\hat{x}_a = \arcsin x$	$\hat{x}_b = \arcsin(x - x^3/3!)$
0.1	0.099833	0.099833	0.100167	0.100000
0.5	0.479426	0.479167	0.523599	0.499705
1.0	0.841471	0.833333	1.570796	0.985111

vilket ger

x	Framåtfel a)	Framåtfel b)	Bakåtfel a)	Bakåtfel b)
0.1	0.000167	0.000000	0.000167	0.000000
0.5	0.020574	−0.000259	0.023599	−0.000295
1.0	0.158529	−0.008138	0.570796	−0.014889

Heath:1.12

Uppgift:

a) Vilka av (de ekvivalenta) uttrycken

$$x^2 - y^2 \quad \text{och} \quad (x-y)(x+y)$$

kan beräknas mest noggrant med flyttalsaritmetik?

b) För vilka värden på x och y, relativt varandra, är det en märkbar skillnad mellan de två uttrycken?

Lösning:
a) En framåtanalys av vänstra uttrycket:

$$\begin{aligned}\hat{z} &= \mathrm{fl}[\mathrm{fl}(x^2) - \mathrm{fl}(y^2)] = [(x^2)(1+r_1) - (y^2)(1+r_2)](1+r_3) \approx \\ &\approx x^2 - y^2 + r_1x^2 - r_2y^2 + r_3(x^2-y^2)\end{aligned}$$

så det absoluta felet blir

$$|\hat{z} - z| \approx |r_1x^2 - r_2y^2 + r_3(x^2-y^2)| \le \mu(x^2 + y^2 + |x^2 - y^2|)$$

och det relativa felet blir alltså

$$\frac{|\hat{z}-z|}{|z|} \le \mu\frac{x^2+y^2+|x^2-y^2|}{|x^2-y^2|} = \mu\left(1 + \frac{x^2+y^2}{|x^2-y^2|}\right),$$

vilket ju kan bli ganska stort om $x \approx y$. Om vi analyserar det högra uttrycket däremot får vi

$$\begin{aligned}\hat{z} &= \mathrm{fl}[\mathrm{fl}(x-y)\cdot\mathrm{fl}(x+y)] = (x-y)(x+y)(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3) \approx \\ &\approx x^2 - y^2 + (r_1+r_2+r_3)(x^2-y^2)\end{aligned}$$

varför det absoluta felet blir

$$|\hat{z} - z| \le 3\mu|x^2 - y^2|$$

och det relativa felet blir

$$\frac{|\hat{z}-z|}{|z|} \le 3\mu$$

b) Om $x \approx y$ ger det första uttrycket stora fel, vilka bör märkas.

Heath:2.17

Uppgift: Skriv upp LU-faktoriseringen av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: En LU-faktorisering är bara en Gausseliminering där U-matrisen, den övre triangulära, är slutresultatet, och L-matrisen innehåller alla radoperationer (om man drar lägger till t.ex. rad 1 till rad 2 skriver man -1 i position $(1,2)$, man skall ju skriva upp hur man går baklänges). Vi får

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}.\end{aligned}$$

Svaret kan man jämföra med `[L,U]=lu(A)` i MATLAB.

Heath:2.25

Uppgift:

a) Om u och v är vektorer i $\boldsymbol{R}^n$, visa att den yttre produkten uv^T är en $n \times n$-matris med rang 1.

b) Om A är en $n \times n$-matris sådan att $\operatorname{rang} A = 1$, visa att det finns $u,\ v \in \boldsymbol{R}^n$ sådana att $A = uv^T$.

Lösning:
a) Vi har alltså $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ och $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Vad blir nu uv^T? Jo,

$$uv^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n \end{pmatrix}.$$

Vi ser att om vi multiplicerar rad 1 med u_i/u_1 och lägger detta till rad i, $i = 2, \ldots, n$ så blir det bara den första raden som blir kvar. Rangen på denna matris är alltså 1.
b) Om $\operatorname{rang} A = 1$ måste det vara så att alla rader i A kan skrivas som linjärkombinationer av den första, dvs. alla rader är lika med den första multiplicerad med något tal. Alla sådana matriser kan man skriva som

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = uv^T.$$

Heath:2.35

Uppgift: Antag att matrisen A kan faktoriseras som $A = BB^T$, där B är icke-singulär. Visa att A måste vara symmetrisk och positivt definit.
Lösning: Vi börjar med att visa att A är symmetrisk (eftersom det känns lättast). Dvs. är $A^T = A$? Kom ihåg att $(AB)^T = B^T A^T$.

$$A^T = (BB^T)^T = B^{T^T} B^T = BB^T = A,$$

så det var ju bra. Är den positivt definit? Dvs. är $x^T Ax > 0$ för alla $x \neq 0$? Vi testar,

$$x^T Ax = x^T BB^T x = (B^T x)^T (B^T x) = y^T y = \|y\|_2^2,$$

där $y = B^T x$. Men $\|y\|_2 > 0$ om inte y är nollvektorn, så då måste A vara positivt definit.

Heath:3.3

Uppgift: Skriv upp minsta kvadrat-systemet $Ax \approx b$ för att anpassa funktionen

$$f(t,x) = x_1 t + x_2 e^t$$

till datapunkterna $(t,f) = (1,2),\ (2,3),\ (3,5)$.
Lösning: Vi skall skriva upp systemet

$$\begin{cases} f_1 = x_1 t_1 + x_2 e^{t_1} \\ f_2 = x_1 t_2 + x_2 e^{t_2} \\ f_3 = x_1 t_3 + x_2 e^{t_3} \end{cases}$$

på matrisform. Vi får

$$\begin{pmatrix} 1 & e^1 \\ 2 & e^2 \\ 3 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Om man löser det i MATLAB med `A\b` får man $(x_1, x_2) \approx (1.5942, 0.0088)$.

Heath:3.6

Uppgift:

a) Vilken är den euklidiska normen (2-normen) av den minsta residualvektorn till systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

b) Vilken är lösningsvektorn x till detta system?

Lösning: Det minsta 2-normsavståndet till ett överbestämt ekvationssystem får man med minsta kvadratmetoden. Residualen fås som

$$r = b - Ax,$$

där x beräknas med normalekvationerna

$$A^T Ax = A^T b.$$

Här får vi

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så $\|r\|_2 = 1$. Här kan man om man vill inse att bara de två första ekvationerna i systemet spelar någon roll, och man kan lätt beräkna lösningen och residualen därur.

Heath: 3.16

Uppgift: Beräkna Householdertransformationen som eliminerar allt utom det första elementet i vektorn $a = (1,1,1,1)$. Mer specifikt, om

$$\left(E - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vad är då α och v?
Lösning: Enligt receptet i avsnitt 3.4.4 skall vi välja

$$v = a - \alpha e_1,$$

med $\alpha = \pm\|a\|_2 = \pm 2$. Vi får då

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där vi valde $\alpha = -2$ och inte 2 eftersom vi vill undvika kancellation. Om vi vill, kan vi konfirmera att transformationen är riktig:

$$vv^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v^T v = 12 \quad \Rightarrow$$

$$H = E - 2\frac{vv^T}{v^T v} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Ha = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Heath:4.12

Uppgift: Givet matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

går det att välja $\alpha \in \boldsymbol{R}$ så att

a) A bara har reella egenvärden?

b) A bara har komplexa egenvärden med nollskild imaginärdel?

Lösning:
a) Om vi väljer $\alpha = 0$ får vi en triangulär matris som har egenvärdena längs diagonalen. Egenvärdena blir nu $1, 2, 3$ vilka alla är reella.
b) Det karakteristiska polynomet $\det(A - \lambda E)$ är ett tredjegradspolynom med reella koefficienter. Det betyder att om en rot har en nollskild imaginärdel så är också dess komplexkonjugat en rot. Ett tredjegradspolynom måste sålunda alltid ha minst en reell rot, och det går alltså inte att hitta ett $\alpha \in \boldsymbol{R}$ så att b) uppfylls.

Heath:4.19

Uppgift:

a) Låt A vara en symmetrisk $n \times n$-matris. Om λ och γ är två egenvärden till A, $\lambda \neq \gamma$, visa att motsvarande egenvektorer x och y är ortogonala.

b) Mer allmänt, om A inte är symmetrisk, visa att om $Ax = \lambda x$ och $A^T y = \gamma y$, där $\lambda \neq \gamma$, så är $y^T x = y \cdot x = 0$. Dvs. visa att vänster- och högeregenvektorerna till olika egenvärden är ortogonala.

Lösning:
a) Vi har att $Ax = \lambda x$ och $Ay = \gamma y$. Eftersom A är symmetrisk gäller att $x^T A^T = x^T A = \lambda x^T$. Om vi vill kan vi nu skriva

$$x^T A y = \begin{cases} x^T \gamma y \\ x^T A^T y = (Ax)^T y = \lambda x^T y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma x^T y = \lambda x^T y$$

så eftersom $\lambda \neq \gamma$ måste $x^T y = 0$.
b) Vi gör på samma sätt,

$$y^T A x = \begin{cases} y^T \lambda x \\ (A^T y)^T x = \gamma y^T x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda y^T x = \gamma y^T x,$$

och drar samma slutsats.

Heath:4.21ab

Uppgift: Om A är en $n \times n$-matris med rang $A = 1$, så kan A skrivas som $A = uv^T$ där varken u eller v är nollvektorn.

a) Visa att A har egenvärdet $u^T v = v^T u$.

b) Vilka andra egenvärden har A?

Lösning:

$$A = uv^T \quad \Rightarrow \quad Ag = uv^T g = \begin{cases} (g = u) = v^T u u \\ (g \perp v) = 0 \end{cases}$$

så det finns två sorters egenvektorer, u med tillhörande egenvärde $v^T u$ och alla vektorer som är vinkelräta mot v vilka har det tillhörande egenvärdet 0.

Heath:4.22

Uppgift: Låt $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ vara de reella egenvärdena till den symmetriska $n \times n$-matrisen A.

a) Till vilka egenvärden är det möjligt att konvergera med potensmetoden och ett lämpligt skift σ.

b) I varje sådant fall, vilket värde på skiftkonstanten ger snabbast konvergens?

c) Besvara a) och b) för inversiteration istället för potensmetoden.

Lösning:
a) Potensmetoden med ett skift innebär att man succesivt beräknar

$$y_k = (A - \sigma E)x^{k-1},$$
$$x_k = y_k / \|y_k\|_\infty.$$

Eftersom potensmetoden konvergerar mot μ s.a.

$$|\mu| = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i - \sigma|$$

kan man endast konvergera antingen mot λ_1 (det minsta egenvärdet) eller mot λ_n (det största). Vi ser att om $\sigma > (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ sker konvergens mot λ_1 medan om $\sigma < (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ konvergeras det däremot mot λ_n.
b) Vi börjar med att försöka få tag λ_n. Om man som i boken gör en egenvektorsutveckling, ser man (jfr. avsnitt 4.3.4, s. 127) att vi söker σ som minimerar

$$\max \left| \frac{\lambda_i - \sigma}{\lambda_n - \sigma} \right|, \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Detta sker om vi väljer $\sigma = (\lambda_1 + \lambda_{n-1})/2$. I fallet när vi vill ha tag i λ_1 gäller det istället att hitta σ som minimerar

$$\max \left| \frac{\lambda_i - \sigma}{\lambda_1 - \sigma} \right|, \qquad i = 2, \dots, n,$$

vilket bör vara $\sigma = (\lambda_2 + \lambda_n)/2$.
c) Vid inversiteration kan vi konvergera mot vilket egenvärde som helst. Metoden konvergerar mot det egenvärde som ligger närmast skiftet.

Heath:4.30

Uppgift:

a) Betrakta kolumnvektorn a som en $n \times 1$-matris. Beräkna dess singulärvärdesuppdelning och ange matriserna U, Σ och V explicit.

b) Gör samma sak med a^T.

Lösning:
a) En singulärvärdes uppdelning innebär att man skriver om en matris A $(m \times n)$ som

$$A = U\Sigma V^T,$$

där $U^TU = E$ $(m \times m)$, $V^TV = E$ $(n \times n)$ och Σ $(m \times n)$ är en matris med enbart (positiva) värden längs diagonalen. Om A är $n \times 1$ blir U en ortogonal $n \times n$-matris, V ett tal och V en kolumnvektor $(n \times 1)$. Eftersom singulärvärdena är roten av egenvärdena till A^TA, eller i vårt fall a^Ta, får vi att singulärvärdet till a är just $\sqrt{a^Ta} = \|a\|_2$. Vi kan nu bilda singulärvärdesuppdelningen:

$$U = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ \frac{a}{\|a\|_2} & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \|a\|_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V = 1,$$

där $u_1 = a/\|a\|_2, u_2, \ldots, u_n$ bildar en ON-bas för $\mathbf{R}^n$.
b) Här skall vi alltså singulärvärdesuppdela a^T, och vad är lämpligare då än att utnyttja den tidigare singulärvärdesuppdelningen? Vi har att

$$a = U\Sigma V^T \quad \Rightarrow a^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T,$$

så om vi väljer $U' = V$, $V' = U$ och $\Sigma' = \Sigma^T$ får vi att $a^T = U'\Sigma' V'^T$ och vi är klara!

Heath:4.35

Uppgift:

a) Beräkna pseudoinversen av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Beräkna pseudoinversen av

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix},$$

där $\epsilon > 0$.

c) Vad antyder dessa resultat angående konditioneringen av beräkningen av pseudoinversen?

Lösning:
a) Pseudoinversen till en matris $A = U\Sigma V^T$ definieras (se listan på s. 136–137 i boken) som

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T,$$

där Σ^+ är Σ transponerat med alla icke-tomma element inverterade. I uppgiften gäller att

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

så vi får att

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

b) Singulärvärdesuppdelningen av B är

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

så vi får att

$$B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\epsilon \end{pmatrix}$$

c) Vi får lite problem. Från att ha varit 1 hoppar konditionstalet till $1/\epsilon$ vilket inte riktigt speglar problemet. Lösningen är att avrunda dylika ϵ till 0 innan beräkningen.

Heath:5.1

Uppgift: Betrakta den ickelinjära ekvationen

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

a) Med $x_0 = 1$ som startpunkt, vad blir x_1 med Newtons metod?

b) Med $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ som startpunkter, vad blir x_2 med sekantmetoden?

Lösning:
a) Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Vi har att $f'(x) = 2x$, så med $x_0 = 1$ får vi

$$f(x_0) = -1,\ f'(x_0) = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2}.$$

b) Sekantmetoden:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Med $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ får vi då

$$f(x_0) = -1,\ f(x_1) = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 - 2\frac{2-1}{2-(-1)} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Så Newtons metod ger att vi hamnar ca. $|3/2 - \sqrt{2}| \approx 0.086$ fel, medan sekantmetoden missar med ca. $|4/3 - \sqrt{2}| \approx 0.088$.

Heath:5.2

Uppgift: Formulera Newtoniterationerna för följande ickelinjära ekvationer:

a) $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$,

b) $f(x) = e^{-x} - x = 0$,

c) $f(x) = x\sin x - 1 = 0$.

Lösning: Newtons metod är, som tidigare,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

a) $f'(x) = 3x^2 - 2$, så

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k - 5}{3x_k^2 - 2} = \frac{2x_k^3 - 5}{3x_k^2 - 2}.$$

b) $f'(x) = -e^{-x} - 1$, så

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} - x_k}{-e^{-x_k} - 1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{e^{-x_k} + 1}.$$

c) $f'(x) = \sin x + x\cos x$, så

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x\sin x - 1}{\sin x + x\cos x}.$$

Heath:5.3

Uppgift: Newtons metod används ibland för att implementera den inbyggda kvadratrotsfunktionen i datorer med initialvärdet hämtat från en tabell.

a) Vad är Newtoniterationen för beräkningen av kvadratroten av y, dvs. för lösningen av $f(x) = x^2 - y = 0$.

b) Om startapproximationen har en noggranhet på 4 bitar, hur många iterationer krävs för att få en noggranhet på 24 respektive 53 bitar?

Lösning:
a) $f'(x) = 2x$, så

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - y}{2x_k} = \frac{x_k^2 + y}{2x_k}.$$

b) Om man transformerar Newtons metod till en fixpunktsiteration kan man studera konvergenshastigheten. En dylik fixpunktsiteration är

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

vilket alltså betyder att konvergenshastigheten är kvadratisk. Antalet korrekta siffror fördubblas alltså i varje iteration. Om man startar med 4 korrekta bitar, får man i iteration två 8, iteration tre 16, fyra 32 och fem 64. För att få 24 korrekta bitar krävs alltså fyra iterationer, medan 53 korrekta kräver fem iterationer.

Heath:5.6

Uppgift: Antag att vi vill utveckla en iterativ metod för att beräkna roten ur ett givet positivt tal y, dvs. givet y vill vi lösa den ickelinjära ekvationen $f(x) = x^2 - y = 0$. Funktionerna g_1 och g_2 nedan ger båda fixpunktsformuleringar ekvivalenta med $f(x) = 0$. Avgör om g_1 och g_2 är konvergerar mot $\sqrt{y}$ då $y = 3$ och förklara varför. Hur ser Newtons iterationsfunktion ut för detta problem?

$$g_1(x) = y + x - x^2 \qquad g_2(x) = 1 + x - x^2/y$$

Lösning: För att studera konvergensen betraktar vi $g'(x^*)$, där $x^* = \sqrt{y}$ är lösningspunkten. Om $|g'(x^*)| < 1$ så är fixpunktsiterationen lokalt konvergent. Eftersom

$$g_1'(x) = 1 - 2x, \qquad g_2'(x) = 1 - 2x/y$$

får vi att

$$|g_1'(x^*)| = |1 - 2\sqrt{3}| \approx 2.46, \qquad |g_2'(x^*)| = |1 - 2\sqrt{3}/3| \approx 0.155,$$

så g_1 är divergent medan g_2 är konvergent.
Newtoniterationen blir

$$g(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^2 - y)/2x = x/2 + y/2x.$$

Heath:5.8 a)

Uppgift: Skriv upp Newtoniterationen för det ickelinjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Lösning: I flera dimensioner blir Newtons metod istället för $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - J_f(x_k)^{-1} f(x_k),$$
$$\Leftrightarrow \quad J_f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k),$$

(den andra formen formulerad som ett ekvationssystem) där $J_f = \frac{df}{dx}$ är f:s jacobian (som man räknar ut precis som en funktionalmatris i flervariabelkursen).

I just den här uppgiften har vi att

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

så ekvationssystemet som skall lösas i varje iteration är

$$\begin{pmatrix} 2x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} \\ 2x_1^{(k)} & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1^{(k)2} + x_2^{(k)2} - 1 \\ x_1^{(k)2} - x_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

Heath:5.12

Uppgift: För vilken eller vilka startpunkter konvergerar Newtons metod inte för systemet

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 0 \\ x_1 x_2 - 1 = 0 \end{cases} ?$$

varför?
Lösning: Jacobianen till systemet är

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Denna matris har determinanten det $J_f = x_1$, så när $x_1 = 0$ går ekvationsystemet som fås i Newtons metod inte att lösa (jfr. uppg. 5.8).

Heath:c5.1

Uppgift: Betrakta ekvationen

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$

och fixpunktsfunktionerna

$$g_1(x) = x^2 - 2,$$
$$g_2(x) = \sqrt{x+2},$$
$$g_3(x) = 1 + 2/x,$$
$$g_4(x) = (x^2+2)/(2x-1).$$

a) Analysera konvergensegenskaperna hos de olika fixpunktsiterationerna analytiskt runt roten $x^* = 2$.

b) Bekräfta analysen genom att implementera de olika metoderna med en dator.

Lösning:
a) Vi skall betrakta $g_i'(x)$. Vi har då att

$$g_1'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad g_1'(x^*) = 4$$
$$g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \quad \Rightarrow \quad g_2'(x^*) = \frac{1}{4}$$
$$g_3'(x) = -2/x^2 \quad \Rightarrow \quad g_3'(x^*) = -\frac{1}{2}$$
$$g_4'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+2)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 4}{(2x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad g_4'(x^*) = 0$$

Eftersom fixpunktsiterationsmetod konvergerar om $g'(x) < 1$ ser vi att den första metoden divergerar medan de andra konvergerar. Mindre $g'(x^*)$ betyder snabbare konvergens, så g_4 är snabbast, följd av g_2 och g_1. Att $g_4'(x^*) = 0$ betyder att konvergensen är snabbare än linjär (i detta fallet kvadratisk eftersom det är Newtoniterationen).
b)

g_1	g_2	g_3	g_4
-1.000000	1.732051	3.000000	3.000000
-1.000000	1.931852	1.666667	2.200000
-1.000000	1.982890	2.200000	2.011765
-1.000000	1.995718	1.909091	2.000046
-1.000000	1.998929	2.047619	2.000000
-1.000000	1.999732	1.976744	2.000000
-1.000000	1.999933	2.011765	2.000000
-1.000000	1.999983	1.994152	2.000000
-1.000000	1.999996	2.002933	2.000000
-1.000000	1.999999	1.998536	2.000000
-1.000000	2.000000	2.000733	2.000000
-1.000000	2.000000	1.999634	2.000000
-1.000000	2.000000	2.000183	2.000000
-1.000000	2.000000	1.999908	2.000000
-1.000000	2.000000	2.000046	2.000000

Heath:c5.2

Uppgift: Implementerar bisektions-, Newton- och sekantmetoden för lösning av ickelinjära ekvationer i en dimension och testa dina implementeringar genom att hitta åtminstone en rot till var och en av följande ekvationer.

a) $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$,

b) $f(x) = e^{-x} - x = 0$,

c) $f(x) = x \sin x - 1 = 0$,

d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Lösning:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

a	b	Newton	Sekant
—	—	—	3.000000
1.000000	3.000000	3.000000	1.000000
2.000000	3.000000	2.360000	1.545455
2.000000	2.500000	2.127197	3.045070
2.000000	2.250000	2.095136	1.851693
2.000000	2.125000	2.094552	1.995781
2.062500	2.125000	2.094551	2.110202
2.093750	2.125000	2.094551	2.093651
2.093750	2.109375	2.094551	2.094544
2.093750	2.101562	2.094551	2.094551
2.093750	2.097656	2.094551	2.094551
2.093750	2.095703	2.094551	2.094551
2.093750	2.094727	2.094551	2.094551
2.094238	2.094727	2.094551	NaN
2.094482	2.094727	2.094551	NaN
2.094482	2.094604	2.094551	NaN
2.094543	2.094604	2.094551	NaN
2.094543	2.094574	2.094551	NaN
2.094543	2.094559	2.094551	NaN
2.094551	2.094559	2.094551	NaN
2.094551	2.094555	2.094551	NaN
2.094551	2.094553	2.094551	NaN
2.094551	2.094552	2.094551	NaN
2.094551	2.094552	2.094551	NaN
2.094551	2.094552	2.094551	NaN
2.094551	2.094552	2.094551	NaN
2.094551	2.094552	2.094551	NaN
2.094551	2.094552	2.094551	NaN
2.094551	2.094551	2.094551	NaN
2.094551	2.094551	2.094551	NaN

$$f(x) = e^{-x} - x = 0$$

a	b	Newton	Sekant
—	—	—	3.000000
0.000000	1.000000	3.000000	1.000000
0.500000	1.000000	0.189703	0.454620
0.500000	0.750000	0.538598	0.575535
0.500000	0.625000	0.566995	0.567317
0.562500	0.625000	0.567143	0.567143
0.562500	0.593750	0.567143	0.567143
0.562500	0.578125	0.567143	0.567143
0.562500	0.570312	0.567143	0.567143
0.566406	0.570312	0.567143	0.567143
0.566406	0.568359	0.567143	NaN
0.566406	0.567383	0.567143	NaN
0.566895	0.567383	0.567143	NaN
0.567139	0.567383	0.567143	NaN
0.567139	0.567261	0.567143	NaN
0.567139	0.567200	0.567143	NaN
0.567139	0.567169	0.567143	NaN
0.567139	0.567154	0.567143	NaN
0.567139	0.567146	0.567143	NaN
0.567142	0.567146	0.567143	NaN
0.567142	0.567144	0.567143	NaN
0.567142	0.567143	0.567143	NaN
0.567143	0.567143	0.567143	NaN
0.567143	0.567143	0.567143	NaN
0.567143	0.567143	0.567143	NaN
0.567143	0.567143	0.567143	NaN
0.567143	0.567143	0.567143	NaN
0.567143	0.567143	0.567143	NaN
0.567143	0.567143	0.567143	NaN

$$f(x) = x \sin x - 1 = 0$$

a	b	Newton	Sekant
—	—	—	3.000000
0.000000	3.000000	1.000000	1.000000
0.000000	1.500000	1.114729	0.241689
0.750000	1.500000	1.114157	1.153408
0.750000	1.125000	1.114157	1.103649
0.937500	1.125000	1.114157	1.114179
1.031250	1.125000	1.114157	1.114157
1.078125	1.125000	1.114157	1.114157
1.101562	1.125000	1.114157	1.114157
1.113281	1.125000	1.114157	1.114157
1.113281	1.119141	1.114157	1.114157
1.113281	1.116211	1.114157	1.114157
1.113281	1.114746	1.114157	NaN
1.114014	1.114746	1.114157	NaN
1.114014	1.114380	1.114157	NaN
1.114014	1.114197	1.114157	NaN
1.114105	1.114197	1.114157	NaN
1.114151	1.114197	1.114157	NaN
1.114151	1.114174	1.114157	NaN
1.114151	1.114162	1.114157	NaN
1.114157	1.114162	1.114157	NaN
1.114157	1.114160	1.114157	NaN
1.114157	1.114158	1.114157	NaN
1.114157	1.114157	1.114157	NaN
1.114157	1.114157	1.114157	NaN
1.114157	1.114157	1.114157	NaN
1.114157	1.114157	1.114157	NaN
1.114157	1.114157	1.114157	NaN
1.114157	1.114157	1.114157	NaN
1.114157	1.114157	1.114157	NaN
1.114157	1.114157	1.114157	NaN

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

a	b	Newton	Sekant
—	—	—	3.000000
0.000000	3.000000	2.000000	2.000000
0.000000	1.500000	1.666667	1.857143
0.750000	1.500000	1.444444	1.614173
0.750000	1.125000	1.296296	1.472767
0.937500	1.125000	1.197531	1.354183
0.937500	1.031250	1.131687	1.268144
0.984375	1.031250	1.087791	1.202189
0.984375	1.007812	1.058528	1.152694
0.996094	1.007812	1.039018	1.115246
0.996094	1.001953	1.026012	1.087002
0.999023	1.001953	1.017342	1.065674
0.999023	1.000488	1.011561	1.049577
0.999756	1.000488	1.007707	1.037424
0.999756	1.000122	1.005138	1.028251
0.999939	1.000122	1.003425	1.021326
0.999939	1.000031	1.002284	1.016098
0.999985	1.000031	1.001522	1.012152
0.999985	1.000008	1.001015	1.009173
0.999985	0.999996	1.000677	1.006925
0.999990	0.999996	1.000451	1.005227
0.999993	0.999996	1.000301	1.003946
0.999993	0.999995	1.000200	1.002979
0.999994	0.999995	1.000134	1.002249
0.999994	0.999995	1.000089	1.001697
0.999994	0.999995	1.000059	1.001281
0.999994	0.999995	1.000040	1.000967
0.999995	0.999995	1.000026	1.000730
0.999995	0.999995	1.000018	1.000551
0.999995	0.999995	1.000012	1.000416
0.999995	0.999995	1.000008	1.000314

Heath:6.1

Uppgift: Betrakta $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definierad av

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(1 - x_1)^2.$$

a) Var har f lokala minima?

b) Utför en Newtoniteration utgående från startvektorn $x_0 = (2, 2)$.

c) På vilket sätt är det här ett bra iterationssteg?

d) På vilket sätt är det här ett dåligt iterationssteg?

Lösning:
a) För att beräkna minima måste vi först kolla var gradienten är nollvektorn. Vi har att

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \left(2x_1(x_1^2 - x_2) - (1 - x_1), -(x_1^2 - x_2)\right)$$

så vi får att $x_2 = x_1^2$ och $x_1 = 1$, dvs. $x^* = (1, 1)$ är ett potentiellt minimum. För att kontrollera detta måste vi enligt konstens alla regler kolla om f:s hessian är positivt definit. Vi har att

$$D^2 f(x) = H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1^2 - 2x_2 + 1 & -2x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{pmatrix} = [x = x^* = (1,1)] =$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Eftersom $H_f(x^*)$ har egenvärdena $(\lambda_1, \lambda_2) \approx (5.8, 0.2)$ är hessianen positivt definit och vi har hittat ett minimum.
b) Newtonsteget för att hitta en stationär punkt i flera variabler är

$$x_{k+1} = x_k - H_f^{-1}(x_k)\nabla f(x_k),$$

eller

$$H_f(x_k)s_k = -\nabla f(x_k),$$
$$x_{k+1} = x_k + s_k.$$

I punkten $x_0 = (2, 2)$ skall vi således först lösa ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 21 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} s_0 = -\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad s_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Den nya punkten vi kommer till är nu

$$x_1 = x_0 + s_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

c,d) Steget är bra eftersom $f(x_1) < f(x_0)$ men dåligt eftersom vi faktiskt tar oss längre bort från det faktiska minimat ($\|x^* - x_0\|_2 < \|x^* - x_1\|_2$).

Heath:6.2

Uppgift: Låt $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ vara given av

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - x^T b + c,$$

där A är en symmetrisk, positiv $n \times n$-matris och be är en n-vektor, c en skalär.

a) Visa att Newtons metod för att minimera denna funktion konvergerar på en iteration oavsett startpunkt.

b) Om man använder brantaste lutningsmetoden på detta problemet, vad händer när vektorn mellan startpunkten x_0 och optimum, x^*, är en egenvektor till A?

Lösning:
a) Vi har att $\nabla f = Ax - b$ och att $H_f = A$ så i första iterationen skall vi lösa

$$As_0 = -(Ax_0 - b) \quad \Leftrightarrow \quad s_0 = -x_0 + A^{-1}b$$

så

$$x_1 = x_0 + s_0 = x_0 - x_k + A^{-1}b = A^{-1}b$$

och vi ser att $\nabla f(x_1) = Ax_1 - b = AA^{-1}b - b = 0$.
b) Brantaste lutningsmetoden innebär iterationen

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha} f(x_k - \alpha\nabla f(x_k)), \tag{8}$$
$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k). \tag{9}$$

Eftersom $\nabla f(x) = Ax - b$ har vi att $\nabla f(x^*) = Ax^* - b = 0$ så $Ax^* = b$. Detta, tillsammans med $A(x_0 - x^*) = \lambda(x_0 - x^*)$, ger oss att

$$x_1 = x_0 - \alpha_0 \nabla f(x_0) = x_0 - \alpha_0(Ax_0 - b) = x_0 - \alpha_0(Ax_0 - Ax^*) = x_0 - \beta(x_0 - x^*),$$

där $\beta = \alpha_0\lambda$. Väljer man här $\beta = 1$ får man $x_1 = x^*$.

Heath:6.4

Uppgift: Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

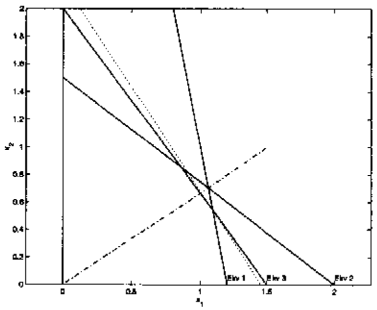
$$\min_x f(x) = -3x_1 - 2x_2$$
$$\text{då} \quad 5x_1 + x_2 \le 6$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 6$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

a) Hur många hörn har det tillåtna området?

b) Eftersom minimat måste finnas i ett hörn, lös problemet genom att beräkna funktionsvärdet i alla hörn.

Lösning:
a) Ett hörn uppstår där två ekvationer är uppfyllda samtidigt. Det finns 5 ekvationer och då alltså 5 hörn (om vi antar att ingen av ekvationerna är redundant).
b) För att lösa ett linjärt optimeringsproblem med två variabler är det lättast att använda en grafisk lösning. Rita upp först upp linjerna för alla bivillkoren, se figur 1. 1. Sedan tycker jag det är lättast att dra en linje från origo i den riktning som indikeras av målfunktionen (den punkt-streckade i figuren). Om målfunktionen är min $-ax - by$, dra en linje i riktning (a, b). Tag sedan en linjal eller ett löst papper, och håll detta vinkelrät mot linjen, och för det över figuren från origo tills det sista hörnet till det tillåtna området korsats (detta indikeras med den prickade linjen i figuren). Detta hörn är då det optimala.

Vi ser ur figuren att hörnet mellan bivillkoren 1 och 3, dvs. punkten $(12/11, 6/11)$, är det optimala. Målfunktionsvärdet i detta hörn är $-48/11 \approx -4.36$.



Figur 1: Bivillkoren till uppgift 6.4 b).

Heath:c6.7ab+c

Uppgift: Betrakta funktionen $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ definierad av

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1).$$

a) Bestäm alla stationära punkter till f analytiskt.

b) Klassificera analytiskt alla ovan funna punkter som minima, maxima eller sadelpunkter.

c) Verifiera dina resultat genom att rita upp en konturplott eller en 3d-plott av f på området $-2 \le x_i \le 2$, $i = 1, 2$.

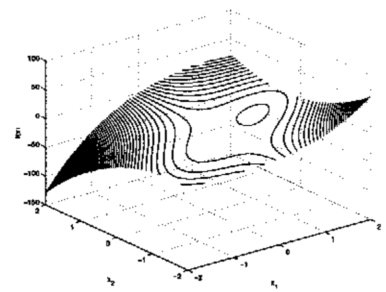
Lösning:
a) Vi beräknar först gradienten till f:

$$\nabla f(x) = (6x_1^2 - 6x_1 - 12x_1x_2 + 6x_2^2 + 6x_2, -6x_1^2 + 12x_1x_2 + 6x_1),$$

Vilken skall vara nollvektorn vid en stationär punkt. Andra komponenten är noll antingen då $x_1 = 0$ eller då $x_1 - 2x_2 = 1$. Insättning i 1:a ekvationen ger att $(0,0)$ och $(1,0)$ är stationära punkter. Om vi låter x_1 resp. x_2 bli stora, ser vi att $f \to \pm\infty$ om $x_1 \to \pm\infty$, och att om $x_1 > 0$ så $f \to \infty$ om $x_2 \to \pm\infty$. Är $x_1 < 0$ gäller att $f \to -\infty$ om $x_2 \to \pm\infty$.
b) För att bestämma karaktären hos de stationära punkterna, förutom de globala maxima och minima vid oändligheten, måste vi beräkna f:s hessian.

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 6 - 12x_2 & -12x_1 + 12x_2 + 6 \\ -12x_1 + 12x_2 + 6 & 12x_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} (x = (0,0)) : \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \\ (x = (1,0)) : \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \end{cases}$$

där egenvärdena i punkten $(0,0)$ är ca. -9.71, 3.71 medan de i $(1,0)$ är ca. 2.29, 15.7. Origo är alltså en sadelpunkt medan $(1,0)$ är ett lokalt minimum.
c)) Se figuren nedan.



Heath:7.1

Uppgift: Givet datapunkterna (t, y): $(-1, 1)$, $(0, 0)$ och $(1, 1)$, bestäm det interpolerande andragradspolynomet i

a) den monomiala basen,

b) Lagrangebasen och

c) Newtonbasen.

Visa att alla tre representationer ger samma polynom.
Lösning:
a) För att bestämma polynomet i den monomiala basen löser vi ekvationssystemet $x_1 + x_2t_i + x_3t_i^2 = y_i$, $i = 1, 2, 3$, dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x = (0, 0, 1) \to p(t) = t^2$$

b) I lagrangebasen,

$$l_i(t) = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{n-1}(t - t_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n-1}(t_i - t_j)},$$

beräknar vi (eftersom basfunktionen $l_j(t_i) = \delta_{ij}$)

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{n-1}(t - t_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n-1}(t_i - t_j)},$$

vilket i vårt fall blir

$$p(t) = -\frac{t(t-1)}{(-1-0)(-1-1)} + \frac{t(t+1)}{(1-0)(1-(-1))} = -\frac{t(t-1)}{2} + \frac{t(t+1)}{2} \quad (= t^2)$$

c) Newtonbasen har basfunktionerna

$$\phi_i(t) = \prod_{j=1}^{i-1}(t - t_j),$$

så vi måste lösa ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = (1, -1, 1).$$

Newtonpolynomet är alltså

$$p(x) = 1 - (t+1) + (t+1)t \quad (= t^2).$$

Heath:7.5

Uppgift: Är det i allmänhet möjligt att interpolera n punkter med ett styckvis kvadratiskt polynom som är

a) en gång kontinuerligt deriverbart?

b) två gånger kontinuerligt deriverbart?

Om "ja", förklara varför, om "nej", vilket är det största n för vilket det är möjligt.
Lösning: På a) svarar vi Ja och på b) svarar vi Nej. Anledningen till att det går att skapa ett en gång kontinuerligt deriverbart polynom för ett godtyckligt antal punkter är att vi har tre parametrar att bestämma. På intervallet $[y_i, y_{i+1}[$ går två av dessa åt till att gå igenom punkterna y_i och y_{i+1} medan den tredje kan användas att matcha derivatan, t.ex. i y_i mot polynomet på intervallet $[y_{i-1}, y_i[$.
Endast om $n = 3$ kan vi skapa ett två gånger kontinuerligt deriverbart polynom för alla tänkbara punkter.

Heath:7.7

Uppgift: Jämför kostnaden att konstruera en vandermondematris induktivt, som i avsnitt 7.2.1 med kosntaden då man använder explicit exponentiering.
Lösning: Vi skall jämföra kostnaden att skapa vandermondematrisen med hjälp av

$$a_{i,j} = \phi_j(t_i) = t_i^{j-1}$$

och

$$b_{i,j} = \phi_j(t_i) = t_i^{j-1} = t_i\phi_{j-1}(t_i) = t_i a_{i,j-1}.$$

Vi gör det hela radvis. Om en multiplikation räknas som en operation, och t^n innebär n operationer, så krävs, för att skapa A-matrisen

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} j = n\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2(n-1)}{2} = \frac{n^3}{2} - \frac{n^2}{2},$$

medan det för att skapa B-matrisen endast krävs

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} 1 = n(n-1) = n^2 - n$$

operationer, om det finns n datapunkter och vi interpolerar med ett polynom av grad $n-1$. Så vi tjänar på att använda induktionsmetoden så fort $n > 2$.

Heath:7.9

Uppgift: Visa att formeln som använder dividerade skillnader given i avsnitt 7.2.3,

$$x_j = f[t_1, t_2, \dots, t_j],$$

verkligen ger koefficienten till den j:te basfunktionen i newtoninterpolanten.
Lösning: Vi skall visa att

$$f[t_1, t_2, \dots, t_j] = \frac{f[t_2, t_3, \dots, t_j] - f[t_1, t_2, \dots, t_{j-1}]}{t_j - t_1}.$$

Antag att vi har tre polynom, $P(t)$, $Q(t)$ och $R(t)$, där $P(t)$ är en interpolant till punkterna $t_1, t_2, \dots, t_j$, $Q(t)$ till $t_1, t_2, \dots, t_{j-1}$ och $R(t)$ interpolerar $t_2, t_3, \dots, t_j$. På Newtons form har polynomen formerna

$$\begin{aligned} P(t) &= a_1 + a_2(t - t_1) + \dots + a_j(t - t_1)(t - t_2)\cdots(t - t_{j-1}), \\ Q(t) &= a_1 + a_2(t - t_1) + \dots + a_{j-1}(t - t_1)(t - t_2)\cdots(t - t_{j-2}), \\ R(t) &= b_1 + b_2(t - t_2) + \dots + b_{j-1}(t - t_2)(t - t_3)\cdots(t - t_{j-1}), \end{aligned}$$

där $a_k = f[t_1, \dots, t_k]$, $b_k = f[t_2, \dots, t_k]$. Om vi nu skriver upp den "dividerande differensen" får vi

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{(t - t_1)R(t) - (t - t_j)Q(t)}{t_j - t_1} = \frac{(t - t_1)R(t) - (t - t_1 + t_1 - t_j)Q(t)}{t_j - t_1} = \\ &= Q(t) + \frac{(t - t_1)[R(t) - Q(t)]}{t_j - t_1} = P(t) \end{aligned}$$

eftersom vänsterledet interpolerar f i $t_1, t_2, \dots, t_j$ (och interpolationspolynomet är unikt). Nu har vi att (från definitionen av $P(t)$ och $Q(t)$)

$$P(t) = Q(t) + f[t_1, \dots, t_j](t - t_1)(t - t_2)\cdots(t - t_{j-1}),$$

och att högstagradstermen i $S(t)$ är $t[R(t) - Q(t)]/(t_j - t_1)$ vilken har koefficienten

$$\frac{f[t_2, t_3, \dots, t_j] - f[t_1, t_2, \dots, t_{j-1}]}{t_j - t_1}$$

som då måste vara lika med högstagradstermen i $P(t)$, $f[t_1, t_2, \dots, t_j]$.

Heath:8.1

Uppgift:

a) Beräkna det approximativa värdet av integralen $\int_0^1 x^3\,dx$, dels med mittpunktsregeln och dels med trapetsregeln.

b) Använd skillnaden mellan de två resultaten för att uppskatta felet i vart och ett av dem.

c) Kombinera de två resultaten för att få Simpsons metods approximation av integralvärdet.

d) Skulle du förvänta dig att detta värde är det exakta för problemet? Varför?

Lösning:
a)) Mittpunktsregeln innebär att man gör en styckvis konstant approximation av integranden, så

$$I_M(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right).$$

Här har vi bara ett enda intervall, så vi får

$$I_M(f) = (1-0) f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Trapetsregeln innebär att man gör en styckvis linjär approximation av integranden,

$$I_T(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{2}.$$

Med $f(x) = x^3$ och ett enda intervall blir det hela

$$I_T(f) = (1-0)\frac{f(1) - f(0)}{2} = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$$

b) Som det diskuteras i avsnitt 8.2.3 i boken gäller för felet i mittpunkts resp. trapetsuppskattningarna ungefär

$$\begin{aligned} I(f) &= I_M(f) + E + F + \cdots, \\ I(f) &= I_T(f) - 2E - 4F - \cdots, \\ \Rightarrow E &\approx \frac{I_T(f) - I_M(f)}{3} \end{aligned}$$

vilket här betyder att

$$E \approx \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{3} = \frac{1}{8},$$

så felet med mittpunktsregeln är c.a. $\frac{1}{8}$ medan det är c.a. $\frac{1}{4}$ med trapetsregeln (feluppskattningarna visar sig vara exakta, eftersom $I(f) = \frac{1}{4}$).

c) Simpsons regel är

$$I_S(f) = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i)\left[f(x_{i+1}) + 4f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f(x_i)\right] = \frac{1}{3}(I_T(f) + 2I_M(f)),$$

och vi får

$$I_S(f) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}.$$

d) Eftersom Simpsons regel är exakt för polynom av högst grad tre är integrationen exakt för det aktuella problemet.

Heath:8.3

Uppgift: Givet kvadraturregeln på $[0,1]$,

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

som är baserad på ett interpolerande polynom, gäller att $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$?
Lösning: Koefficienterna gör att vi approximerar polynom av grad $n-1$ exakt, och därmed är $Q(f)$ exakt för alla sådana polynom. Ett exempel på ett polynom av grad $n-1$ är nolltegradspolynomet $f(x) = 1$. För detta måste då gälla att $1 = Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot 1$ eftersom integralen av $f(x)$ är 1 på intervallet $[0,1]$.

Heath:8.8

Uppgift: När man approximerar förstaderivatan hos en funktion är både framåtdifferensformeln

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \partial f,$$

och bakåtdifferensformeln

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \bar{\partial} f,$$

exakta till första ordningen i h. Ta fram en approximation som kombinerar framåt- och baktåtdifferenserna som är exakt till andra ordningen i h.
Lösning: Vi Taylorutvecklar $f(x+h)$ och $f(x-h)$:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) + \cdots, \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) + \cdots. \end{aligned}$$

Subtraherar vi den andra utvecklingen från den första får vi

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) &= 2hf'(x) + 2\frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \\ \Rightarrow \quad f'(x) &\approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\partial f + \bar{\partial} f}{2}, \end{aligned}$$

vilken är exakt till andra ordningen i h.

Heath:8.9

Uppgift: Givet en tillräckligt glatt funktion $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, använd en Taylorserie för att härleda en differensapproximation till $f'(x)$ som använder värdena hos $f(x)$, $f(x+h)$ och $f(x+2h)$ vilken är exakt till andra ordningen.
Lösning: Vi Taylorutvecklar $f(x+h)$ och $f(x+2h)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) + \cdots,$$
$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2^2\frac{h^2}{2!}f''(x) + 2^3\frac{h^3}{3!}f'''(x) + 2^4\frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) + \cdots.$$

För att få något som är exakt till andra ordningen vill vi eliminera termerna framför $f''(x)$ i uttrycken. Detta lyckas vi med om vi tar

$$f(x+2h) - 4f(x+h) = -3f(x) - 2hf'(x) + 4\frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots,$$

så vi får en bra approximation av första derivatan med

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}.$$

Heath:8.10

Uppgift: Betrakta följande två metoder att approximera $f''(x)$ med:

1. $$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

2. Interpolera f i punkterna $x-h$, x och $x+h$ med ett kvadratiskt polynom $p(x)$ och beräkna sedan $p''(x)$.

Ger dessa två metoder samma resultat? Varför?
Lösning: Med Newtons metod för interpolation gäller att

$$p(x) = f[x-h] + (x-h)f[x-h,x] + x(x-h)f[x-h,x,x+h],$$

så

$$p''(x) = 2f[x-h,x,x+h] = 2\frac{f[x,x+h] - f[x-h,x]}{2h} = \frac{\frac{f[x+h]-f[x]}{h} - \frac{f[x]-f[x-h]}{h}}{h} =$$
$$= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

vilket ju är samma!

Heath:9.1

Uppgift: Skriv vart och ett av följande ODE som ett ekvivalent första ordningens system av ODE.

a) $y'' = t + y + y'$.

b) $y''' = y'' + ty$.

c) $y''' = y'' - 2y' + y - t + 1$.

Lösning: Metoden är att skapa en z-vektor som innehåller alla y-derivatorna utom den högsta. Sedan deriverar man denna z-vektor en gång och identifierar termer.
a)

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ t + y + y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ t + z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ y'' - 2y' + y - t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_3 + 2z_2 + z_1 - t + 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ y'' + ty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_3 + tz_1 \end{pmatrix}.$$

Heath:9.3

Uppgift: Är ODE-systemet

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_2 \end{cases}$$

stabilt? Förklara?
Lösning: Generaliseringen av stabilitetsbegreppet för testekvationen

$$y' = \lambda y \quad \Rightarrow \quad y(t) = y(0)e^{\lambda t},$$

vilken är stabil om $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$, är för det linjära systemet

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}(0)e^{At}$$

att stabilitet inträffar om samtliga egenvärden till A är ≤ 0.
Vi skall alltså kolla egenvärdena till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

vilket är lätt eftersom A är triangulär. Egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ står på diagonalen. Eftersom båda är mindre än noll är ODE-systemet stabilt.

Heath:9.7

Uppgift: Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = y, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

a) Uttryck denna andra ordningens ODE som ett system av två första ordningens ODE.

b) Vilka är motsvarande begynnelsevillkor?

c) Är detta system stabilt?

d) Utför ett steg med Euler-framåt-metoden med steglängden $h = 0.5$.

e) Är Euler-framåt-metoden stabil för detta problemet med den aktuella steglängden?

f) Är Euler-bakåt-metoden stabil för detta problemet med den aktuella steglängden?

Lösning:
a) För att skriva om ODE:n till ett system av första ordningen inför vi den nya vektorn $z = (z_1, z_2) = (y, y')$ så $z' = (y', y'') = (y', y) = (z_2, z_1)$, dvs.

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z = Az.$$

b) Det är bara att översätta begynnelsevillkoren:

$$z(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Systemet är stabilt om egenvärdena till A samtliga är mindre än eller lika med noll. Här är $\lambda = \pm 1$, så systemet är instabilt.
d) Euler framåt:

$$z_{k+1} = z_k + h_k f(t_k, y_k)$$

Med $z_0 = (1, 2)$, $h_0 = 0.5$ och $f(0, z_0) = Az_0 = (2, 1)$ får vi

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

e,f) Enligt avsnitt 9.3.2 och 9.4 är Euler framåt resp. Euler bakåt stabila för (testekvationen)

$$|1 + \lambda h| < 1 \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{|1 - \lambda h|} < 1.$$

I vår uppgift har vi $\lambda h = \pm 0.5$ så både Euler framåt och Euler bakåt är instabila.

Heath:9.10

Uppgift: Använd testekvationen $y' = \lambda y$ för att analysera noggrannheten och stabiliteten hos Heuns metod. Verifiera speciellt att den är exakt till andra ordningen, och beskriv hur stabilitetsområdet ser ut i det komplexa talplanet.
Lösning: Enligt avsnitt 9.6.2 är Heuns metod Runge-Kutta metoden

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\ k_1 &= h_k f(t_k, y_k), \\ k_2 &= h_k f(t_k + h_k, y_k + k_1). \end{aligned}$$

Med testekvationen instoppad ($f = \lambda y$) får vi

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h_k [\lambda y_k + \lambda(y_k + h_k \lambda y_k)] = y_k + \frac{1}{2}\lambda h_k y_k (2 + \lambda h_k) = y_k \left(1 + \lambda h_k + \frac{\lambda^2 h_k^2}{2}\right).$$

Detta kan vi nu jämföra med Taylorutveklingen av den exakta lösningen av testekvationen på ett tidssteg, $y' = \lambda y$, $\Rightarrow$ $y(t_{k+1}) = y(t_k)e^{\lambda h_k}$, vilken är

$$y(t_{k+1}) = y(t_k)\left(1 + \lambda h_k + \frac{(\lambda h_k)^2}{2!} + \frac{(\lambda h_k)^3}{3!} + O(h_k^4)\right).$$

Om vi subtraherar dessa två uttryck från varandra får vi

$$y_{k+1} - y(t_{k+1}) = [y_k - y(t_k)] + [y_k - y(t_k)]\lambda h_k + [y_k - y(t_k)]\frac{(\lambda h_k)^2}{2!} + O(h_k^3),$$

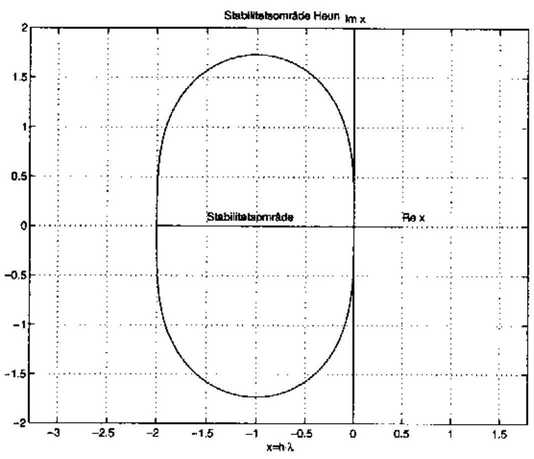
så om $y_k = y(t_k)$ skiljer de sig bara i tredje ordningen och uppåt. Heuns metod är alltså exakt till andra ordningen.
Hur är det då med stabiliteten? Vi hade att

$$y_{k+1} = y_k\left(1 + \lambda h_k + \frac{\lambda^2 h_k^2}{2}\right) = y_0\left(1 + \lambda h_k + \frac{\lambda^2 h_k^2}{2}\right)^{k+1}.$$

Detta betyder att Heuns metod är stabil när

$$\left|1 + \lambda h_k + \frac{\lambda^2 h_k^2}{2}\right| < 1.$$

Om man plottar konturen på denna detta villkor i t.ex. MATLAB får man (se Sven Ugglas lösningar)



Heath:10.1

Uppgift: Betrakta tvåpunktsrandvärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = y^3 + t, \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

För att använda inskjutningsmetoden vid lösning av detta problem måste man gissa den initiala lutningen $y'(a)$. Ett sätt att göra en sådan gissning på är att göra ett enda steg med Eulers metod med steglängden $h = b - a$.

a) Skriv ut den resulterande algebraiska ekvationen som får med detta förfarande.

b) Vilket startvärde får man?

Lösning:
a,b) Vi får först skriva om ODE:n som ett system av två ODE:er. Sätt först $z = (y, y')$, och få

$$z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1^3 + t \end{pmatrix}.$$

Framåt Euler blir nu

$$z_1 = z_0 + hf(t_0, z_0),$$

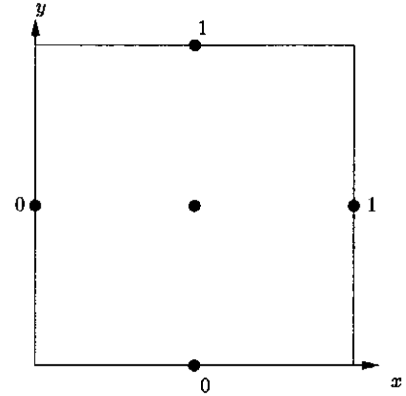
så

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix} y'(a) \\ y^3(a) + a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \beta \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ X \end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix} X \\ \alpha^3 + a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -(b-a) & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ (b-a)(\alpha^3 + a) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = y'(a) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}. \end{aligned}$$

Vi passar på att notera att denna approximation går att räkna ut på ett betydligt enklare sätt.

Heath:11.2

Uppgift: Betrakta finitadifferenslösningen till Poissonekvationen $u''_{xx} + u''_{yy} = x + y$ på enhetskvadraten med randvillkor och nätpunkter enligt figuren. Använd en andra ordningens metod för att räkna ut det approximativa värdet i mittpunkten.



Lösning: Metoden är densamma som i den andra laborationen i Reell matematisk analys, del B — börja med att göra följande approximationer av andraderivatan:

$$\begin{aligned} u''_{xx}(x,y) &\approx \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h}, \\ u''_{yy}(x,y) &\approx \frac{u(x,y+k) - 2u(x,y) + u(x,y-k)}{k}, \\ \Rightarrow (h=k) \quad \Delta u(x,y) &\approx \frac{u(x+h,y) + u(x,y+h) - 4u(x,y) + u(x-h,y) + u(x,y-h)}{h^2} \end{aligned}$$

Med $h = \frac{1}{2}$, $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ och $u(1, \frac{1}{2}) = u(\frac{1}{2}, 1) = 1$, $u(0, \frac{1}{2}) = u(\frac{1}{2}, 0) = 0$ får vi ekvationen

$$\begin{aligned} \Delta u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &\approx \frac{1}{(1/2)^2}[1 + 1 - 4u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + 0 + 0] = x + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 8 - 16u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Extra 1

Uppgift: Lös ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2+\varepsilon & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0, \text{ litet,}$$

med och utan radbyte. Diskutera resultatet. Vad händer med noggrannheten då $\varepsilon \to 0^+$? Kontrollera med MATLAB och $\varepsilon = 10^{-14}$!
Lösning: Utan radbyte: På totalmatrisform får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2+\varepsilon & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{R.E.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{R.E.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+\frac{2}{\varepsilon} & 2+\frac{2}{\varepsilon} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Här får vi termer med $2/\varepsilon$, och om ε är väldigt litet blir dessa termer ohyggligt stora, och $1 +$ ohyggligt stort $\approx$ ohyggligt stort, vilket leder till ett approximativt ekvationsystem med lösningen $\boldsymbol{x} = (1, 0, 1)$.

Med radbyte — låt raden med det största pivotelementet stå först.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2+\varepsilon & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{R.E.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2+\varepsilon & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{R.E.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1+\varepsilon & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{R.E.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1+\varepsilon & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1+\varepsilon}\right) & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Här får vi inga speciella problem att lösa det, utan lösningen blir istället $\boldsymbol{x} = (1, -1/2, 3/2)$.

Extra 2

Uppgift: Betrakta

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = 0 \quad [= (x-1)^2].$$

Gör 4 iterationer med Newtons metod och feluppskatta.
Lösning: Newtoniterationen är

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2x_k + 1}{2x_k - 2} = \frac{x_k^2 - 1}{2x_k - 2} = \frac{x_k + 1}{2}$$

Med startapproximationen $x_0 = 2$ får vi

$$x_1 = 1.5, \quad x_2 = 1.25, \quad x_3 = 1.125, \quad x_4 = 1.0625.$$

Vi ser att felet minskar med en faktor 2 i varje approximation.

Extra:3

Uppgift: Vi skall maximera flödesarean i en timmerränna som är formad som en likbent parallelltrapets givet att ursprungsplåten är 6 m bred. Det vi har till vårt förfogande är att vi kan ändra bockningsvinkeln α och bottenlängden x.

a) Ange tvärsnittsarean A som en funktion av x och α.

b) Ange det ickelinjära ekvationssystem som ger stationära punkter till $A(x, \alpha)$.

c) Ange Newtons metod för systemet i b).

Lösning:
a)) Arean för en parallellogram är $A_p = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ där i vårt fall $h = \frac{1}{2}(6-x)\sin\alpha$, $b_1 = x$ och $b_2 = x + (6-x)\cos\alpha$. Vi får alltså att

$$A = \frac{1}{4}(6-x)\sin\alpha[2x + (6-x)\cos\alpha].$$

b) Systemet vi skall lösa är $\nabla f = 0$, vilket här blir

$$\nabla f = \frac{1}{4}\left(2\sin\alpha[6 - 2x + (x-6)\cos\alpha], (6-x)[(x-6)\cos 2\alpha - 2x\cos\alpha]\right) = 0.$$

c) Systemet ovan är ju lite krångligt, så det är bra att det finns numeriska metoder att tillgå. För att kunna använda Newtons metod måste vi även beräkna systemets andraderivator, dvs. hessianen. Vi får då

$$H_f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(2-\cos\alpha)\sin\alpha & -(3-x)\cos\alpha - \frac{1}{2}(-6+x)\cos 2\alpha \\ -(3-x)\cos\alpha - \frac{1}{2}(-6+x)\cos 2\alpha & -\frac{1}{2}(-6+x)(-x+2(x-6)\cos\alpha)\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Med denna matris och gradienten är nu Newtons metod

$$H_f(x_k)s_k = -\nabla f(x_k),$$
$$x_{k+1} = x_k + s_k.$$

Extra:4

Uppgift: Gör ett par iterationssteg med steepest-descent-metoden och med konjugerad-gradient-metoden på problemet

$$\min_{x \in R^2} x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1 + 1$$

utgående från startpunkt i origo.
Lösning: Vi känner igen detta som ett problem med målfunktionen $f(x) = x^T A x - x^T b + c$, så vi vet att om vi använder Newtons metod konvergerar vi i ett enda steg. Detta skall vi nu inte göra. Vi börjar med brantaste lutningsalgoritmen. Allmänt för det givna problemet har vi

$$\nabla f(x) = (2x_1 - x_2 - 1, -x_1 + 2x_2).$$

Iterationsstegen i brantaste lutningsmetoden finns uppskrivna i (8), och med $x_0 = (0,0)$ ($f(x_0) = 1$) får vi

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_0) &= (-1,0), \\
f(x_0 - \alpha \nabla f(x_0)) &= f(\alpha, 0) = \alpha^2 - \alpha + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}, \\
x_1 &= (0,0) - \frac{1}{2}(-1,0) = \frac{1}{2}(1,0), \quad f(x_1) = \frac{3}{4} \\
\nabla f(x_1) &= \frac{1}{2}(0,-1) \\
f(x_1 - \alpha \nabla f(x_1)) &= f(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \\
x_2 &= \frac{1}{2}(1,0) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}(0,-1) = \frac{1}{4}(2,1), \quad f(x_2) = \frac{11}{16} \approx 0.6875,
\end{aligned}$$

vilket är rätt ok, eftersom $x^* = (2/3, 1/3)$ och $f(x^*) = 2/3$.

Så över till konjugerad-gradient-metoden. Här har vi istället iterationsstegen

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \alpha_k s_k \\
g_{k+1} &= \nabla f(x_{k+1}) \\
\beta_{k+1} &= (g_{k+1}^T g_{k+1})/g_k^T g_k \\
s_{k+1} &= -g_{k+1} + \beta_{k+1} s_k
\end{aligned}$$

där man väljer $g_0 = \nabla f(x_0) = (-1,0)$, $s_0 = -g_0 = (1,0)$ och α_k med en linjesökning precis som innan. Vi får nu (α_0 som förut)

$$\begin{aligned}
x_1 &= (0,0) + \frac{1}{2}(1,0) = \frac{1}{2}(1,0), \quad f(x_1) = \frac{3}{4} \\
g_1 &= \frac{1}{2}(0,-1) \\
\beta_1 &= \|g_1\|_2^2 / \|g_0\|_2^2 = \frac{1}{4} \\
s_1 &= \frac{1}{2}(0,1) + \frac{1}{4}(1,0) = \frac{1}{4}(1,2) \\
f(x_1 + \alpha s_1) &= f(3\alpha/4, \alpha/2) = \frac{7}{16}\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{6}{7} \\
x_2 &= \frac{1}{2}(1,0) + \frac{6}{7}\frac{1}{4}(1,2) = (5/7, 3/7), \quad f(x_2) = \frac{33}{49} \approx 0.6735,
\end{aligned}$$

vilket alltså är ännu bättre även om det krävs lite mer jobb.

Extra:5

Uppgift: Vi skall studera minstakvadratformuleringen av problemet

$$y(t) = c_0 + c_1 e^{-c_2 t} \sin(c_3 t)$$

och speciellt ange residual, jacobian och det linjära minstakvadratproblem som löses i varje Gauss-Newtonsteg.

Lösning: Vi börjar med att skriva upp residualen,

$$r_i(c) = y_i - f(t_i, c), \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

så minstakvadratproblemet är att minimera $g(c) = \frac{1}{2} r^T(c) r(c)$. Jacobianen till residualen får vi som

$$\begin{aligned}
\{J(c)\}_{i,0} &= \frac{\partial r_i(c)}{\partial c_0} = -1, \quad \{J(c)\}_{i,1} = \frac{\partial r_i(c)}{\partial c_1} = -e^{c_2 t_i} \sin(c_3 t_i), \\
\{J(c)\}_{i,2} &= \frac{\partial r_i(c)}{\partial c_2} = -c_1 t_i e^{c_2 t_i} \sin(c_3 t_i), \quad \{J(c)\}_{i,3} = \frac{\partial r_i(c)}{\partial c_3} = -c_1 t_i e^{c_2 t_i} \cos(c_3 t_i).
\end{aligned}$$

Gauss-Newtons metod innebär att vi nu iterativt skall lösa minstakvadratproblemet

$$\begin{aligned}
J(c_k) s_k &\approx -r(c_k), \\
c_{k+1} &= c_k + s_k.
\end{aligned}$$

Mer explicit skall vi alltså lösa minstakvadratproblemet

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -e^{c_{k2} t_i} \sin(c_{k3} t_i) & -c_{k1} t_i e^{c_{k2} t_i} \sin(c_{k3} t_i) & -c_{k1} t_i e^{c_{k2} t_i} \cos(c_{k3} t_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} s_k = \begin{pmatrix} \vdots \\ y_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

för $k = 0, \ldots$ till konvergens.

Extra:6

Uppgift: Hos en handelsträdgård kan man köpa konstgödsel av två slag – *Växa högt* och *Växa tätt* innehållande följande olika andelar kväve (N), fosfor (P) och kalium (K):

	% N	% P	% K	kostnad/25 kilo
Växa högt	19	7	15	43
Växa tätt	21	5	14	38
Vårt behov	750	250	600	

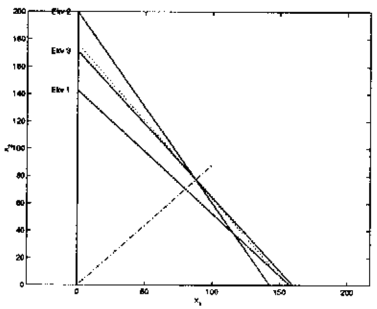
a) Formulera problemet att inhandla konstgödning så att kostnaderna minimeras.

b) Lös problemet med någon lämplig metod. Ange även om övergödning förekommer av något ämne.

Lösning: a) Om vi kallar mängderna vi köper av de två gödningsämnena för x_1 resp. x_2, blir den totala kostnaden att köpa lite gödsel $c(x) = 43x_1 + 38x_2$ om vi räknar i 25-kilosbuntar. Bivillkoret att handla tillräckligt mycket kväve kan formuleras som att $19/4 \cdot x_1 + 21/4 \cdot x_2 \geq 750$ (25-kilosbuntar), och de övriga bivillkoren blir liknande. Summa sumarum får vi alltså

$$\begin{aligned}
&\min\ c(x) = 43x_1 + 38x_2 \\
\text{då} \quad &(19/4)x_1 + (21/4)x_2 \geq 750 \\
&(7/4)x_1 + (5/4)x_2 \geq 250 \\
&(15/4)x_1 + (14/4)x_2 \geq 600 \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

b) Eftersom vi bara har två variabler att optimera över (x_1 och x_2) kan vi göra det hela grafiskt genom att rita upp bivillkoren i en figur.



Ur figuren ser vi att hörnet mellan bivillkor 2 och 3 är det optimala (vi skall hitta den första hösnpunkten i det tillåtna området med vår vinkelräta linje). Detta eftersom målfunktionen ger att vi skall hitta ett hörn med framförallt så lågt x_1-värde som möjligt. Vid detta hörn gäller att $x_1 = 2000/23$, $x_2 = 1800/23$ och $c(x^*) \approx 6710$. Vi ser att Ekv 1 (N) är mer än väl uppfyllt, så vi bidrar till kväveförorening.

Extra:7

Uppgift: För en kvadratisk spline $s(x)$ gäller

i $s(x)$ och $s'(x)$ är kontinuerliga på (x_1, x_n).

ii På varje delintervall är $s(x)$ ett andragradspolynom.

Bestäm den kvadratiska spline $s(x)$ som interpolerar

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	3	5	6	5

och uppfyller $s'(1) = 0$.

Lösning: Vi skall beräkna koefficienterna till 4 st andragradspolynom, vilket betyder att vi får ett antal ekvationer. För polynomet $p_i(x)$, som bor i intervallet $[x_i, x_{i+1}]$ gäller att

$$p_i(x_i) = f(x_i), \qquad p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \qquad p_i'(x_i) = \begin{cases} p_{i-1}'(x_i), & i \neq 0 \\ 0, & i = 0 \end{cases}, i = 1, 2, \ldots, n-1$$

vilket ger oss alla nödvändiga villkor för att kunna bestämma det entydigt. Eftersom $p_i(x) = a_{i,1} + a_{i,2}x + a_{i,3}x^2$, $p_i'(x) = a_{i,2} + 2a_{i,3}x$, blir dessa villkor desamma som

$$\begin{aligned} a_{i,1} + a_{i,2}x_i + a_{i,3}x_i^2 &= f(x_i), \\ a_{i,1} + a_{i,2}x_{i+1} + a_{i,3}x_{i+1}^2 &= f(x_{i+1}), \\ a_{i,2} + 2a_{i,3}x_i &= a_{i-1,2} + 2a_{i-1,3}x_i, \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 \\ 0 & 1 & x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ a_{i,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \\ a_{i-1,2} + 2a_{i-1,3}x_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dessa ekvationsystem är enklast att lösa i MATLAB, varvid man får

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -10 & 8 & -1 \\ -10 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Extra:8

Uppgift:

a) Bestäm $\int_0^{0.4} f(x)\,dx$ med två korrekta decimaler, då $f(x)$ ger av följande tabell med korrekt avrundade funktionsvärden:

x	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$f(x)$	3.00	2.96	2.86	2.68	2.44	2.14	1.79	1.39	0.94

b) Antag att vi istället vill beräkna integralen $I = \int_0^a f(x)\,dx$, där $a = 0.4 \pm 10^{-2}$. Bestäm I med felgränser.

Lösning:
a) En lösning med två korrekta decimaler innebär att vi vill ha ett fel som är mindre än 0.005. Vi kan känna lite på problemet först genom att beräkna mittpunkts- och trapetsregeln för integralen med ett enda steg med intervallängden $h = 0.4$:

$$M_{0.4} = 0.4 \cdot 2.44 = 0.976 \qquad T_{0.4} = 0.4 \cdot \frac{3.00 + 0.94}{2} = 0.788,$$

vilket betyder att avrundningsfelet är ungefär $E \approx (T - M)/2 \approx -0.0627$, dvs. knappt en korrekt decimal. Simpsons formel ger med denna steglängd $S_{0.4} = 2M/3 + T/3 \approx 0.9133$. Hur kan vi nu göra för att få ett tillräckligt noggrant resultat? Ett hett tips är att använda Richardsonextrapolation för mittpunktsformeln. För detta behöver vi även

$$M_{0.2} = 0.2 \cdot (2.86 + 1.79) = 0.930.$$

Richardsonextrapolation ger nu

$$I \approx M_{0.2} + \frac{M_{0.2} - M_{0.4}}{2^2 - 1} \approx 0.9147,$$

där nu felet är i storleksordningen $O(0.2^4)$. Vårt svar blir att integralen är 0.915 ± 0.002. (Vilket då inte ger två korrekta decimaler, men ett väldigt litet fel.)

b) För att uppskatta hur mycket integralens värde beror på intervallets övre gräns, kan vi ta och approximera funktionen i slutet med en rät linje och sedan extra- eller interpolera. En linjär anpassning av funktionen på det sista intervallet ger

$$p(x) = 4.54 - 9x$$

Integralen av denna funktion på $[0.39, 0.4]$ resp. $[0.4, 0.41]$ är 0.00985 resp. 0.00895, så det är rimligt att osäkerheten i felgränsen ger ett fel på ± 0.01. Sammantaget blir då $I = 0.915 \pm 0.012$.

Tenta 1999-05-31: Uppgift 5

Uppgift: Avbildningen T på $\mathcal{P}_3$ definieras genom

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_2 + a_1x + a_0x^2$$

a) Bestäm $N(T)$ och dess dimension, samt $V(T)$ och dess dimension. **(3p)**

b) Bestäm matrisen för avbildningen i lämplig bas. **(2p)**

c) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen. **(3p)**

Lösning:
a) Vi har definitionerna

$$N(T) = \{u : T(u) = 0\},$$
$$V(T) = \{u : T(v) = u\},$$

så för att bestämma nollrummet till T behöver vi hitta alla vektorer i $\mathcal{P}_3$, $u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ sådana att

$$a_2 + a_1x + a_0x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = a_2 = 0,$$

vilket betyder att vi kan välja a_3 fritt. Nollrummet har således dimension 1 och består av cx^3-vektorer. Hur värderummet ser ut ser vi direkt från definitionen av T — det består av andragradspolynom och har därmed dimensionen 3.
b) Om vi väljer att arbeta i basen $1, x, x^2, x^3$ blir det extra lätt. Matrisen för T blir då

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

För denna 4×4-matris blir den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda[\lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda)] = -\lambda(-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1) = -\lambda(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 1),$$

så A:s egenvärden är -1, 0, 1, 1. Motsvarande egenvektorer är

$$\lambda = 0: \quad cx^3 \text{ (se a)},$$
$$\lambda = 1: \quad c + cx^2 \text{ resp. } dx.$$
$$\lambda = -1: \quad c - cx^2.$$

Tenta 1999-08-27: Uppgift 3

Uppgift:

a) Låt $u \neq 0$ och $v \neq 0$ vara två vektorer i ett linjärt rum med skalärprodukt sådana att $\|u\| = \frac{2}{\sqrt{3}}\|v\| = 2\|u - v\|$. Bestäm vinkeln mellan u och v. **(4p)**

b) Betrakta rummet $C[-1,1]$ med skalärprodukten $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Ta fram en ON-bas för $\mathcal{P}_2[-1,1]$, underrummet av polynom av högst grad två. Bestäm sedan $p \in \mathcal{P}_2$ som minimerar $\int_{-1}^{1}[x^5 - p(x)]^2\,dx$. **(6p)**

Lösning:
a) Vi använder definitionen av vinkel utifrån skalärprodukt. Först noterar vi att

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle,$$

så vi får

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{2}\frac{\|u\|}{\|v\|} + \frac{1}{2}\frac{\|v\|}{\|u\|} - \frac{1}{2}\frac{\|u-v\|^2}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8}\frac{\|u\|}{\|v\|} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Det betyder att vinkeln $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
b) För att hitta en ON-bas använder vi Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod på den kända basen $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$. Vi får:

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$e_2' = f_2 - \langle f_2, e_1\rangle e_1 = x - \int_{-1}^{1} x\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx\frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2}\cdot 0 = x,$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

$$e_3' = f_3 - \langle f_3, e_1\rangle e_1 - \langle f_3, e_2\rangle e_2 = x^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx - \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\,dx = x^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3} = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Det bästa polynomet är ortogonalprojektionen av x^5 på $\mathcal{P}_2[-1,1]$:

$$p(x) = \langle x^5, e_1\rangle e_1 + \langle x^5, e_2\rangle e_2 + \langle x^5, e_3\rangle e_3 = 0 + \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1} x^5 \cdot x\,dx + 0 = \frac{3}{7}x,$$

eftersom en del av polynomen är udda på intervallet.

Tenta 1999-08-27: Uppgift 4

Uppgift: Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm $\text{rang}(A)$. **(2p)**

b) Ta fram alla lösningar till systemet $Ax = b$ då $b = (1, 0, -1)$ samt ange en bas för $N(A)$. **(3p)**

c) Dela upp vektorn $v = (1, 1, 1, 1)$ i $v = v' + v''$, där $v' \in N(A)$ och $v'' \in N(A)^{\perp}$ (ortogonala komplementet till nollrummet). **(5p)**

Lösning:

a,b) För att kolla rangen kan vi välja att antingen kolla rad- eller kolonnrang mha. rad- eller kolonnoperationer. Eftersom A är en 3×4-matris väljer jag att undersöka radrangen. Eftersom det är måttligt spännande att göra flera likadana kolonnoperationer kan vi lägga till högerledet b ur b-uppgiften och på en gång räkna fram rangen, $N(A)$ och x:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{\text{R.E.}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{\text{R.E.}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

så $\text{rang}(A) = 2$, och

$$x = \begin{pmatrix} 1 - 2s - (-1 - s + t) \\ -1 - s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - s - t \\ -1 - s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där vi kan avläsa $N(A)$:s basvektorer $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1, 0)$ och $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1)$.

c) Vi kan beräkna v' genom att projicera v på $N(A)$:

$$v' = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 = \frac{1}{3}(-1 - 1 + 1 + 0) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(-1 + 1 + 0 + 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 + 1 \\ -1 + 0 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eftersom $e_1 \perp e_2$. Vi får sedan $v'' = v - v' = \frac{1}{3}(3, 1, 4, 2)$.

Tenta 1999-08-27: Uppgift 6

Uppgift: Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: **(6p)**

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t), & x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Med $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ kan vi skriva systemet som

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi vill diagonalisera detta system, vilket vi gör genom att diagonalisera $A = TDT^{-1}$, där D är en diagonalmatris med A:s egenvärden på diagonalen och T är en matris med A:s egenvektorer som kolumner. För att kunna ta fram D och T måste vi först beräkna A:s egenvärden:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 6$$

så $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}i$. Motsvarande egenvektorer blir för $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}i$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}i & -1 \\ 2 & -\sqrt{2}i \end{pmatrix} g_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

och för $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}i$ får vi på samma sätt $\boldsymbol{g} = (1, -\sqrt{2}i)$. Det betyder att

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}i & -1 \\ -\sqrt{2}i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i \\ \sqrt{2} & i \end{pmatrix}.$$

Nu kan vi diagonalisera ekvationssystemet gernom att göra variabelbytet $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ och multiplicera med T^{-1} från vänster:

$$\boldsymbol{y}'(t) = D\boldsymbol{y}(t) \Rightarrow \begin{cases} y_1' = (1 + \sqrt{2})y_1, \\ y_2' = (1 - \sqrt{2})y_2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} \\ C_2 e^{(1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix}$$

Vi kan nu återgå till de ursprungliga variablerna och sedan sätta in begynnelsevillkoret.

$$\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{2})t},$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2},$$

så vårt svar blir att

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{2})t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{2})t}.$$

Tenta 2000-01-14: Uppgift 2

Uppgift:

a) Undersök om mängden S_n av inverterbara matriser av ordning $n \times n$ är ett linjärt vektorrum m.a.p. de vanliga matrisoperationerna. **(2p)**

b) Definiera om addition på S_n så att $A + B = AB$. Är S_n ett linjärt vektorrum nu? **(2p)**

c) Låt M_n vara det linjära rummet av alla matriser av ordning $n \times n$ och låt $T : M_n \to M_n$ vara den linjära avbildningen som definieras av $T(A) = A - A^T$. Visa att nollrummet $N(A)$ är mängden av symmetriska matriser och värderummet $V(T)$ är mängden av skevsymmetriska matriser. **(3p)**

d) Bestäm ett egenvärde $\lambda \neq 0$ till T i c-uppgiften och motsvarande egenvektor. **(3p)**

Lösning:
a) Uppgiften är att kontrollera definition 1.1, s. 2 i Kjell Holmåkers kompendium. S_n faller redan på det första testet eftersom $A \in S_n,\ B \in S_n \not\Rightarrow (A + B) \in S_n$ i allmänhet. Tag t.ex. $B = -A$ — nollmatrisen inte är inverterbar. Svar: Nej.
b) Återigen nej. Denna gången faller S_n på kommutativiteten — oftast gäller inte att $AB = BA$.
c) Nollrummet: För vilka matriser A gäller att $T(A) = 0$? Jo, $T(A) = 0 \Rightarrow A - A^T = 0 \Rightarrow A = A^T$. Alltså består nollrummet av symmetriska matriser. Värderummet: Det räcker med att visa att $T(A) = A - A^T$ är skevsymmetrisk. Transponera: $[T(A)]^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -T(A)$. Alltså består värderummet av skevsymmetriska matriser.
d) Låt T verka på en skevsymmetrisk matris A: $T(A) = A - A^T = A + A = 2A$. Alltså är alla skevsymmetriska matriser egenvektorer med egenvärdet 2.

Tenta 1999-03-06: Uppgift 2

Uppgift: Visa hur man givet en SVD-faktorisering av matrisen A kan få fram lösningen med minsta norm $\|x\|_2$ till ett minstakvadrat-problem $\min_x \|Ax - b\|_2$. **(8p)**
Lösning: Antag att A är en $m \times n$-matris med $m \geq n$ som har full rang. Vi har alltså $A = U\Sigma V^T$, där U är en $m \times n$-matris s.a. $U^TU = E$. Tag nu en $m \times (m-n)$-matris $\tilde{U}$ så att $B = (U\ \tilde{U})$ är en ortogonal $m \times m$-matris. Att B är ortogonal innebär att $\|x\|_2 = \|Bx\|_2 = \|B^Tx\|_2$, så vi kan nu skriva

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|U\Sigma V^T x - b\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} U^T \\ \tilde{U}^T \end{pmatrix} (U\Sigma V^T x - b) \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \Sigma V^T x - U^T b \\ -\tilde{U}^T b \end{pmatrix} \right\|_2^2 =$$
$$= \|\Sigma V^T x - U^T b\|_2^2 + \|\tilde{U}^T b\|_2^2$$

Detta uttryck minimeras om vi väljer $\Sigma V^T x - U^T b = 0$, dvs. $x = V\Sigma^{-1}U^T b\ (= A^+ b)$.

Tenta 1999-03-06: Uppgift 5

Uppgift: En modell på formen $\psi(t) = \alpha e^{-\beta t} + \gamma$ ska genom val av parametrarna α, β och γ anpassas till en mätserie (t_i, ψ_i), $i = 1, 2, \ldots, m$, där $m > 3$. Formulera motsvarande icke-linjära minstakvadrat-problem. Ange residual, Jacobian och teckna en iteration i Gauss-Newtons metod.

Lösning: Problemet är att minimera residualen $f(t, \alpha, \beta, \gamma)$, där $f_i = \alpha e^{-\beta t_i} + \gamma - \psi(t_i)$. Dvs.

$$\min_{\alpha,\beta,\gamma} \|f(t, \alpha, \beta, \gamma)\|_2$$

Problemets Jacobian är

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \beta}, \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right) = (e^{-\beta t_i}, -t_i \alpha e^{-\beta t_i}, 1) \quad \Rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-\beta t_i} & -t_i \alpha e^{-\beta t_i} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

och Gauss-Newtons metod är, med $x = (\alpha, \beta, \gamma)$,

$$J(x_k) d_k = -f(x_k),$$
$$x_{k+1} = x_k + d_k.$$

Tenta 1999-08-21: Uppgift 1

Uppgift: Man önskar bestämma brännvidden f för en viss lins med hjälp av linsformeln $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, där $a = \tilde{a} \pm \delta a$, $b = \tilde{b} \pm \sigma b$. Teckna osäkerheten i beräkningen av f, då δa och δb antas små. Ange speciellt osäkerheten då $\tilde{a} = 2$, $\tilde{b} = 8$ och $\delta a = \delta b = 0.01$. **(4p)**
Lösning: Eftersom vi skall bestämma f, börjar vi med att lösa ut f,

$$f = \frac{ab}{a + b}.$$

För att kunna avgöra osäkerheten differentierar vi detta uttryck,

$$\delta f \approx \frac{\partial f}{\partial a} \delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \delta b = \frac{b^2}{(a+b)^2} \delta a + \frac{a^2}{(a+b)^2} \delta b.$$

Med angivna värden blir då

$$\delta f \approx \frac{8^2}{10^2} \cdot 0.01 + \frac{2^2}{10^2} \cdot 0.01 = 0.0068.$$

Tenta 1999-08-21: Uppgift 2

Uppgift:

a) Visa hur man kan få fram en QR-faktorisering av en matris A med hjälp av elementära speglingar, s.k. Householder-transformationer. **(8p)**

b) Visa hur man givet en QR-faktorisering kan få fram lösningen till minstakvadrat-problemet $\min_x \|Ax - b\|_2$. **(4p)**

Lösning:
a) Målet med QR-faktoriseringen är att skriva $A = QR$, där Q är en ortogonal matris, och R är en uppåt triangulär matris. Första steget är att hitta en transformation U_1 så att ($A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = A_1$)

$$A_2 = U_1 A_1 = \begin{pmatrix} r_{11} & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix}.$$

Vi kan åstakomma detta med en Householdertransformation som avbildar den första kolumnen i A, a_1, på $r_{11}e_1 = (r_{11}, 0, \ldots, 0)$. Detta betyder att

$$U_1 = I - 2u_1u_1^T, \qquad u_1 = \frac{a_1 - r_{11}e_1}{\|a_1 - r_{11}e_1\|_2}, \; r_{11} = \pm\|a_1\|_2,$$

där tecknet på r_{11} väljs så att kancellation undviks ($\operatorname{sign} r_{11} = \operatorname{sign} a_{11}$).

Nästa steg är att dels undvika att ändra den första kolumnen och den första raden medan vi vill göra om den andra kolumnen så att den är på formen $(x, r_{22}, 0, \ldots, 0)$. Detta betyder att vi vill hitta en Householdertransformation som bara verkar på den matris man får om man tar bort den första raden och den första kolumnen från A_2. Förfarandet på denna nya $(n-1) \times (n-1)$-matris är helt analogt med det nyss beskrivna för $n \times n$-matrisen A.
b) Antag att A är en $m \times n$-matris med $m \geq n$ och att A har full rang. Antag vidare att A haar QR-faktoriseringen $A = QR$. Skapa nu matrisen $B = (Q\ \tilde{Q})$ där $\tilde{Q}$ är en $m \times (m-n)$-matris sådan att B är ortogonal. För en godtycklig vektor x gäller då att $\|x\|_2 = \|Bx\|_2 = \|B^Tx\|_2$, varför vi kan skriva

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|B^T(Ax - b)\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} Q^T \\ \tilde{Q}^T \end{pmatrix} (QRx - b) \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} Rx - Q^Tb \\ -\tilde{Q}^Tb \end{pmatrix} \right\|_2^2 =$$
$$= \|Rx - Q^Tb\|_2^2 + \|\tilde{Q}^Tb\|_2^2,$$

vilket minimeras när $\|Rx - Q^Tb\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = R^{-1}Q^Tb$.

Tenta 1999-08-21: Uppgift 5

Uppgift:

a) Visa att vid minimering av en kvadratisk funktion f utan bivillkor så ges optimal steglängd längs sökriktningen $d^{(k)}$ av formeln

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}}{d^{(k)^T} H_f d^{(k)}},$$

där $\nabla f(x^{(k)})$ är gradienten i utgångspunkten $x^{(k)}$, och H_f är Hessianen. **(5p)**

b) Gör två iterationer med Steepest Descent-metoden på problemet $\min_{x \in R^2} 5x_1^2 + x_1x_2 + 0.5x_2^2 - x_1$ utgående från origo. **(5p)**

Lösning:
a) Vi skall hitta α som minimerar

$$g(\alpha) = \min f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}), \tag{10}$$

där $f(x) = \frac{1}{2}x^THx - x^tb + c$. Minimat till (10) hittar vi genom att derivera med avseende på α:

$$g'(\alpha) = \nabla(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})^T d^{(k)},$$

där $\nabla f(x) = Hx - b$, så (H är symmetrisk)

$$g'(\alpha) = [H(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) + b]^T d^{(k)} = \nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)} + \alpha d^{(k)^T} H d^{(k)}$$

Sätter vi detta uttryck lika med noll och löser ut α får vi formeln i uppgiften.
b) Vi har brantaste lutningsmetoden:

$$\alpha_k = \arg\min_\alpha f(x_k - \alpha\nabla f(x_k)) \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|_2^2}{\nabla f(x_k)^T H \nabla f(x_k)},$$
$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k),$$

Här gäller att $\nabla f(x) = (10x_1 + x_2 - 1, x_2 + x_1)$, $H = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $x_0 = (0, 0)$ så

$$\nabla f(x_0) = (-1, 0)$$
$$\alpha_0 = \frac{1}{10}$$
$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x_1) = -0.05$$

Fortsättningen blir

$$\nabla f(x_1) = (0, 0.1)$$
$$\alpha_1 = \frac{0.01}{0.01}$$
$$x_2 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x_2) = -0.055.$$

Tenta 1999-08-21: Uppgift 7

Uppgift: Bestäm en approximation till integralen $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ med hjälp av trapetsformeln. Använd steglängderna $h = 1$ och $h = 0.5$ samt extrapolera med Richardsonextrapolation. (Jämför med exakta lösningen $\ln 2 \approx 0.6931$.) **(6p)**
Lösning: Trapetsregeln över n datapunkter lyder

$$T_h \approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2}[f(x_{i+1}) + f(x_i)],$$

och med $h = 1$ har vi två punkter och får

$$T_1 = \frac{2-1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Med $h = 0.5$ får vi däremot

$$T_{0.5} = \frac{1.5-1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1.5}\right) + \frac{2-1.5}{2}\left(\frac{1}{1.5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{24} \approx 0.7083.$$

Richardsonextrapolation för mittpunktsregeln eller trapetsregeln är vid intervallhalvering

$$I_R = I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{3},$$

så i vårt fall får vi

$$I_R = \frac{25}{36} \approx 0.6944.$$

Tenta 2000-01-13: Uppgift 1

Uppgift: Genomför bakåtanalys för beräkningen av uttrycket $y = (a+b)/c$ i ett IEEE-flyttalssystem. Ta även hänsyns till felen vid lagring av talen. Är algoritmen stabil? **(6p)**
Lösning: För att ta hänsyn även till lagringsfel får vi istället för bara

$$\tilde{z} = \mathrm{fl}\left(\frac{\mathrm{fl}(a+b)}{c}\right) = \frac{(a+b)(1+r_1)}{c}(1+r_2),$$

det lite mer ordentliga uttrycket

$$\tilde{z} = \frac{[a(1+r_1)+b(1+r_2)](1+r_3)}{c(1+r_4)}(1+r_5) = \frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{\tilde{c}}.$$

Så bakåtfelen blir

$$\tilde{a} = a(1+r_1)(1+r_3)(1+r_5) \Rightarrow \left|\frac{\tilde{a}-a}{a}\right| \le 3\mu,$$

$$\tilde{b} = b(1+r_2)(1+r_3)(1+r_5) \Rightarrow \left|\frac{\tilde{b}-b}{b}\right| \le 3\mu,$$

$$\tilde{c} = c(1+r_4) \Rightarrow \left|\frac{\tilde{c}-c}{c}\right| \le \mu.$$

Eftersom dessa bakåtfel inte är beroende av indata utan bara på maskinprecisionen blir slutsatsen att algoritmen är stabil.

Tenta 2000-01-13: Uppgift 7

Uppgift:

a) Bestäm den kvadratiska spline s som interpolerar $f(x) = \cos x$ i noderna 0, $\frac{\pi}{2}$ och π och som uppfyller villkoret $s'(0) = f'(0)$. **(4p)**

b) Beräkna integralen av s över intervallet $[0,\pi]$ *exakt* med en *numerisk* metod. **(2p)**

Lösning:
a) Vi skall alltså bestämma koefficienterna i följande två andragradspolynom:

$$\begin{cases} s_1(x) = a + bx + cx^2, & 0 \le x < \pi/2, \\ s_2(x) = d + ex + fx^2, & \pi/2 \le x < \pi. \end{cases}$$

Vi har följande villkor att uppfylla:

$$s_1(0) = f(0) = 1, \quad s_1'(0) = f'(0) = 0, \quad s_1(\pi/2) = s_2(\pi/2) = f(\pi/2) = 0,$$
$$s_1'(\pi/2) = s_2'(\pi/2), \quad s_2(\pi) = f(\pi) = -1,$$

och för enkelhetens skull börjar vi med $s_1(x)$. De tre villkoren på s_1 innebär att

$$\begin{aligned} s_1(0) = 1 &\Rightarrow a = 1 \\ s_1'(0) = 0 &\Rightarrow b = 0 \\ s_1(\pi/2) = 0 &\Rightarrow 1 + c\frac{\pi^2}{4} = 0 \Rightarrow c = -\frac{4}{\pi^2}, \end{aligned}$$

så $s_1(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2$. Villkoren för $s_2(x)$ innebär att

$$\begin{aligned} s_2(\pi/2) = 0 &\Rightarrow d + e\frac{\pi}{2} + f\frac{\pi^2}{4} = 0 \\ s_2'(\pi/2) = s_1'(\pi/2) = -\frac{4}{\pi} &\Rightarrow e + \pi f = -\frac{4}{\pi} \\ s_2(\pi) = -1 &\Rightarrow d + e\pi + f\pi^2 = -1 \end{aligned}$$

Löser man detta ekvationssystem får man $f = \frac{4}{\pi^2}$, $e = -\frac{8}{\pi}$ och $d = 3$. Svaret blir alltså

$$s(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2, & 0 \le x < \pi/2, \\ 3 - \frac{8}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}x^2, & \pi/2 \le x < \pi. \end{cases}$$

b) Om vi använder Simpsons formel på varje intervall, vet vi att vi får exakt rätt svar för alla andragradspolynom. Vi får att

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} s_1(x)\,dx = \frac{\frac{\pi}{2}}{6}[s_1(0) + 4s_1(\pi/4) + s_1(\pi/2)] = \frac{\pi}{12}\left[1 + 4\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{16}\right) + 0\right] = \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} s_2(x)\,dx = \frac{\frac{\pi}{2}}{6}[s_2(\pi/2) + 4s_2(3\pi/4) + s_2(\pi)] = \frac{\pi}{12}\left[0 + 4\left(3 - \frac{8}{\pi}\frac{3\pi}{4} + \frac{4}{\pi^2}\frac{9\pi^2}{16}\right) - 1\right] = -\frac{\pi}{3},$$

så $\int_0^\pi s(x)\,dx = 0$ (precis som $\int_0^\pi \cos x\,dx$).