Linjär algebra intro

Idé: Kombinera teori, beräkning, tillämpning.

1 Linjära ekvationssystem

$Ax=b$, $x \in R^n$, $b \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$

ofta stora, glesa (många nollor)

Enkel tillämpning: Kryptografi.

Svårare: Numerisk tillämpning av fysikens diff.ekv.

Matlab: x = A\b

Gauss-elemination

2. Överbestämda ekvationssystem

fler ekvationer än obekanta

$Ax=b$, $A \in R^{m \times n}$, $m>n$

Matlab: x = A\b

QR-faktorisering

Gramin-Schmidt ortogonalisering

Tillämpningar

Enkelt: Höjd över havet

Svårare: Spektroskopi

3. Egenvärden/egenvektorer

$Ax = \lambda x$, $x \in R^n$, $\lambda \in R$, $A \in R^{n \times n}$

Svängnings, vibrationsfenomen.

Teoretiskt: x egenvektor

λ egenvärde

Matlab: [X, D] = eig(A)

Tillämpningar:

Enkel: Bestäm max och min av funktionen

$4x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 12xy + 4yz = 0$

på sfären $x^2+y^2+z^2 = 3$

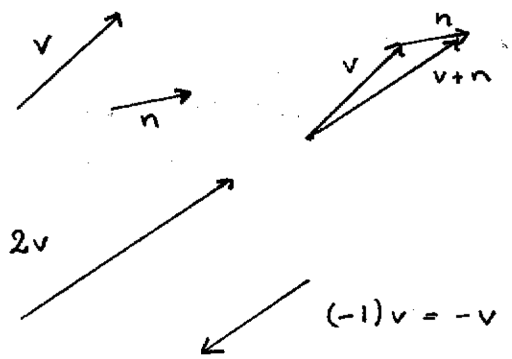
Svårare: Schrödingerekvationen

Linjära rum

Generalisering av det som kan göras med geom. vektorer.

Def. 1.1

Elementen (vektorerna) i ett linjärt rum V kan adderas och multipliceras med tal (skalärer)



Räkneregler

(1) $u \in V,\ v \in V \Rightarrow u+v \in V$

(2) $u \in V,\ \alpha \in R \Rightarrow \alpha u \in V$

(3) $u+v = v+u$ (kommutativ)

(4) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (associativ)

(5) $0 \in V$, nollelement så att $u+0 = 0+u = u$

(6) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, (associativ)

(7) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ (distributivt)

(8) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$ (-"-)

(9) $1u = u$

(10) $0u = \mathbb{0}$

Exempel på linjära rum

R^n, $R^{n\times n}$

$V = F(D)$ mängden av funktioner definierade på D.

$f, g \in V$; $f+g \in V$

$\alpha \in R \Rightarrow \alpha f \in V$

operationerna som vanligt

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\mathbb{0}$ är funktionen $\mathbb{0}(x) = 0$

Klurigare: $V = R^+$ med $u \oplus v = u \cdot v$

$\alpha \odot u = u^\alpha$

Anm: $(-1)u$ skrivs $-u$

det gäller att $u - u = \mathbb{0}$

ty $(u + (-1)u) = (1 + (-1))u = 0u = \mathbb{0}$

<u>Ekvationer:</u> w söks så att

$w + u = v$, u och v givna. Ekvationen har en entydig lösning $w = v - u$.

Def 1.2

Underrum

Ex. Ett plan i R^3 genom origo.

$M \subseteq V$ sådant att M är självt ett linjärt rum (med samma def av operationerna)

Sats 1.1.

M är ett underrum om

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ u, v \in M \Rightarrow u+v \in M \\ (2)\ u \in M,\ \alpha \in R \Rightarrow \alpha u \in M\end{array}\right\} \text{kan}$$

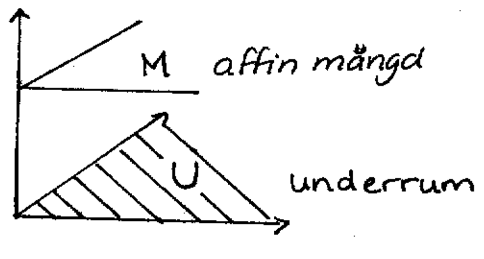
Samlas: $\alpha u + \beta v \in M$

Bevis: Räknereglerna gäller i M, kruxet: $0 \in M$

Anm: Endast plan genom origo är underrum, i allmänhet är plan s.k. affina mängder.

Def 1.3.

En delmängd M till V är affin om $\exists\, u_0 \in V$ och ett underrum U till V så att $M = u_0 + U = \{u_0 + u;\ u \in U\}$



Ex på underrum

$V = R^{n \times n}$

$M = \{A \in V;\ A^T = A\}$ symmetriska

$M = \{A \in V,\ A^T = -A\}$ skevsymmetriska

$V = F(I)$ mängden av funktioner på intervall I

$M = C^k(I)$, k ggr kont. deriverbar

$M = P_n(I)$, polynom av grad $\leq n$

Frågor:

1. Är mängden av triangulära matriser $A =$ 
   ett underrum? Ja

2. Är mängden av ortogonala matriser ett underrum,
   $AA^T = I$? Nej $0 \notin U$

3. Är mängden av polynom av grad $= n$ underrum till $F(I)$?
   Nej ty $p \equiv 0$ är ej av grad n, $(n \neq 0)$

1.3 Grundbegrepp linjär algebra.

Mycket viktiga begrepp.

linjärt beroende/linjärt oberoende

bas, dimension, koordinater

Ex Tre vektorer i R^3 är linjärt oberoende om de inte ligger i ett plan. En sådan uppsättning vektorer kan tas som bas för R^3.

Dimensionen på rummet är antalet element i en bas.

Varje bas innehåller lika många element.

Def 1.4.

En vektor $\lambda_1 u_1 + \dots \lambda_n u_n$, $\lambda_i \in R$ kallas en linjärkombination av $u_1, u_2 \dots u_n$

Mängden $U = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda u_i \right\}$ är ett underrum till V, kallas det linjära höljet av $u_1, u_2, \dots u_n$

Def 1.5

$u_1, u_2, \ldots, u_n \in U$

Spänner upp (genererar) U om varje $v \in U$ kan skrivas $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ för $\lambda_i \in R$.

Man skriver $U = \text{span}\{u_i\}_{i=1}^{n}$

Ex $e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{vmatrix}$ $e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{vmatrix}$, $\ldots$ $e_n = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

Spänner R^n, ty $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$ (godt) $= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$

x kallas koordinatvektorn. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinater.

Def 1.6 En mängd vektorer $u_1, \ldots, u_n$ är linjärt beroende om $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ utan att alla $\lambda_i = 0$.

Om $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow$ alla $\lambda_i = 0$ så är $\{u_1, \ldots, u_n\}$ linjärt oberoende.

Ex Vektorerna i föreg. exempel är linjärt oberoende ty $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda_i = 0$

Lemma 1.1 $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ linj. ber. omm något u_j kan skrivas som linjär kombination av de andra.

Bevis $\Rightarrow$, $\sum \lambda_i u_i = 0$ något $\lambda_j \neq 0$. Dividera med λ_j:

$$u_j = -\frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i u_i = -\sum_{i \neq j} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) u_i$$

$\Leftarrow)$ $u_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i u_i$ Då gäller

$$0 = -u_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \quad \text{där } \alpha_j = -1$$

<u>Lemma 1.2</u>

Låt $\{u_i\}_{i=1}^{m}$ vara linj. ober. i V.

Antag $v \notin \text{Span}\{u_i\}_{i=1}^{m}$. Då är $\{u_1, u_2, \dots, u_m, v\}$ linjärt oberoende

<u>Bevis</u> Undersök $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \beta v = 0$. Visa att $\alpha_i = 0$ och $\beta = 0$.

Om $\beta \neq 0$ så är $v = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \in \text{Span}\{u_i\}_{i=1}^{m}$

motsäger antagandet. Alltså $\beta = 0$.

Därmed $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = 0$, linjärt oberoende $\Rightarrow \alpha_i = 0$

VSV

<u>Två exempel</u>

(E1) $V = F(I)$, mängden av funktioner på ett intervall $I = [0,1]$

Visa att $U = \{v \in F(I);\ v(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ är ett linjärt underrum till V.

<u>Bevis</u> Tillämpa sats 1.1.

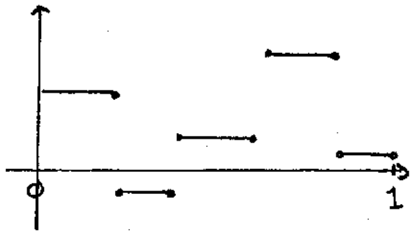
Låt u och $v \in U$ dvs $u(x) = ax + b$, $v(x) = cx + d$

Då gäller (1) $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = ax + b + cx + d$

$$= \underbrace{(a+c)}_{e} x + \underbrace{b+d}_{f} = ex + f \in U$$

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha u)(x) = \alpha u(x) = \alpha(xa + b) = \underbrace{\alpha a}_{g} x + \underbrace{\alpha b}_{h} = gx + h \in U$

(E2) Mängden av styckvis konstanta funktioner på en fix indelning av $[0,1]$ är ett linjärt underrum till V.



Def 1.7

En uppsättning vektorer $u_1, \dots, u_n \in V$ är bas i V om

1) linjärt oberoende
2) spänner rummet

Ex $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ med $e_i \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \leftarrow i$ i R^n

I (E1) är funktionerna 1 och x bas, $u_1 = 1$, $u_2 = x \in U$ ty $v \in U$ godt. kan skrivas

$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1 + \lambda_2 x$

de är även linjärt oberoende.

Fråga: Vad kan man ta för bas i underrumet i (E2)?

Def 1.8 V har dimensionen n om n är maximala antalet linjärt oberoende vektorer i V.

Om V har oändligt många linj. ober. vektorer så är rummet oändligt dimensionellt.

Ex R^n har dim n.

I (E1) är $\dim(U) = 2$ ty ta $u_3 \in U$ godt. då är $u_3 = ax+b$,
dvs $u_3 = a u_2 + b u_1$, u_3 kan skrivas som linj komb
av u_1 och u_2, dvs $\{u_1, u_2, u_3\}$ är linj beroende.

Sats 1.2

Antag $\dim(V) = n > 0$. Då är varje uppsättning av n st
linjärt ober. vektorer i V en bas.

Bevis Låt $u_1, \dots, u_n$ vara linj ober. Ta $v \in V$ godt.
Antag $v \notin \mathrm{Span}\{u_i\}_{i=1}^{n}$
Då är $\{u_1, \dots u_n, v\}$ linjärt oberoende enligt lemma 1.2.
dvs $n+1$ st linj. oberoende i V med $\dim = n$. Går inte!!!
Strider mot def av dim. Fel på antagandet,
dvs $v \in \mathrm{Span}\{u_i\}_{i=1}^{n}$ dvs $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ spänner rummet.
vsv

Ex I (E1) kan vi ta $u_1 = 1$, $u_2 = 1+x$ som bas, ty
2 st linj. oberoende.

Sats 1.3

Låt $V = \mathrm{Span}\{u_i\}_{i=1}^{n}$. Då är varje uppsättning med fler än
n vektorer linjärt beroende.

Sats 1.4

Låt $\dim(V) = n < \infty$. Då har alla baser n st ~~baser~~ (vektorer)

Ex Visa att vektorerna $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

är bas i $\mathbb{R}^3$.

Bestäm koordinaterna för $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ i denna bas.

Bevis

De är linjärt oberoende. Ingen av dem kan skrivas som linjärkombination av de två andra.

Koordinaterna bestäms ur ekv.syst.

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Ett reguljärt system (inverterbar, icke-singulär). Det $\neq 0$

Den entydiga lösningen är (med framåtsubstitution)

$$\begin{cases}\alpha_1 = 1\\\alpha_2 = 1\\\alpha_3 = 0\end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Linj oberoende enligt definition:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\\alpha_2 = 0\\\alpha_3 = 0\end{cases}$$

Sats 1.5 En mängd vektorer som genererar V kan tunnas ut till en bas

Sats 1.6 En uppsättning linj. ober. vektorer kan "byggas ut" till en bas.

Svar på frågor

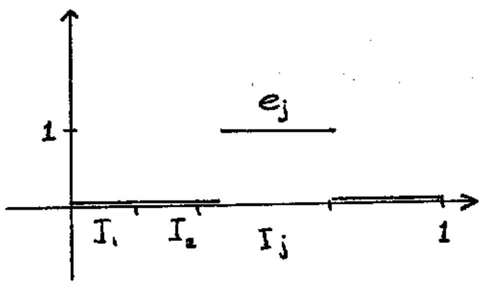
(E2) $V = F([0,1])$

Svar: $u \in U,\ v \in U \Rightarrow u + v \in U$

$u \in U$ och $\lambda \in R \Rightarrow \lambda u \in U$

$\therefore$ underrum.

Exempel på bas:



dimensionen = antal delintervall.

Sats 1.7 U underrum till $V \Rightarrow \dim(U) \le \dim(V)$

$\dim(U) = \dim(V) \Rightarrow U = V$

Kap 1.4 i Holmåker

Linjära ekvationssystem

$Ax = b\ ,\quad A \in R^{m \times n}$

Sats 1.8

Låt x_p vara en lösning till $Ax=b$. Då är den allmänna lösningen $x = x_p + x_h$ där x_h är allmänna lösningen till det homogena $Ax = 0$. x_p kallas partikulärlösning. x_h kallas homogenlösning.

Bevis

Anta x lösn. till $Ax=b$. För $x_h = x - x_p$, x_p partikulär-lösning.

$Ax_h = A(x-x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0$

dvs x_h är homogenlösning.

Omvänt: Om $Ax_p = b$ och $Ax_h = 0$ så gäller för $x = x_p + x_h$ att

$Ax = A(x_p + x_h) = b = Ax_p + Ax_h = b + 0 = b$

dvs x lösning ■

VIKTIGA UNDERRUM

Def 1.9

Nollrummet till $A \in R^{m \times n}$

$N(A) = \{x \in R^n : Ax = 0\}$

Värderummet till $A \in R^{m \times n}$

$V(A) = \{y \in R^m ; Ax = y$ för något $x \in R^n\} = \{Ax, x \in R^n\}$

Sats 1.9

$N(A)$ och $V(A)$ är underrum till resp R^n och R^m

Anm.

Lösningsmängden till $Ax = b$ är en affin mängd: $x_p + N(A)$.

Anm.

Två sätt att se på produkten $A \cdot x = b$ (matris ⊙ vektor produkten)

1 $b_i = \sum_j a_{ij} x_j$

2 $b = A \cdot x = \sum_j x_j A_j$ där A_j är kolonn nr j i A

$A = [A_1 A_2 \ldots A_n]$

b är en linjärkombination av A:s kolonner

En 2 är alltså $V(A) = Span\{A_j\}_{j=1}^{n}$

$V(A)$ kallas för A:s <u>kolonnrum</u>.

$\dim V(A)$ kallas <u>kolonnrangen</u> för A.

Pss är <u>radrummet</u> det rum som spänns av matrisens rader. Dess dimension kallas <u>radrangen</u>.

Vi kommer senare att visa att

radrang = kolonnrang ≡ rang

I MATLAB:

nollrum = null(A) ger bas för $N(A)$

värderum = orth(A) ger bas för $V(A)$

<u>Vi vet: Gausselemination</u> bygger på elementära radoperationer. Fungerar ty radrummet är oförändrat vid elementära radoperationer. Motsvarande elementära kolonnekvationer.

(i) byta plats på kolonn

(ii) multiplicera kolonn med tal $\neq 0$

(iii) addera en multippel av kolonn till annan kolonn.

Sats 1.10

$V(A)$ är oförändrat vid elementära kolonnoperationer.

<u>Typexempel</u>

Övning 31 c, 33 c

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Nollrummet

Vi löser homogena systemet $Ax=0$ med G-elim.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

parameterlösning

$x_4 = s$

$x_3 = t$

$x_2 = (5s+t)/(-3) = -\frac{5}{3}s - \frac{1}{3}t$

$x_1 = (-4s - t + \frac{10}{3}s + \frac{2}{3}t)/1 = -\frac{2}{3}s - \frac{1}{3}t$

två parametrar: $\dim N(A) = 2$

Bas kan vi få genom att sätta först $s=0$ och sedan $t=0$

$s=0,\ t=-3 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t = 0,\ s = 3 \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bas för $N(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Värderummet

$V(A)$: kolonnoperationer på A

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Vi ser att $\dim V(A) = 2$. Två linjärt oberoende kolonner.

En bas är $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Men vi kan ta ursprungskolonnerna, lika gärna (sats 1.10) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

SATS 1.11 Dimensionssatsen

$\dim N(A) + \dim V(A) = n, \quad A \in R^{m \times n}$

Bevis för $\dim N(A) = p, \quad 0 \le p \le n$

Visa $\dim V(A) = n - p$

Idé: skaffa bas med n-p element.

Låt $\{e_j\}_{j=1}^{p}$ bas för $N(A)$

sats 1.6 $\Rightarrow$ byggs ut till $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ bas för R^n.

Godtyckligt $x \in R^n$ kan skrivas

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \quad \text{med}$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A e_j = \{Ae_j = 0, j = 1, \dots p\}$$

ty $\{e_j\}$ bas för $N(A)$

$$= \sum_{j=p+1}^{n} \lambda_j A e_j$$

dvs $V(A) = \text{Span}\{Ae_j\}_{j=p+1}^{n}$

Vidare är $\{Ae_j\}_{j=p+1}^{n}$ linjärt oberoende ty:

Anta $\sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j A e_j = 0$ Vi ska visa $\alpha_j = 0$, $j = p+1, \dots n$

$$\sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j A e_j = A \underbrace{\sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j e_j}_{y} = 0$$

dvs $y = \sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j e_j \in N(A)$

dvs $y = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j$ ty $\{e_j\}_{j=1}^{p}$ bas för $N(A)$

$$0 = y - y = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j - \sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j e_j$$

$\{e_j\}_{j=1}^{n}$ bas $\Rightarrow \alpha_j = 0$

Speciellt $\alpha_j = 0$ $j = p+1, \dots, n$ $\Rightarrow \{Ae_j\}_{j=p+1}^{n}$ linj ober.

Både spännande och oberoende. $\Rightarrow$ bas.

Antalet element i basen = $n-p = \dim V(A)$

$\underset{p}{\dim N(A)} + \underset{n-p}{\dim V(A)} = n$ V s v

<u>Sats 1.12</u> rangsatsen

kolonnrang = radrang

<u>Bevis</u>: trappstegsform

dimensionsatsen

rangsatsen oförändrad vid elementära radoperationer

Sats 1.13 $A \in R^{n \times n}$

$\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

A kallas då reguljär, ickesingulär, inverterbar.

<u>Bevis</u>: Linjär algebra och geom.

Övn 34c

Bestäm $\dim N(A)$ och $\dim V(A)$ då

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

G elemin. på homogena syst. $Ax = 0$ ger $N(A)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Bakåtsubstitution: $x_3 = s$, $x_2 = \frac{2s}{4} = \frac{1}{2}s$, $x_1 = -s - \frac{s}{2} = -\frac{3}{2}s$

En parameterlösning, dvs $\dim N(A) = 1$

Dimensionssatsen $\dim V(A) = n - 1 = 3 - 1 = 2$ □

MATLAB:

$$\mathrm{null}(A) = \begin{vmatrix} 0,8018 \\ -0,2673 \\ -0,5345 \end{vmatrix} \qquad \text{dim } 1$$

bas för $N(A)$. Normerad!

$$\mathrm{orth}(A) = \begin{vmatrix} 0,1202 & -0,9025 \\ 0,5933 & 0,0311 \\ -0,3529 & -0,8361 \\ 0,7135 & -0,3714 \end{vmatrix} \qquad \dim V(A) = 2$$

bas för $V(A)$ normerad.

Sammanfattning av teorin för. linj. ekv. syst.

Sats 1.14 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad \mathrm{rang}(A) = r$

a) $Ax = b$ lösbart $\Leftrightarrow b \in V(A)$

$Ax = b$ lösbart $\forall b \Leftrightarrow V(A) = \mathbb{R}^m$

b) Om $Ax = b$ är lösbart så är lösningen $(n-r)$-parametrig.

Lösningen är entydig omm $r = n$

Bevis

a) $\mathrm{rang}(A) = \dim V(A)$

$V(A) = \mathrm{Span}\{A_j\}_{j=1}^{n}$ (kolonnerna)

och $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j$, $\quad A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{bmatrix}$.

b) Almänna lösningen: $x_p + N(A)$

$\dim N(A) = n - r$ (dimensionssatsen)

dvs homogenlösningen har $n - r$ parametrar.

dvs den allmänna lösningen har $n - r$ parametrar.

Ex Bonusuppgift 2

Blanda betong.

Sats 1.15

$A \in R^{n \times n}$

Följande är ekvivalenta påståenden

(i) $Ax = 0$ har endast lösning $x = 0$

(ii) $Ax = b$ lösbart $\forall\, b \in R^n$

(iii) $Ax = b$ entydigt lösbart $\forall\, b \in R^n$

(iv) $\text{rang}(A) = n$

(v) kolonnerna i A är linjärt oberoende.

(vi) A är inverterbar (reguljär)

(vii) $\det(A) \neq 0$

Bevis:

Sats 1.14 med specialfallet $m = n = r$

(iv) $\Leftrightarrow$ (i) enl. sats 1.14 b)

(iv) $\Leftrightarrow$ (ii) enl. Sats 1.14 a)

(iv) $\Leftrightarrow$ (iii) enl. Sats 1.14 a) och b)

(v) $\Leftrightarrow$ (iv) enl. def. på rang

(vi) $\Leftrightarrow$ (vii) enl. "linj. algebra och geometri"

(vii) $\Leftrightarrow$ (iv) Sats 1.13 ∎

1.5 Koordinater och basbyte (klurigt)

Låt $\{e_i\}$ vara bas i V, linjärt rum $\underbrace{}_{\text{dim } n}$. Då kan godt. $u \in V$ skrivas $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ med $x_i \in R$. Låt

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_2 \end{vmatrix} \in R^n \quad = \text{koordinatvektorn för } u \text{ i basen } \{e_i\}_{i=1}^{n}$$

Det finns alltså en entydig motsvarighet i $u \in V \longleftrightarrow x \in R^n$ (givet en bas).

Operationerna har följande motsvarighet:

$u \oplus v \longleftrightarrow x + y \quad , \quad v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

$\alpha \odot u \longleftrightarrow \alpha x$

__Ex.__ $V = Span\{\sin t, \cos t\}$

$u = \sin t - \cos t \longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v = 2\sin t + 3\cos t \longleftrightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$u \oplus v = 3\sin t + 2\cos t \longleftrightarrow x + y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$2 \odot u = 2\sin t - 2\cos t \longleftrightarrow 2x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

En annan bas $\Rightarrow$ en annan koordinatvektor

__Basbyte:__

Två baser $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ och $\{e_i'\}_{i=1}^{n}$

Ett $n \in V$ kan uttryckas med olika koordinater i de två baserna.

$$n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$$

Vi använder följande beteckningar

$$x = \begin{bmatrix} | \\ u \\ | \end{bmatrix}_e \quad \text{u's koordinater i basen } e$$

$$x' = \begin{bmatrix} | \\ u \\ | \end{bmatrix}_{e'} \quad \text{u's koordinater i basen } e'.$$

Anta att det finns en tredje bas, någon standardbas $\{f_i\}_{i=1}^n$.

Koordinaterna för baselementen i standardbasen:

$$\begin{bmatrix} | \\ e_i \\ | \end{bmatrix}_f \quad \text{resp} \quad \begin{bmatrix} | \\ e_i' \\ | \end{bmatrix}_f$$

Vi får alltså relationerna:

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longleftrightarrow \sum x_i \begin{bmatrix} | \\ e_i \\ | \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_n \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}_f X$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x' \begin{bmatrix} e_i' \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1' & e_2' & \cdots & e_n' \\ | & | & & | \end{bmatrix}_f X'$$

Detta kan skrivas

$$\begin{bmatrix} | \\ u \\ | \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}_f X = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1' & e_2' & \cdots & e_n' \\ | & | & & | \end{bmatrix}_f X'.$$

och om vi "löser ut" x:

$$x = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}_f^{-1} \begin{bmatrix} e_1' & e_2' & \cdots & e_n' \end{bmatrix}_f}_{T} x'$$

Inför transformations- matris $T = \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}_f^{-1} \begin{bmatrix} e' \end{bmatrix}_f$

Då gäller $\underline{x = Tx'}$ resp $\underline{x' = T^{-1}x}$

<u>koordinattransformationsformler</u> vid basbyte!

Speciellt om e skulle vara standardbasen:

$$T = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1' & e_2' & \cdots & e_n' \\ | & | & & | \end{bmatrix}_e$$

eller om e' är standardbasen

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_n \\ | & & | \end{bmatrix}_{e'}$$

<u>Ex</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är bas i R^2

$\{e'\}_{i=1}^{2}$

Standardbas i R^2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\{f_i\}_{i=1}^{2}$

Låt $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$ i standardbasen

Vi har alltså $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_1$

$e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_1 + f_2$

Transformationsmatrisen $(e = f)$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

koordinattransformationen

$$x' = T^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

dvs $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

Speciellt $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \overset{x_1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \overset{x_2}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ i standard

$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \underset{x_1'}{1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underset{x_2'}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ i $\{e'\}$

Tillämpning Laboration nr 3

Linjär optimering:

praktisk användning av $N(A)$

$\min c^T x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

då $\begin{cases} Ax = b & \leftarrow \text{bivillkor, olika begränsningar} \\ x \geq 0 & \leftarrow \text{positivitetsvillkor} \end{cases}$

Ex minimera kostnaden för att tillverka

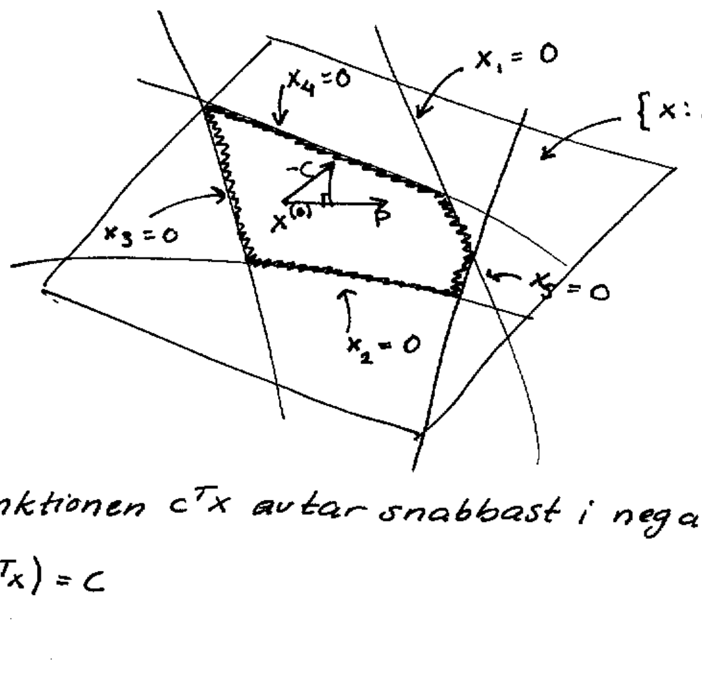
prylarna $x_1, x_2, \dots, x_n$. $Ax = b$ resursbegränsningarna.

Tillåten mängd: $\{x \in R^n, Ax = b, x \geq 0\}$

$\{x ; Ax = b\}$ en affin mängd/multiplan

positivitetskrav $x_i \geq 0$

tillåten mängd



funktionen $c^T x$ avtar snabbast i negativa gradientens riktning

$\nabla(c^T x) = c$

<u>Idé</u> sök i projicerad negativ gradientriktning: p

Iterativ metod: $x^{(1)} = x^{(0)} + p$

Viktig observation:

<u>Om $x^{(0)}$ tillåten och $p \in N(A)$ så är $x^{(1)}$ också tillåten.</u>

Vi ska alltså projicera på $N(A)$!! $\uparrow$ Visa i labben

<u>Utblick</u>:

$$\begin{cases} \Delta u = f & i\ \Omega \\ u = 0 & på\ \partial\Omega \end{cases}$$

$u \in C^2(\Omega)$, $u \in C(\partial\Omega)$

$V = \{u \in F(\bar{\Omega}) : u \in C^2(\Omega), u \in C(\bar{\Omega}), u = 0 \text{ på } \partial\Omega\}$

Visa att V är ett underrum.

Fråga: Hur blir det om

$$\left.\begin{cases} \Delta u = f & i\ \Omega \\ u = g & på\ \partial\Omega, \quad g \neq 0 \end{cases}\right\} \text{affin mängd}$$

Numerisk lösning av linjära ekvationssystem

$Ax = b$, $A \in R^{n \times n}$

Heath kap 2.

Standardalgoritmen är Gausselemination. Bäst om inte matrisen är på speciell form. För speciella matriser t.ex stora, glesa matriser används andra metoder, t.ex. iterativa metoder, Heath kap 11.

För att G-elimination ska vara stabil i allmänhet så måste man pivotera, dvs man byter rader vid eliminationen så att man i varje steg får så stort pivot-element som möjligt (stort till beloppet).

Exempel på effekten av pivotering

Ekvationssystem: $\begin{cases} -0{,}001x + y = 1 \\ \quad\quad\quad\; x + y = 2 \end{cases}$

Exakta lösn: $x = \frac{1000}{1001}$, $y = \frac{1002}{1001}$

G-elemination med 3 siffror

$$\begin{cases} -0{,}001x + y = 1 \\ \quad\quad 1000y = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Pivotering: Radbyte så att vi får så stort pivotelement som möjligt.

$$\begin{cases} \quad\quad x + y = 2 \\ -0{,}001 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 1{,}00y = 1{,}00 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Bra lösning m.a.p 3 siffror. ∎

Intro-exempel

G-elimination med pivotering

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix}$$

Pivotering: Byt rad 1 och rad 6.

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{PA} \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)}_{\tilde{A}} \Rightarrow$$

Inför steg 2 görs inget radbyte eftersom 1 är största pivotelementet och sitter redan rätt.

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}}_{\tilde{\tilde{A}} = U} \left| \begin{array}{c} 6 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.\right)$$

G.-elimination klar. Det högertriangulära systemet löses med bakåtsubstitution.

$x_3 = 1$

$x_2 = (0 - \frac{1}{2} \cdot 1)/1 = -\frac{1}{2}$

$x_1 = (6 - 2(-\frac{1}{2}) - 1 \cdot 1)/4 = \frac{3}{2}$

Utan pivotering fungerar inte G-elimination.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Vi kan inte fortsätta utan pivotering.

Med pivotering får vi multiplikatorer till belopp ≤ 1 och detta begränsar tillväxten av avrundningsfel.

<u>LU-faktorisering</u>

ges av G-elimination.

$PA = LU$

P - permutationsmatris som beskriver radbytena.

I exemplet är $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

U - uppåt triangulär matris som är resultatet av G-eliminationen.

L - nedåt triangulär matris med $\mathrm{diag}(L) = I$ och multiplikatorerna i nedre triangeln.

I exemplet är alltså $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Förklaring av att multiplikatorerna hamnar i nedre triangeln av L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{A} = PA$$

rad 2 i PA = rad 2 i $\tilde{A} + \frac{1}{2}$ rad 1 i $\tilde{A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{L} \underset{\substack{\Vert \\ U}}{\tilde{\tilde{A}}} = PA$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Läsning av $Ax = b$, $A \in R^{n \times n}$ med LU-faktorisering kan beskrivas i 3 steg.

① $PA = LU$

<u>Anm</u> $AX = b$, $PAx = Pb$

$$L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$$

$$\left.\begin{array}{ll} ② & Ly = Pb \\ ③ & Ux = y \end{array}\right\}$$ triangulära system, enkla att lösa med framåt, respektive bakåtsubstitution.

<u>Räknearbete</u>:

Antal operationer, additioner

multipl.

⋮

Steg 1, faktoriseringen : $\sim \frac{2}{3} n^3$ operationer

Steg 2, 3, triangulära system: $\sim n^2$ operationer vardera.

<u>Vitsen</u>: Om man har många ekvationssystem med samma matris men olika högerled, så gör man det tunga arbetet, steg 1, bara <u>en</u> gång.

I MATLAB får man faktorerna genom funktionen lu.

$[L, U, P] = lu(A)$.

I Heath beskrivs G-elimination som elementära transformationer:

$$M_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \times & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}, \quad M_2 M_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \times & & \vdots \\ \vdots & 0 & \times & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

Dethär förstår vi bättre sen när vi studerat linjära avbildningar.

$AX = I \quad , \quad X = A^{-1}$

dvs lösningen av ekv. syst. med flera högerled.

Gauss-Jordans metod, elimination till diagonalmatris.

$$\square \sim \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

kräver mer beräkningar än G-elimination på en traditionell dator.

<u>Speciella matriser</u>

1. positivt definita matriser: $A = A^T$

   $x^T A x > 0$ för alla x.

   ingen pivotering behöver göras.

   finns en symmetrisk faktorisering $A = LL^T$

   kallas cholesky-faktorisering

   chol(A) i MATLAB.

2. diagonaldominanta matriser

   $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, radvis diagonaldom.

   p ss kolonnvis, pivotering behövs inte.

Vektor- och matrisnormer

$x \in R^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$, vanlig längd
2-normen

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, summanorm, 1-norm.

$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$, maxnormen

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|x\|_1 = 1+2+0+1 = 4$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1+4+0+1} = \sqrt{6}$$

$$\|x\|_\infty = 2$$

Matrisnorm

$\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, kopplad till vektornormen.

det gäller att

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, maximala kolonnsumman.

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, maximala rad-summan.

$\|A\|_2 = (\lambda_{max}(A^TA))^{1/2}$, λ_{max} största egenvärde till A^TA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_1 = 8$

$\|A\|_\infty = 7$

$\|A\|_2 = 6{,}007\ldots$ (m. hjälpmedel).

Matrisnorm

Def $\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Från def. följer:

$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$

Användning av matrisnorm.

Lösningsnogrannhet.

I stället för ekv. systemet $Ax = b$ löser vi ett "stört" problem

$\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$

Anta störningen endast i högerledet b. dvs matrisen

exakt: $\hat{A} = A$. Vi vill analysera felet $\delta x = \hat{x} - x$. Felet i

högerledet: $\delta b = \hat{b} - b$

Då gäller $\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ A(x + \delta x) = b + \delta b \end{array}\right\} \Rightarrow A\delta x = \delta b \Leftrightarrow \delta x = A^{-1}\delta b$

eller $\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|$

Vi har även $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$

eller $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$

Vi får $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta b\| \cdot \|A\|}{\|b\|} = \underbrace{\|A^{-1}\| \|A\|}_{\text{konditionstal}} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

$\mathcal{K}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ konditionstal.

Stort $\mathcal{K}(A)$ innebär illa-konditionerat, störnings-känsligt problem.

Ex Gungfly.

$$\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2001 \\ 2001 \end{pmatrix}$$

lösning $x_1 = x_2 = 1$

G-elimination med 3 siffror

Radreducering: $\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 0 & \underset{(*)}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2001 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(*) \quad 1001 - \frac{1000}{1001}\cdot 1000 = 1001 - 0{,}999\cdot 1000 = 1001 - 999 = 2$$

lösning $\hat{x}_1 = 0{,}5$

$\hat{x}_2 = 1.5$

Men $\begin{cases} \hat{x}_1 = 1{,}5 \\ \hat{x}_2 = 0{,}5 \end{cases}$ är lösning till det störda problemet:

$$\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2001{,}5 \\ 2000{,}5 \end{pmatrix}$$

G-elimination har löst nästan rätt problem. G-elim. är en stabil algoritm.

Det är problemet som är instabilt. Stort $\mathcal{K}$.

$\|A\|_\infty = 2001$

$$A^{-1} = \frac{1}{2001}\begin{pmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{pmatrix}$$

$\|A^{-1}\|_\infty = 1$

$\mathcal{K}(A) = 2001$

Skalärprodukt

kap 2 i Holmåker

Ex. $x \in R^n$, $y \in R^n$, $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

skalärprodukt i R^n.

Behövs för begrepp som : vinkel, längd, ortogonalitet

speciellt : triangelolikhet

Pythagoras sats

Skalärprodukt: reella vektorrum

Def En skalärprodukt i V är en funktion

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to R$$

sådan att $u \in V$, $v \in V$ och $\alpha \in R$ så gäller

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ } symmetrisk

$$\left.\begin{array}{l} \text{(ii) } \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \\ \text{(iii) } \langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle \end{array}\right\} \text{linjär}$$

(iv) $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ } positiv

Det är lätt att se att detta gäller för

$\langle x, y \rangle = x^T y$ i R^n.

(övning)

Ex 1 Om A är symmetrisk och positivt definit

så är $\langle x, y \rangle = x^T A y$ en skalärprodukt i R^n.

(i) $\langle y, x \rangle = y^T A x = (A^T y)^T x = (A y)^T x = x^T (A y) = \langle x, y \rangle$

symmetri $A = A^T$

symmetri hos skalärprodukt

(ii) $<\alpha x, y> = (\alpha x)^T A y = \alpha x^T A y = \alpha <x, y>$

(iii) $<x+z, y> = (x+z)^T A y = x^T A y + z^T A y = <x,y> + <z,y>$

(iv) $<x,x> = x^T A x \geq 0, \quad x^T A x > 0$ omm $x \neq 0$

enligt def för pos. definit matris.

<u>Ex 2</u> I rummet $C[a,b]$

kontinuerliga funktioner på $[a,b]$

$<f,g> = \int_a^b f(x) g(x) dx$, en skalärprodukt

(iv) $\int_a^b f^2 dx \geq 0 \quad = 0$ omm $f \equiv 0$ ty f kontinuerlig (OBS!!)

<u>Anm</u> generalisering av räkneregler för skalärprodukt

$<x, \beta y> = <\beta y, x> = \beta <y,x> = \beta <x,y>$

$$<\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j> = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i <x_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j> =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j <x_i, y_j> = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j <x_i, y_j>$$

<u>Def 2.2</u> Normen av $u \in V$ def av

$\|u\| = \sqrt{<u,v>}$

Med avståndet mellan vektorerna u och v menas $\|u-v\|$. Det kan finnas normer som inte hänger ihop med skalärprodukt.

Ex $V = R^n$, $x \in R^n$: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$

hänger ihop med standardskalärprodukten
$<x, y> = x^T y$.

Men $\|x\|_1$ och $\|x\|_2$ hänger inte ihop med skalärprodukt.
Allmänt för en norm gäller att den är en funktion
$\|\cdot\| : V \to R$. sådan att

(i) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0$ om.m $u = 0$

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ triangelolikhet.

Sats 2.1 Cauchy-Schwarz' olikhet

$|<u, v>| \leq \|u\| \|v\|$

med likhet omm u och v är linjärt beroende

Bevis: om $u = 0$ så gäller med likhet
Anta $u \neq 0$. Inför hjälpfunktionen $q : R \to R$
$q(t) = \|tu + v\|^2$
Egenskap 1: $q(t) \geq 0$, $\forall t$ (norm)
$q(t) = <tu + v, tu + v> \underset{linj}{=} t^2 <u, u> + 2t <u, v> + <v, v> =$
$= at^2 + 2bt + c$, $q(t)$ av grad 2.
$a = <u, u>$, $b = <u, v>$, $c = <v, v>$
$a = \|u\|^2 > 0$

Egenskap 2: q har min i $-\frac{b}{a}$ med $q(-\frac{b}{a}) = c - \frac{b^2}{a} \geq 0$

$c - \frac{b^2}{a} \geq 0 \Leftrightarrow ac \geq b^2$ eller $|b| \leq \sqrt{a}\sqrt{c}$

vilket är olikheten.

likhet om $c - \frac{b^2}{a} = 0$ dvs då $\| -\frac{b}{a}u + v\|^2 = 0$

likhet om $q(-\frac{b}{a}) = c - \frac{b^2}{a} = 0$

dvs då $\| -\frac{b}{a}u + v\|_2^2 = 0$ omm $v = +\frac{b}{a}u$ dvs linjärt beroende.

$\blacksquare$

<u>Def</u> 2.3 Om $u, v \neq 0$ så är vinkeln θ mellan u och v.

def genom

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

Anm Från C-S olikhet $-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1$

<u>Sats 2.2. Triangelolikheten</u>

$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

med likhet $\Leftrightarrow$ $u = 0$ eller $v = \lambda u$ med $\lambda \geq 0$

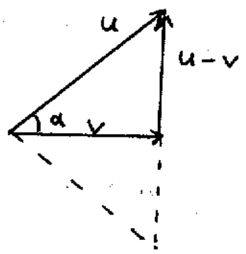
(u och v i linjärt rum med skalärprodukt).

<u>Övning</u>: Låt $u, v \neq 0$.

$\|u\| = \frac{2}{\sqrt{3}}\|v\| = 2\|u - v\|$ (x)

Bestäm vinkeln mellan u och v.

Förväntan:



dvs $\alpha = \pi/6$

Lösning:

$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$

dvs $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\|u-v\|^2$

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{1}{2}\frac{\|u\|}{\|v\|} + \frac{1}{2}\frac{\|v\|}{\|u\|} - \frac{1}{2}\frac{\|u-v\|^2}{\|u\|\|v\|}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{dvs } \alpha = \pi/6 \quad \blacksquare$$

<u>Övning</u>:

Vad är vinkeln mellan $f = x$ och $g = x^2$ i det linjära rummet $C([0,1])$ med skalärprodukt $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

Fråga: Vad händer med vinkeln mellan $f = x^n$ och $g = x^{n+1}$ då $n \to \infty$.

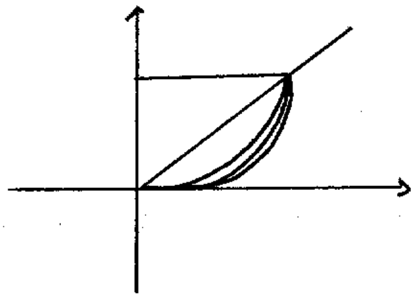
<u>Lösning</u>: $\cos\theta = \frac{\langle f, g\rangle}{\|f\|\,\|g\|}$ $\quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 x\,x^2\,dx = \frac{1}{4}$

$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 x\,x\,dx} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\|g\| = \sqrt{\int_0^1 x^2 x^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$\cos\theta = \frac{1/4}{\sqrt{1/3}\sqrt{1/3}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ $\quad \theta = \arccos\frac{\sqrt{15}}{4} = 0{,}2527$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{2n+2} \to 1, \quad n \to \infty$

de blir nästan linjärt beroende. Går mot likhet i C-S.

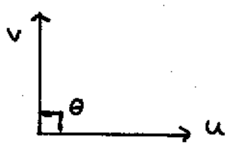


Slutsats: I rummet $P_n([0,1])$ är $\{x^j\}_{j=0}^{n}$ ingen bra bas.

$2 + 3x + 5x^2 - 3x^3 - x^4$

Men det finns en ON-bas där elementen är ortogonala.

<u>Def 2.4</u> u och v är ortogonala om skalärprodukten är noll, vinkeln mellan dem är då $\theta = \frac{\pi}{2}$



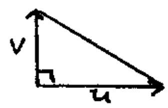
u är normerad om $\|u\| = 1$.

En mängd vektorer som är normerade och parvis ortogonala kallas ON-mängd

Speciellt om mängden är en bas för rummet så har vi en ON-bas.

<u>Sats 2.4. Pythagoras sats</u>

u och v ortogonala så $\| u^2 + v^2 \| = \|u\|^2 + \|v\|^2$



$\{u_i\}_{i=1}^{n}$ ON-mängd

$\|u_1 + u_2 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2$

<u>Bevis</u> Följer direkt av linjäritet hos skalärprodukten + ortogonalitet.

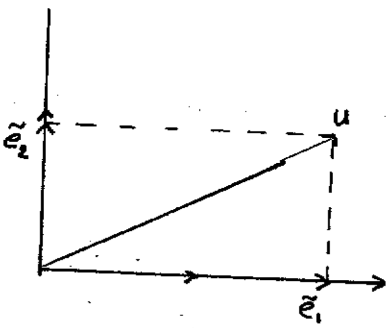
Lemma 2.1

En ON-mängd är linjärt oberoende.

Bevis Def på linjärt oberoende.

Följd: Om $\{e_i\}_{i=1}^n$ är ON-bas så kan godt. u i rummet skrivas

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \ldots + \langle u, e_n \rangle e_n$$



$$u = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2$$

$$\tilde{e}_1 = \underbrace{\langle u, e_1 \rangle}_{\text{skalären}} e_1$$

Sats 2.3

V ändligt dimensionellt rum. Det finns ON-bas.

Bevis Konstruktivt

Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. (G-S)

Viktigt.

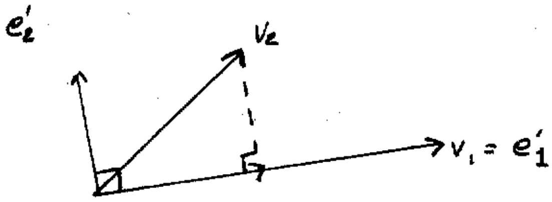
1. bas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ om $\dim(V) = n$ (Sats 1,2)
2. Sätt $e_1' = v_1$

$e_2' = \alpha_{21} e_1' + v_2$ och bestämmer α_{21} så att $\langle e_1', e_2' \rangle = 0$:

$$\langle e_1', e_2' \rangle = \alpha_{21} \langle e_1', e_1' \rangle + \langle e_1', v_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{\langle v_2, e_1' \rangle}{\langle e_1', e_1' \rangle} = -\frac{\langle v_2, e_1' \rangle}{\|e_1'\|^2}$$

Illustration



projektionen av v_2 på e_1'

$$= \frac{\langle v_2, e_1' \rangle}{\| e_1' \|^2} e_1'$$

fortsätt : $e_3' = \alpha_{31} e_1' + \alpha_{32} e_2' + v_3$

ansats: $\langle e_1', e_3' \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_{31} = -\frac{\langle v_3, e_1' \rangle}{\| e_1' \|^2}$

$\langle e_2', e_3' \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_{32} = -\frac{\langle v_3, e_2' \rangle}{\| e_2' \|^2}$

etc

(3) Normera $e_i = \frac{e_i'}{\| e_i' \|}$

$\blacksquare$

Ex R^3. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dessa är linjärt oberoende, bas.

Gram-Schmidt : $e_1' = v_1$

$$e_2' = -\frac{\langle v_2, e_1' \rangle}{\| e_1' \|^2} e_1' + v_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$e_3' = -\frac{\langle v_3, e_1' \rangle}{\| e_1' \|^2} e_1' - \frac{\langle v_3, e_2' \rangle}{\| e_2' \|^2} e_2' + v_3 =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{3/2}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normera: $e_1 = e_1' / \| e_1' \| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e_2 = e_2' / \| e_2' \| = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = e_3' / \| e_3' \| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Def 2.5</u>

Ortogonala komplementet till ett underrum U till V:

$U^{\perp} = \{ v \in V$ sådan att $\langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U \}$

<u>Sats</u> 2.5

$U^{\perp}$ är ett underrum

"Bevis" $v_1, v_2 \in U^{\perp} \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in U^{\perp}$

<u>Lemma 2.5</u>

En uppdelning

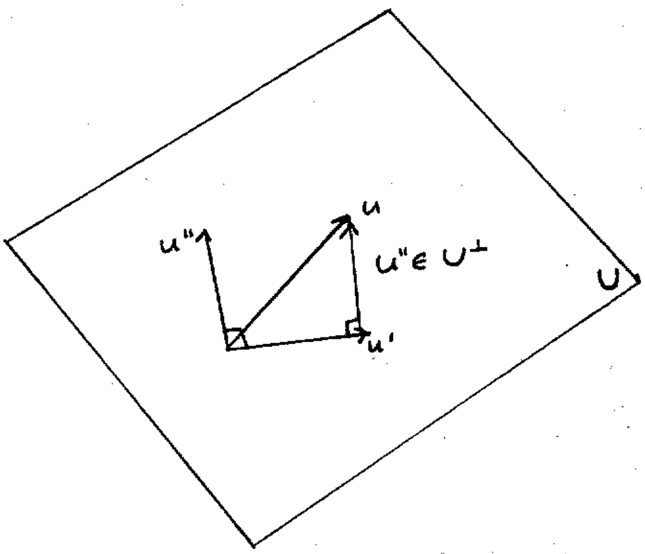
$u = u' + u''$ med $u' \in U$, $u'' \in U^{\perp}$

är entydig. (och finns)

<u>Bevis</u> Idé: Anta två uppdelningar och visa att de är samma.

u' kallas ortogonalprojektionen av u på U.

u'' — " — av u på $U^{\perp}$.



<u>Sats</u> 2.6

Ortogonalprojektionen är "bästa" approximation i underrummet.

Följande är ekvivalent, $u \in V$, $u' \in U$

(i) $u - u' \in U^{\perp}$

(ii) $\|u-u'\| \leq \|u-w\| \quad \forall\, w \in U$

<u>Sats 2.7</u> Ortogonalprojektionen existerar om U är ändligt dimensionellt.

V behöver <u>inte</u> vara ändligt dimensionellt (!).

<u>Tillämpning</u>: Galerkins metod i "partiella differentialekvationer".

<u>Sats 2.8</u> Om $\dim(V)=n$ så är

$\dim(U)+\dim(U^{\perp})=n$

Man brukar skriva $U \oplus U^{\perp} = V$

$$u' + u'' = u$$

Om $\{e_i\}_{i=1}^{k}$ är ON-bas för U så ges u' av formel:

$(*) u' = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \ldots + \langle u, e_k \rangle e_k$

jämför G-S.

Pythagoras sats på $(*)$

$$\|u'\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle^2$$

och vi får <u>Bessels olikhet</u>

$\|u\| \geq \|u'\|$

$$\sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle^2 \leq \|u\|^2$$

Tillämpningar på ortogonalprojektion:

- Optimering, laboration 3.
- Minsta kvadratproblem
- Galerkin i part. diffekv.
- Fourieranalys

<u>Ekvationssystem - minsta-kvadrat-metoden</u>

Låt $A \in R^{m \times n}$, $Ax = b$

karaktärisering av homogena lösningar dvs

lösningar till $Ax = 0$

$(**)\ Ax = 0 \Leftrightarrow x \in V(A^T)^\perp$

<u>Förklaring</u>: x är ortogonal mot alla rader i A, dvs

x är ortogonal mot alla kolonner i A^T.

$V(A^T)$ är det rum som spänns av kolonnerna i A^T.

$(**)$ kan även uttryckas $\{x;\ Ax = 0\} = N(A)$. $N(A) = V(A^T)^\perp$

Eftersom $(U^\perp)^\perp = U$ får vi då också $N(A)^\perp = V(A^T)$

Samma resonemang för A^T ger

$N(A^T) = V(A)^\perp$

$N(A^T)^\perp = V(A)$

Vi kan skriva $N(A) \oplus V(A^T) = R^n$

$N(A^T) \oplus V(A) = R^m$

Överbestämda linjära ekvationssystem

Holmåker avs 2.3

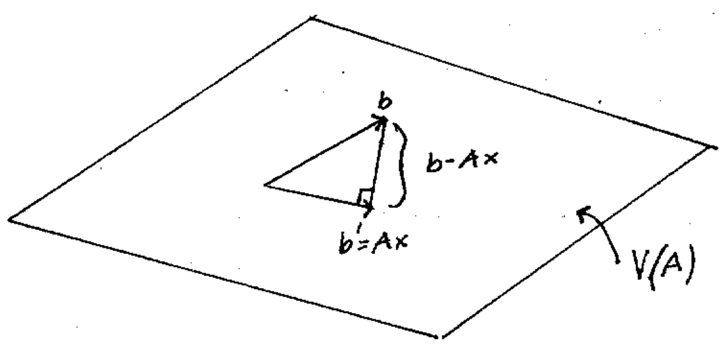
Heath kap 3.

$Ax = b$, $A \in R^{m \times n}$, $m > n$

Minsta-kvadratlösningen def som lösningen till problemet $\min_x \|Ax - b\|_2$

Problemet kan tolkas som att vi vill bestämma den vektor $Ax \in V(A)$ som är närmast b med felet mätt i $\|\cdot\|_2$-normen.

Lösning: Ges av $Ax = b'$ där b' är ortogonal projektion av b på $V(A)$. Men $Ax = b' \Leftrightarrow b - Ax \in V(A)^\perp$



Nu gäller $V(A)^{\perp} = N(A^T)$

dvs $b - Ax \in V(A)^{\perp}$ kan skrivas

$A^T(b - Ax) = 0$ eller $A^TAx = A^Tb$

där A^TA är symmetrisk och pos. def. om A har full rang.

<u>Övning</u>: Visa det. (Bra och enkel övning)

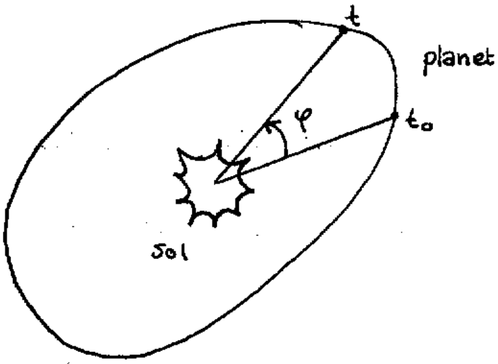
Metoden att lösa $\min_x \|Ax - b\|_2$ genom att lösa $A^TAx = A^Tb$ kallas att lösa <u>normalekvationerna</u>.

<u>Bekymmer</u>: A^TA blir lätt illa-konditionerad.

$$\mathcal{K}(A^TA) = \mathcal{K}(A)^2 \quad \text{i } \|\cdot\|_2\text{-normen.}$$

<u>Ex</u> Anpassning av modellen till mätdata.

Keplers ekvation.



$$\varphi - e\sin\varphi = a(t - t_0)$$

a och e är parametrar som vi önskar bestämma genom att anpassa modellen till mätdata.

(t_i, φ_i), $i = 1, 2, \dots, m$

Överbestämt om m är större än 2.

ekv. syst

$$a(t_i - t_0) + e\sin\varphi_i = \varphi_i$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

matrisform

$$\begin{bmatrix} t_1 - t_0 & \sin\varphi_1 \\ t_2 - t_0 & \sin\varphi_2 \\ \vdots & \\ t_m - t_0 & \sin\varphi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix}$$

I MATLAB får vi minsta-kvadrat lösningen gm \ (backslash) metod. QR-faktorisering.

I Exemplet kan vi skriva

```
t0 = ___
t = [- ___ -]';
fi = [____];
x = [t-t0 _ sin(fi)] \ fi ;
a = x(1) ;
e = x(2);
```

Basbyte mellan ON-baser

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}_e$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix}_e$, e är ON-bas.

$$\langle u,v \rangle = \langle \sum_i x_i e_i , \sum_j y_j e_j \rangle = \sum_i \sum_j x_i y_j \langle e_i , e_j \rangle \underset{ON}{=}$$

$$= \sum x_i y_i = \langle x, y \rangle$$

standardskalärprodukten i R^n

Låt nu e' vara en annan ON-bas

$$x' = \begin{pmatrix} | \\ n \\ | \end{pmatrix}_{e'}$$. Transformatiosmatris $T = \begin{pmatrix} | & & & | \\ e_1' & \dots & & e_n' \\ | & & & | \end{pmatrix}_e$

Egenskap hos T:

kolonnerna är parvis ortogonala.

En sådan matris kallas ortogonal.

Def. En matris A är <u>ortogonal</u> om

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} = I$$

dvs kolonnerna är parvis ortogonala och av längd 1.

<u>Anm</u>: A ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$ //.

<u>koordinatbyte mellan ON-baser</u>

$x = Tx'$, $x' = T^{-1}x$, i allmänhet med ON-baser, dvs med T ortogonal

$x = Tx'$, $x' = T^T x$

<u>Sats 3.4.</u>

Om A är ortogonal så gäller

(a) $\det(A)$ är 1 eller -1.

(b) $(Ax)^T(Ay) = x^T y$

(b') $\|A\|_2 = \|x\|_2$

(b'') $x^T y = 0 \Rightarrow (Ax)^T(Ay) = 0$

(c) Om A, B ortogonala $\Rightarrow AB$ ortogonal

Bevis

(a) $\det(A^TA) = \det(A^T)\cdot\det(A) = \det(A)^2 = 1 \qquad A^TA = I$

(b) $(Ax)^T(Ay) = x^T\underbrace{A^TA}_{=I}y = x^Ty$

(c) $(AB)^T(AB) = B^T\underbrace{A^TA}_{I}B = \underbrace{B^TB}_{I} = I$

(b') brukar utläsas:

tvånormen är invariant under ortogonal transformation

Övning (tentatal)

Visa att $\|Ax\|_2 = \|x\|_2, \ \forall x \Rightarrow A$ ortogonal

lösning finns i Holmåker.

Övning: Basbyte vid ON-baser

R^2 standardbas $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (ON)

Ny ON-bas: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \in R^2$ har koordinaterna 3 och 2 i standardbasen.

Bestäm koordinaterna i nya basen.

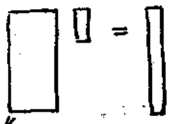
x' är koordinatvektor i ny bas. Transformation

$x' = (T^{-1}x) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ är ortogonal}}}{=} T^Tx \qquad T = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$

$T^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} \qquad x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

Numerisk lösning av överbestämda ekvationssystem

$Ax = b, \quad A \in R^{m \times n}, \quad m > n$



minsta-kvadratlösning: $\min_x \|Ax - b\|_2$

Tillämpningar: Modellanpassning, Keplers ekvation

Vid icke-linjär minsta-kvadrat ex.vis

modell: $\varphi(t) = a e^{-bt} \sin(t)$

med parametrar a och b att bestämma.

Stegvis linjärisering + iteration. I varje iteration löses ett linjärt minsta-kvadrat problem.

Andra normer:

$\|\cdot\|_\infty$ max-norm, gränsvärden inte får överskridas.

standardfunktion i dator $\sin(x)$

$\|\cdot\|_1$, 1-norm, bortser från extrema data.

dessa två normer ger inte linjära ekv. system.

Lösningsmetoder för överbestämda linjära ekv. syst.

minsta-kvadrat $\min_x \|Ax - b\|_2$

Anta A har full rang, rang n. Kolonnerna är linjärt oberoende.

1. Normalekvationerna $A^T A x = A^T b$.

   dvs ortogonal projektion på $V(A)$

   $A^T A$ symmetrisk, positivt definit

   men symmetriskt illa konditionerad

   $\mathcal{K}(A^T A) = \mathcal{K}(A)^2$.

② Utökat system

$A^TAx = A^Tb \iff A^T(Ax-b)=0$ och med

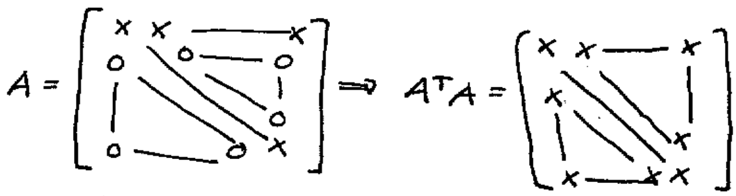
$r = b - Ax$, residualen, har vi $A^Tr = 0$, eller på systemform

$$\begin{cases} r + Ax = b \\ A^Tr = 0 \end{cases}$$

Matrisform :
$$\begin{bmatrix} I & A \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

symmetriskt, men inte positivt definit. Vi har en större matris. Det kan vara att föredra om A är en gles matris. Att bilda A^TA kan förstöra glesheten.

Ex

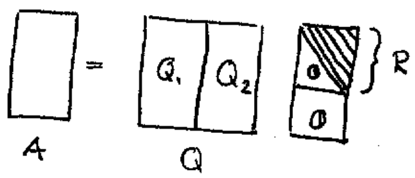


③ Den som används mest, exempelvis i MATLAB.

QR-faktorisering

Det existerar ortogonal matris Q $(m \times m)$ och uppåt triangulär matris R med positiv diagonal så att

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} ,$$



$Q^TQ = I$

Vi ser speciellt att $A = Q_1 R$.

kallas <u>kompakt</u> QR-faktorisering.

<u>Bevis</u>: Existensen följer av Gram-Schmidt.

Gram-Schmidt på kolonnerna i matrisen A

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \xrightarrow[G\text{-}S]{} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = Q_1$$

G-S beräknar skalärprodukter

$r_{ij} = \langle A_j, Q_i \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, j$

Eftersom $Q^T A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ är dessa r_{ij} elementen i R med

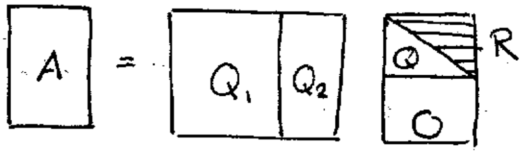
$r_{ij} = 0$, om $i > j$

<u>OBS</u>: Nu kan ni lösa bonusuppgift nr 5 på ett bra sätt.

Att anpassa en cirkel till punkter i ett plan kan formuleras som ett <u>linjärt</u> minsta-kvadratproblem.

QR-faktorisering

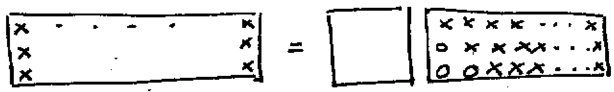
$$A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q^TQ = I$$



$= Q_1 R$

↑ kompakt QR

Anm. Bonusuppg 5



□

Bevis av QR-fakt:

Gram-Schmidt på kolonnerna i A.

Tyvärr är G-S numeriskt instabil, vektorerna tenderar att bli linjärt beroende. I praktiken används ortogonala avbildningar typ speglingar eller rotationer (senare).

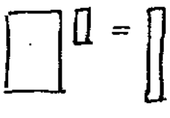
Lösningar av överbest. ekv. syst. i MATLAB : \ (backslash)

Metoden är QR-faktorisering med speglingar. Vill man se QR-faktorerna skriver man

[Q, R] = qr(A)

QR-faktorisering för lösning av överbest. ekv. syst enl minsta kvadrat-metoden

$Ax = b$,



, uppgift : $\min\limits_{x} \|Ax - b\|_2$

$$\|Ax-b\|_2^2 = \left[\begin{array}{l}\text{Sats 3.4 två-normen} \\ \text{invariant under ortogonal} \\ \text{transformation } \|x\|_2 = \|Qx\|_2\end{array}\right] = \|Q^T(Ax-b)\|_2^2 =$$

$$= \left[\begin{array}{l} A = Q\begin{vmatrix}R\\0\end{vmatrix} \\ Q^TA = \underbrace{Q^TQ}_{I}\begin{vmatrix}R\\0\end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix}R\\0\end{vmatrix}. \text{ Låt } Q^Tb = c \\ c = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\end{array}\right] = \left\|\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}x - \begin{vmatrix}c_1\\c_2\end{vmatrix}\right\|_2^2 = \|Rx-c_1\|_2^2 + \|c_2\|_2^2$$

Och det var ju konstigt att man kunde göra så! Varför det? Jo...

$$\boxed{\text{ty} \quad x = \begin{vmatrix}Y\\Z\end{vmatrix}, \quad \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{i=n+1}^{m} Z_i^2 = \|y\|_2^2 + \|z\|_2^2}$$

minimeras för $Rx = c_1$, högertriangulärt system lätt att lösa med bakåtsubstitution och då är $\|Ax-b\|_2 =$
$= \|c_2\|_2$

QR-faktorisering och de fundamentala underrummen

$A = Q_1 R$ med R reguljär (kan väljas med positiv diagonal)

$V(A) = V(Q_1)$

$$Q^TA = \begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix} \underset{\text{transponering}}{\Leftrightarrow} A^TQ = [R^T 0]$$

$$\Leftrightarrow A^T[Q_1, Q_2] = [R^T\ 0]$$

$$\Rightarrow A^TQ_2 = 0 \quad \text{dvs} \quad N(A^T) = V(Q_2)$$

Eftersom Q är ortogonal har vi återupptäckt

$V(A)^\perp = N(A^T)$

Övning: Visa att $R^T R$ är symmetrisk (Cholesky) faktorisering av $A^T A$.

Nu gör vi ett lyft i kursen. Nu blir det svårt (eller nåt)!

$F(u) = \Delta u$, en operator, avbildning

$G(u) = a^T \nabla u$, en operator, –"–

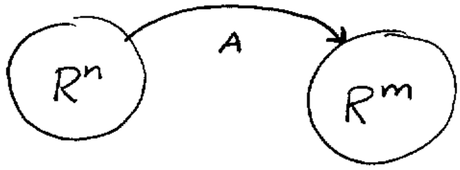
Mängden av linjära avbildningar är ett linjärt rum.

Ex $F(u) + G(u)$ är en operator.

$\Rightarrow$ $\Delta u + a^T \nabla u = f$ fungerar.

Kap 3 i Holmåker: Linjära avbildningar

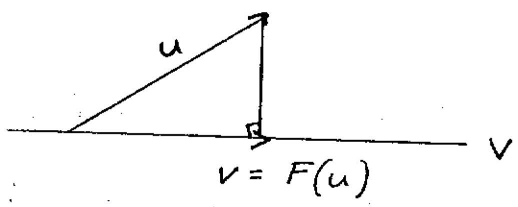
Ex 1 En matris $A \in R^{m \times n}$ repr. en avbildning genom $y = Ax$: $A : R^n \to R^m$



Om $m=n$ och $\text{rang}(A) = m = n$ så entydig och omvändbar (inverterad). Omvändningen repr. av matrisen A^{-1}.

$A^{-1} : R^m \to R^n$, $x = A^{-1} y$

Ex 2. Ortogonal projektion $U \to V$



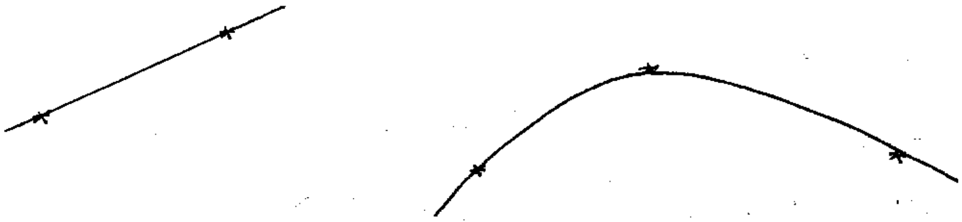
Entydig men inte omvändbar.

Ex 3 (Jämför Ex 1.13 i Holmåker).

Givet $n+1$ punkter i planet

(x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \dots n$, med x_i olika

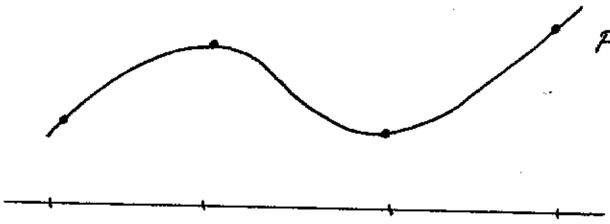
Då finns ett entydigt polynom av grad $\leq n$ genom punkterna dvs $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.



Givet $x \in R^{n+1}$ kan vi se interpolationen som en avbildning

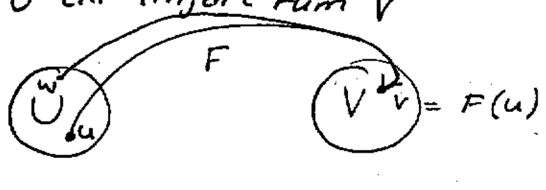
$I : R^{n+1} \longrightarrow P_n$, $I(y) = p_n$

$\uparrow$ rummet av polynom av grad $\leq n$.



Är avbildningen entydig och omvändbar?

Låt $F : U \to V$ vara en avbildning från linjärt rum U till linjärt rum V



$F(u)$ är entydigt bestämd men det kan finnas flera element i U som ger samma element i V.

Def 3.1. En avbildning $F: U \to V$ är linjär om

(i) $F(u+w) = F(u) + F(w)$

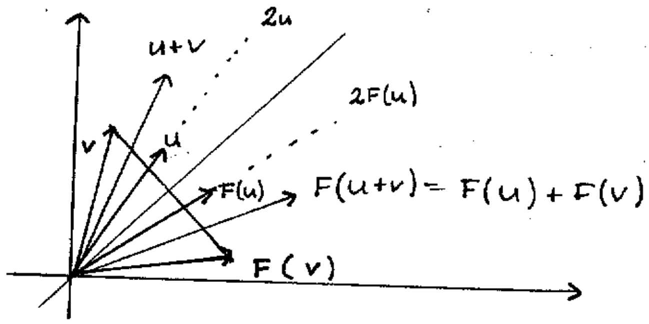
(ii) $F(\alpha u) = \alpha F(u)$

Upprepning: $F\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) \underset{(i)}{=} \sum_{i=1}^{k} F(\alpha_i u_i) \underset{ii}{=} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i F(u_i)$

Speciellt $\alpha = 0 \Rightarrow F(0) = 0$

Frågor: Är avbildningarna i Ex 1, Ex 2, Ex 3 linjära?

Ex 4 Spegling i linje genom origo



Denna linjära avbildning bevarar längd och ortogonalitet.
En sådan avbildning kallas ortogonal.

Ex 5 Rotation en vinkel θ runt origo bevarar också längd och ortogonalitet.
Rotation är en ortogonal avbildning.

Ex 1 $U = R^n$, $V = R^m$, $F(x) = Ax$

linjär: $F(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y = \alpha F(x) + \beta F(y)$

Anm Alla linjära avbildningar kan karakteriseras med en matris.

Ex 6 $\quad U = C^1([0,1])$

$V = C([0,1])$

$F(f) = Df = f' \quad F: U \to V$

Derivering är en linjär avbildning

$F(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha F(f) + \beta F(g)$

Ex 7 $\quad U = V = C([a,b])$

$F(f)(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

$F: U \to V$

Linjär: $F(\alpha f + \beta g)(x) = \int_a^x (\alpha f + \beta g)(t)\, dt = \alpha \int_a^x f(t)\,dt + \beta \int_a^x g(t)\,dt =$

$= \alpha F(f)(x) + \beta F(g)(x)$

Ex 8 $\quad U = C([a,b])$, $V = R$, $F: U \to R$

$F(f) = \int_a^b f(t)\,dt$

Speciella avbildningar:

Operator: avbildar funktioner på funktioner

Ex: Δ

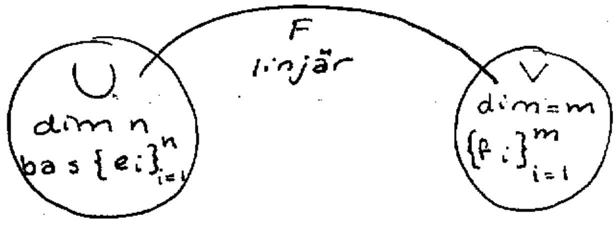
Funktional: avbildar funktioner på skalärer

Ex 8.

Fråga: Är ortogonal projektion en ortogonal avbildning?

Svar Nej: bevarar inte längd.

Matrisrepresentation av linjär avbildning



koordinatvektorer $x = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}_e$, $y = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_f$

$$v = F(u) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ linjär}}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i F(e_i)$$

$$\text{dvs } y = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_f = \sum_{i=1}^{n} x_i \begin{pmatrix} | \\ F(e_i) \\ | \end{pmatrix}_f = Ax$$

$$\text{dvs } A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ F(e_1) & F(e_2) & \dots & F(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}_f$$

Avbildningen F karakteriseras helt av matrisen A.
Kallas <u>matrisen för avbildningen</u> och ekvation $y = Ax$
kallas matrisrepresentationen av $v = F(u)$

<u>Linjära avbildningar</u> forts

$$x = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}_e \qquad y = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_f$$

$$v = F(u) \longleftrightarrow y = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ F(e_1) & F(e_2) & \dots & F(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

<u>Ex 3.8</u> $V = R^n$, U är k-dim underrum med ON-bas $\{e_i\}_{i=1}^{k}$

Enl Sats 2.7 kan ortogonala projektion av x på U,

$$p(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle e_j$$

I standardskalärprodukten $<x, e_j> = e_j^T x = x^T e_j$ blir

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} (e_j^T x) e_j = [\text{matrisalgebra}] = \sum_{j=1}^{k} e_j (e_j^T x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (e_j e_j^T) x = Ax \quad \text{där } A = \sum_{j=1}^{k} e_j e_j^T \text{ är matrisen}$$

för avbildningen dvs $P(x)$ är avbildningen $P(x) = Ax$ därmed visat att avbildningen är linjär.

<u>Ex 3.10</u> Beräkna $\int (1 - 2x + x^2 + 3x^3) e^{2x} dx$ med matrismetoden (OBs! Ingen generell metod!)

Funktionerna $f_1 = e^{2x}$, $f_2 = xe^{2x}$, $f_3 = x^2 e^{2x}$, $f_4 = x^3 e^{2x}$ är linjärt oberoende (visas som ex 1.12)

$B = \{f_i\}_{i=1}^{4}$ bas i 4-dim underrum till $C'(R)$

Derivera: $f_1' = 2e^{2x}$ $f_2' = (1+2x)e^{2x}$ $f_3' = (2x + 2x^2)e^{2x}$

$f_4' = (3x^2 + 2x^3)e^{2x}$

Deriveringsoperatorn $F(f) = f'$ har alltså matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_B$$

A är inverterbar, dvs den omvända operationen "Integrering" existerar och den är en linjär avbildning. (Vi tar integrationskonstanten $= 0$)

Vi vill beräkna $\int f dx$ där $\begin{pmatrix} | \\ f \\ | \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

och får alltså ekvationssystemet

$$A \begin{pmatrix} | \\ g \\ | \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} | \\ f \\ | \end{pmatrix}_B$$

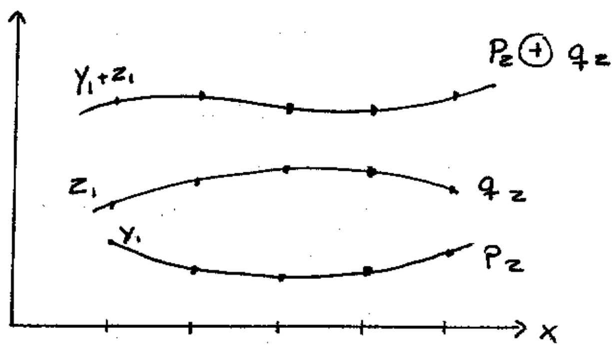
Lösning med bakåtsubstitution

$$\begin{pmatrix}1\\g\\1\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1/8\\3/4\\-7/4\\3/2\end{pmatrix} \quad \text{dvs } g(x) = \int f(x)\,dx = \left(1/2 + 3/4\,x - 7/4\,x^2 + 3/2\,x^3\right)e^{2x}$$

<u>Svar på fråga</u>

genom $n+1$ givna punkter (x_i, y_i) $i = 0, \dots, n$ går ett polynom av grad $\leq n$

$I : R^{n+1} \to P_n \quad I(y) = P_n$



<u>linjär</u>? (i) $I(\alpha y) = \alpha I(y)$

(ii) $I(y+z) = I(y) + I(z)$

Låt $I(z) = q_n$ då gäller

$P_n(x_i) = y_i$

$q_n(x_i) = z_i$

$$\sum P_n(x_i) + q_n(x_i) = y_i + z_i$$

dvs $P_n \oplus q_n$ interpolerar $(p_n \oplus q_n)(x_i) = P_n(x_i) + q_n(x_i)$

$y + z$ dvs $I(y+z) = I(y) + I(z)$

<u>Mängden av linjära avbildningar</u>

$F: U \to V$ är ett linjärt rum om addition och multiplikation med skalär def. på vanligt sätt.

$(F \oplus G)(u) = F(u) \oplus G(u) \quad u \in R$

$(\alpha \odot G)(u) = \alpha F(u) \quad \alpha \in R$

<u>Bevis</u> övning 9 3

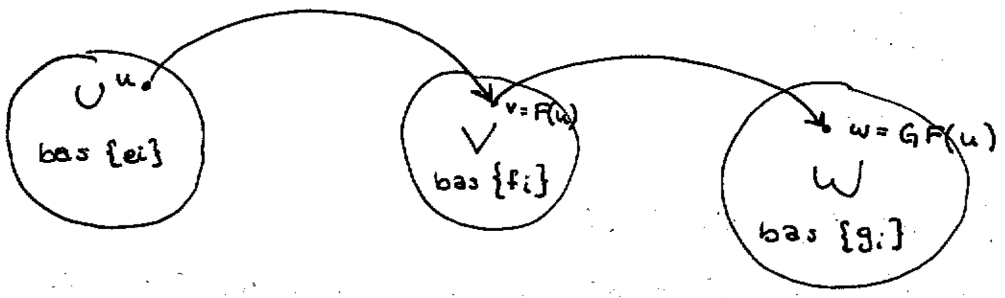
Speciellt visas att $\begin{cases} F \oplus G & \text{är en linjär avbildning} \\ \alpha \odot F & \text{— " —} \end{cases}$

Ex $F(f)=f'$ $\quad G(f)=f''$

$(\alpha F \oplus G) = \alpha f' + f''$ är en linjär avbildning

$\Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \oplus \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ är en linjär avbildning

Sammansatta avbildningar



sammansatt avbildning

$GF : U \to W$

def av $GF(u) = G(F(u))$, $u \in U$

GF är en linjär avbildning ty

(i) $GF(\alpha u) = G(F(\alpha u)) = G(\alpha F(u)) = \alpha G(F(u)) = \alpha GF(u)$

(ii) $GF(u_1 + u_2) \underset{def}{=} G(F(u_1 + u_2)) = G(F(u_1) + F(u_2)) = \{G \text{ linjär}\}$

$= G(F(u_1)) + G(F(u_2)) \underset{def}{=} GF(u_1) + GF(u_2)$

Antag ändligt dim linjära rum U, V, W. F har matrisen A, $v = F(u) \leftrightarrow y = Ax$

G har matrisen B, $w = G(v) \leftrightarrow z = By$

där $x = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} | \\ w \\ | \end{pmatrix}$

$\underline{w = GF(u)}$

Vi får $z = By = B(Ax) = (BA)x = Cx$

dvs avbildningen GF har matrisen $BA = C$

Detta bestämmer hur matrismultiplikation måste definieras.

$y_i = \sum_j a_{ij} x_j$, $z_k = \sum_i b_{ki} y_i$

$$\text{dvs } z_k = \sum_i b_{ki} \sum_j a_{ij} x_j = \sum_j \sum_i (b_{ki} a_{ij}) x_j \overset{\text{vill}}{=}$$

$$= \sum_j c_{kj} x_j$$

$$\text{dvs } c_{kj} = \sum_i b_{ki} a_{ij} \quad (\text{def av matrismult. } C = BA)$$

Fundamentala underrum till linj. avbildningar

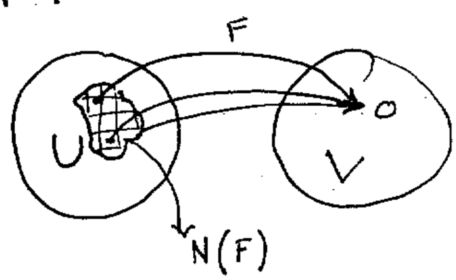
Låt $F: U \to V$ linjär

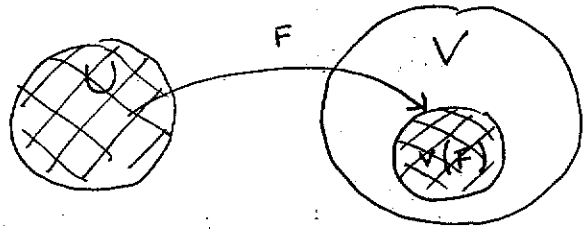
<u>Nollrummet</u> $N(F) = \{u \in U,\ F(u) = 0\}$

<u>Värderummet</u> $V(F) = \{F(u) \in V,\ u \in U\}$

$N(F)$ underrum till U

$V(F)$ — " — V





Linjär ekvation $(Ax = Y)$

sök $u \in U$ så att $F(u) = v$, v givet.

$F(u) = 0$ kallas den homogena ekvationen.

Detta kan vara: ekv. system
diff. ekv.
integralekv
system av diff.ekv.
⋮

Sats 3.1 Låt u_p vara en lösning till en ekvation $F(u) = v$. Då kan alla lösningar skrivas

$$u = u_p + u_h$$

där $u_h \in N(F)$

dvs lösningsmängden är $u_p + N(F)$ dvs en affin mängd.

Sats 3.2

$F : U \to V$, U ändligt dim F linjär avbildning

Då $\dim N(F) + \dim V(F) = \dim(U)$

Kommentar Sats 3.1

Om $N(F) = \{0\}$ så är lösningen u_p entydigt bestämd.

F kallas då isomorfism. F är omvändbar.

Om U är ändligt dim så gäller enl. Sats 3.2 att

$\dim V(F) \le \dim(U)$ med likhet $\Leftrightarrow$ F är isomorfism $\left(N(F) = \{0\}, \dim = 0\right)$

Ex Varje n-dim rum V är isomorft med K^n dvs det finns en isomorfism $F : V \to R^n$

$F = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}_e$: $F : U \to R^n$ entydigt bestämd givet basen $\{e_i\}$.

$N(F) = \{0\} \Rightarrow$ isomorfism

Linjära avbildningar och basbyte

$F : V \to V$ linjär

Två baser $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{e_i'\}_{i=1}^n$

F har matrisen A i basen $\{e_i\}$ och A' i basen $\{e_i'\}$.

Låt $v = F(u)$, $x = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}_e$, $y = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_e$ dvs $y = Ax$

$x' = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}_{e'}$, $y' = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_{e'}$, $y' = A'x'$

Vidare enl. koordinatbytesformeln

$x = Tx'$, $y = Ty'$, $T = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1' & e_2' & \dots & e_n' \\ | & | & & | \end{bmatrix}_e$

dvs $y' = T^{-1}y = T^{-1}Ax = T^{-1}ATx'$

men $y' = A'x'$

vi har alltså $A'x' = T^{-1}ATx'$, $\forall x' \in R^n$

dvs $A' = T^{-1}AT$

Speciellt vid ON-baser så är T ortogonal $\Rightarrow$ $A^{-1} = T^TAT$

Anm Vi ser att determinanten är oberoende av bas. Dvs $\det A' = \underbrace{\det(T^{-1})}_{= \frac{1}{\det(T)}} \det(A) \det(T)$

Ortogonala avbildningar i planet

Sats 3.5 $A \in R^{2\times 2}$ ortogonal

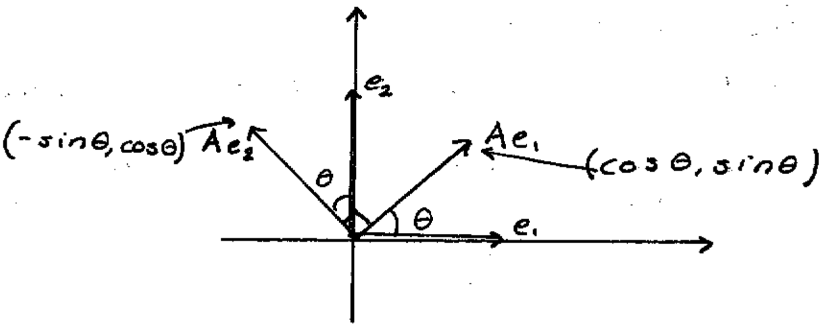
Då är den linjära avbildningen $y = Ax : R^2 \to R^2$ antingen en rotation eller en spegling i linje genom origo.

Bevis

Låt $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ortogonala)

Sats 3.4 ger Ae_1 och Ae_2 ortogonala och med samma längd som e_1 resp e_2.

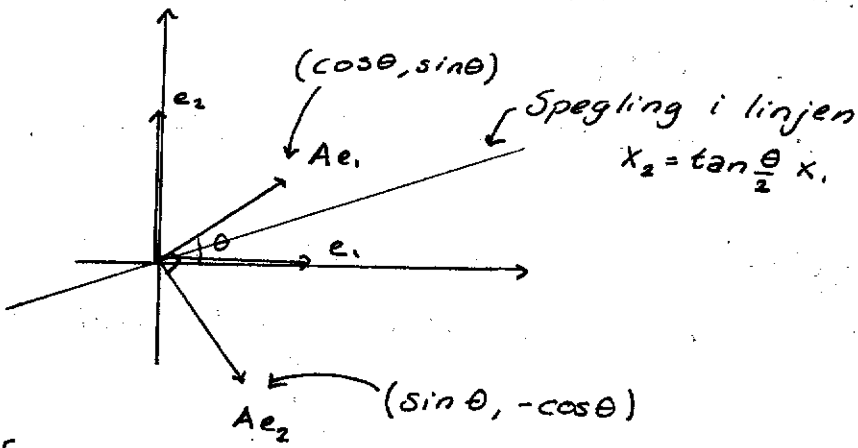
Fall 1.



Rotation en vinkel θ

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \det A = 1$$

Fall 2



$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad \det(A) = -1$$

<u>Sats 3.6</u> $A \in R^{3\times3}$ ortogonal

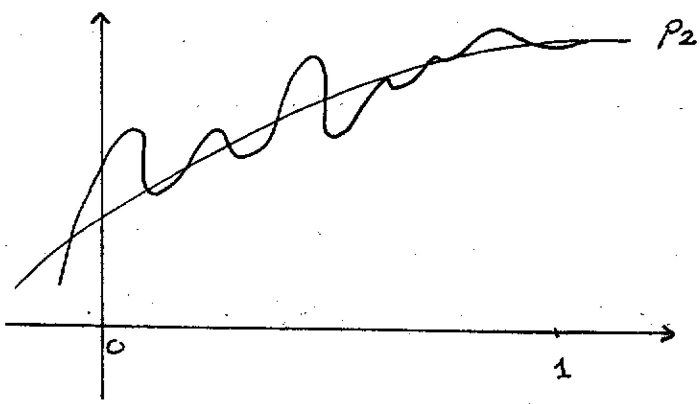
Om $\det(A)=1$ så är $y=Ax$ en <u>rotation</u>

Om $\det(A)=-1$ så är $y=Ax$ en <u>rotation följd av en spegling i origo</u>.

Bevis: se komb.

Bonusuppgift nr 6. Tillämpa sats 3.6

<u>Bästa polynomapproximation</u>



$F: C([0,1]) \rightarrow P_n([0,1])$

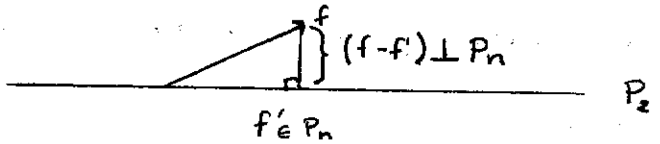
bästa approximation är ortogonal projektion.

Vi tar $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$

Bas i P_n: $\{x^{i-1}\}_{i=1}^{n+1}$

$P_n = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_{n+1}x^n$

Karakt. av. bästa app: Felet $\perp$ approxrummet



dvs $\langle f - P_n, x^{i-1} \rangle = 0 \quad i = 1, \ldots, n-1$

eller $\langle p_n, x^{i-1} \rangle = \langle f, x^{i-1} \rangle$, —"—

dvs $\langle \underbrace{\sum c_j x^{j-1}}_{= p_n}, x^{i-1} \rangle = \langle f, x^{i-1} \rangle$

$\sum c_j \langle x^{j-1}, x^{i-1} \rangle = \langle f, x^{i-1} \rangle \quad \ldots$

$\Leftrightarrow A c = b$

element $a_{ij} = \langle x^{j-1}, x^{i-1} \rangle = \int_0^1 x^{j-1} x^{i-1} dx = \frac{1}{j+i-1}$

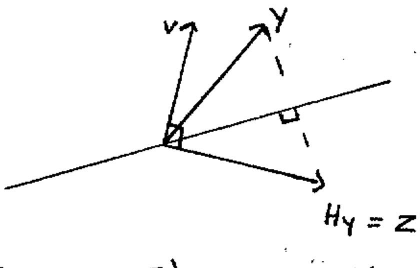
Detta är Hilbertmatrisen i Bonusuppg. 3. Mycket illa-konditionerad. Vi kan välja ON-bas av polynom. då blir matrisen = I, indealt konditionerad.

<u>QR-faktorisering med elementära speglingar</u> Heath 3.4.4

<u>Inl</u> Låt $H = I - 2vv^T$, $v \in R^n$, $\|v\|_2 = 1$ då är H symmetrisk och ortogonal.

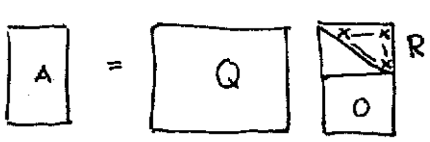
Övning: Visa detta!

Hy är speglingen av y i ett plan ortogonalt mot v.



$$Hy = (I - 2vv^T)y = y - 2v(v^T y) = y - \underbrace{2(v^T y)}_{\alpha} v = y - \alpha v \quad \text{stämmer}$$

Detta kallas Householder-spegling. Används för QR-faktorisering i MATLAB.



, $A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$

Om vi vill avbilda y på $z = Hy$ så väljer vi $z = y - \alpha v$ dvs $v = \frac{1}{\alpha}(y - z)$ normaliserad så att $\|v\|_2 = 1$

dvs $v = (y - z) / \|y - z\|_2$ (*) och $H = I - 2vv^T$

QR-fakt steg 1: $A^{(1)} = A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

Spegla 1:a kolonnen rätt

dvs till $\begin{bmatrix} r_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = r_{11} e_1$ (1:a kol i R)

Normen bevarad dvs $r_{11} = \pm \| a_1 \|$

Då $A^{(2)} = H_1 A^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} r_{11} & \boxed{\begin{matrix} x \\ x \\ | \\ x \end{matrix}} & \text{—} & x \\ 0 & & & | \\ 0 & & & | \\ | & & & | \\ 0 & & \text{—} & x \end{bmatrix} \\ \qquad (*) \end{array}$

H_1 ?

Vi väljer alltså enl. (*) : $v_1 = \dfrac{a_1 - r_{11} e_1}{\| a_1 - r_{11} e_1 \|_2}$

$H_1 = I - 2 v_1 v_1^T$

Fortsätt med $A^{(2)}$ och spegla 2:a kolonnen rätt.

Andra kolonnen i $A^{(2)}$ med 1:a elementet ersatt med 0:

$a_2^{(2)} = \begin{array}{c} (*) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ | \\ x \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ r_{22} \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad r_{22} = \pm \| a_2^{(2)} \|_2$

$$v_2 = \frac{a_2^{(2)} - r_{22} e_2}{\| a_2^{(2)} - r_{22} e_2 \|_2}, \quad H_2 = I - 2 v_2 v_2^T$$

Vi har då

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} r_{11} & x & x & \cdots & x \\ 0 & r_{22} & x & & \vdots \\ \vdots & 0 & \boxed{\begin{matrix} x \\ \vdots \\ x \end{matrix}} & & \vdots \\ 0 & 0 & & & x \end{pmatrix}$$

Efter n transformationer

$$A^{(n+1)} = H_n A^{(n)} = H_n H_{n-1} \cdots H_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vill $A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \iff Q^T A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$

Q^T ortogonal ty produkt av ortogonala matriser.

Egenvärden och egenvektorer

Def Låt F vara linjär avbildning på ett komplext rum V. Ett komplext tal λ kallas egenvärde till F om $\exists\, u \in V$ så att

$$F(u) = \lambda u$$

u kallas egenvektor (egenelement) till F hörande till egenvärde λ.

Ex1 Rotation i rummet! Vektor // rotationsaxeln

Ex2 $V = C^1([0,1])$ $F = D$ (derivering)

$$F(e^x) = 1 e^x, \quad F(e^{ax}) = a e^{ax}$$

<u>Ex 3</u> Projektion $P: V \to U$

Ofta är num. approximationer just projektioner

U approximationsrum.

<u>Def</u> P är projektion om $P(P_v) = P_v$, $\forall v \in V$

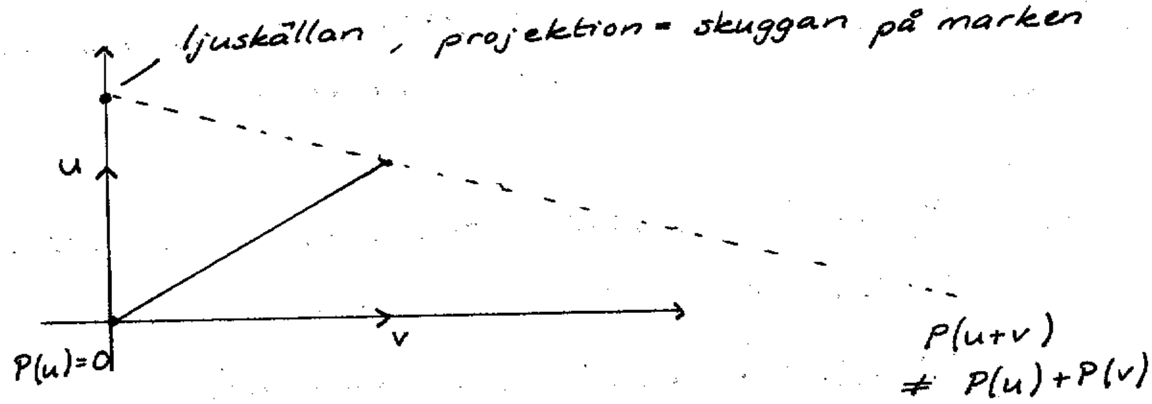
Speciellt $P(u) = u$ om $u \in U$

Här gäller alltså att alla $u \in U$ är egenvektorer

med egenvärde 1.

<u>Anm</u> Ortogonal projektion är linjär men

t.ex. punktformad projektion är <u>inte</u> linjär



$\therefore$ Inte linjär!

Om V är ändligt dim med bas $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ och

$F: V \to V$ linjär avbildning så kan

$F(v) = \lambda v$ egenvärdesproblem representeras av

$\boxed{Ax = \lambda x}$ algebraiskt egenvärdesproblem

Egenvärden / egenvektorer

Egenvärdesproblem: $F(u) = \lambda u$

Matrisrepresentation: $Ax = \lambda x$

$$x = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}_e \qquad A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ F(e_1) & F(e_2) & \dots & F(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}_e$$

Sats 4.1. λ egenvärde till $F: V \to V$

$\dim = n$, bas $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ $\Leftrightarrow$ $Ax = \lambda x$, $x \in C^n$, $x \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)x = 0$ har icke trivial lösn

$\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$

För små handräkningsproblem kan man använda Sats 4.1 för att lösa egenvärdesproblem.

Två steg: (1) Bestäm λ ur $\det(A - \lambda I) = 0$

(2) Bestäm x ur $(A - \lambda I)x = 0$

Generella lösningsmetoder tar vi upp senare (numerik) Heath.

Anm Om A' är matrisen för F i en annan bas e' så gäller $A' = T^{-1}AT$ där

$$T = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1' & e_2' & \dots & e_n' \\ | & | & & | \end{bmatrix}_e$$

Då gäller $A'x = T^{-1}ATx = \lambda x$

$$A(Tx) = \lambda(Tx)$$

så med $y = Tx$ gäller $Ay = \lambda y$.

dvs A och A' har <u>samma</u> egenvärden och om x egenvektor till A' så är Tx egenvektor till A.

<u>Anm 2</u>

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

utveckling

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}) + \ldots + \det(A)$$

$$(= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda))$$

lägre ordningstermer

Detta är ett polynom i λ av grad n. Kallas <u>karakteristiska</u> polynomet. Att lösa $\det(A-\lambda I)=0$ (handräkning) kallas att lösa <u>karakteristiska</u> ekvationer.

Låt $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ vara rötterna (n st komplexa) till karakt. ekv $\det(A-\lambda I)=0$. Då gäller

$$\det(A-\lambda I) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$$

Vi jämför med tidigare formel och får

* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum a_{ii}$
* $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$

Kan användas för kontroll eller för att reducera räknearbetet.

Nu tar vi ett exempel

Ex. Bestäm egenvärden och egenvektorer till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Steg 1 egenvärdena gm $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -1(1-\lambda)(1+\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1$$

Karakt. ekv. $\lambda^2 + 1 = 0$ har rötterna $\begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{cases}$

Steg 2 Lös homogent ekvationssystem.

$(A - \lambda I) = 0$ för varje λ.

$\lambda_1 = i$:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-i & -1 & 0 \\ 2 & -1-i & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1-i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lösning : $x_2 = t$

$$x_1 = t/(1-i) = t\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\right)$$

$$x = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -i$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & -1 & 0 \\ 2 & -1+i & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1+i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lösning: $x_2 = t$

$$x_1 = t/(1+i) = t\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\right)$$

$$x = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anm. Om A reell matris så förekommer egenvärdena och egenvektorerna komplexkonjugerade.

Nu tar vi ett till!

Ex $V = \text{Span}\{e^x, \sin x, \cos x, e^x \sin x, e^x \cos x\}$

Bestäm egenvärden och egenvektorer till $F(f) = Df$, där D står för derivering.

Betrakta basen $e_1 = e^x$, $e_2 = \sin x$, $e_3 = \cos x$, $e_4 = e^x \sin x$, $e_5 = e^x \cos x$.

Följ satsen; bilda matris.

Vi får $F(e_1) = e^x = e_1$

$F(e_2) = \cos x = e_3$

$F(e_3) = -\sin x = -e_2$

$F(e_4) = e^x \cos x + e^x \sin x = e_5 + e_4$

$F(e_5) = -e^x \sin x + e^x \cos x = -e_4 + e_5$

dvs

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}$$

A är blockdiagonal. Man kan separera och räkna block för block.

till $A_{11} = 1$, $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

till $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_{2,3} = \pm i$, $v_{2,3} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

till $A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{4,5} = 1 \pm i$, $v_{4,5} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mp i \end{vmatrix}$

Vi har alltså följande egenvektorer och egenvärden

e^x med egenvärde 1

$\sin x - i\cos x$ egenvärde i

$\sin x + i\cos x$ egenvärde $-i$

$e^x\sin x - ie^x\cos x$ –"– $1+i$

$e^x\sin x + ie^x\cos x$ –"– $1-i$

Diagonalisering

$A \in R^{n\times n}$

Egenvärdesproblem: $Av_i = \lambda_i v_i$

Anta att $\{v_i\}_{i=1}^n$ är linjärt oberoende

Då $A\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$T = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\Rightarrow AT = TD$ dvs $D = T^{-1}AT$

man säger att A har diagonaliserats. Detta är sats 4.2

Sats 4.3 Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende

Bevis Def av linj. ober

Följd: Alla egenvärden olika $\Rightarrow$ A kan diagonaliseras

Symmetriska avbildningar

Låt V vara ett reellt linjärt rum med skalärprodukt.

Def $F: V \to V$ är symmetrisk om

$$\langle u, F(v) \rangle = \langle F(u), v \rangle \quad \forall\, u, v \in V$$

Sats 4.4. F har matris A i ON-bas. F symmetrisk $\overset{\text{(omm)}}{\Leftrightarrow}$ $A = A^T$

Bevis $x = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}_e$, $y = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_e$, $\{e_i\}$ ON-bas

$$\langle u, v \rangle = x^T y \quad \text{enl. formel 2.24}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F(v) = Ay \\ F(u) = Ax \end{array}}$$

$$\langle u, F(v) \rangle = x^T(Ay) = x^T A y$$

$$\langle F(u), v \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y \quad \forall\, x, y$$

$$x^T A y = x^T A^T y, \ \forall\, x, y \Leftrightarrow A = A^T$$

$\Leftarrow$) självklart

$\Rightarrow$) gäller ty $x = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$ $y = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$$x^T A y = a_{ij}, \quad x^T A^T y = a_{ji}$$

dvs $a_{ij} = a_{ji}$ (A symmetrisk) ∎

__Sats 4.5__ A reell symmetrisk

$\Rightarrow$ alla egenvärden och egenvektorer kan väljas reella.

__Bevis__ $Ax = \lambda x$

multiplicera med $\bar{x}^T$ från vänster

(*) $\bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x$

Talet $\bar{x}^T A x = (\bar{x}^T A x)^T = x^T A^T \bar{x} \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ reell} \\ \text{symm}}}{=}$

$= \overline{(\bar{x}^T A x)} \Rightarrow x^{-T} A x \in R$

Vidare är $\bar{x}^T x = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \in R$

$\Rightarrow \lambda$ i (*) $\in R$

Om $x = u + iv$ så $Ax = A(u+iv)$

$= Au + iAv$

och x egenvektor

$Ax = \lambda x$

$Au + iAv = \lambda(u+iv) \Rightarrow Au = \lambda u$

$Av = \lambda v$

$x \neq 0 \Rightarrow u$ eller $v \neq 0$ och duger som egenvektor. ∎

__Följd:__ $F: V \to V$, linjär och symmetrisk

$\dim(V) = n$

Då har F minst ett reellt egenvärde

__Bevis__: $F \longleftrightarrow A$ i ON-bas $\{e_i\}_{i=1}^n$, Då är A reell

symmetrisk. $\lambda \in R$ enl Sats 4.5

$Ax = \lambda x \longleftrightarrow F(u) = \lambda u$, $x = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}_e$

$x \neq 0 \longleftrightarrow u \neq 0$

$\uparrow$ reellt.

<u>Sats 4.6</u> F linjär, symmetrisk

$\Rightarrow$ egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala (till motsvarande matris).

<u>Bevis:</u> se komp.

<u>Diagonalisering</u>

<u>Sats 4.2</u>

$AT = TD \qquad Av_i = \lambda v_i$

$$T = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & & & v_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Triangulär $\Rightarrow$ $T^{-1}AT = \underbrace{T^{-1}T}_{I} D = D$

När går det?

Matris är diagonaliserbar om <u>något</u> av följande gäller:

1. Linjärt oberoende egenvektorer, enl sats 4.2
2. Alla egenvärden olika, sats 4.2.
3. Reell, symmetrisk matris med ortogonal matris T

   dvs $T^T A T = D$

   Spektralsatsen, sats 4.8

   Spektralsatsen finns även mer allmänt där symmetriska avbildningar $F: V \to V$ med $\dim(V) = n < \infty$

<u>Ex 4.8</u> Diagonalisera $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ med en ortogonal-matris

Anm Beräkning av determinant i praktiken för stora problem.

$A = LU$ LU faktorisering (Gauss)

$$A = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{vmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{vmatrix}}_{U} \qquad \det A = \det L \det U \quad \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Lösning $\det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

G-elemination

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -1 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 0 & -2+\lambda & 1+(1-\lambda)^2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda-2 \end{vmatrix}$$

$\det A = +(2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$

teckenbyte i och med radbyte

$\det A = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Egenvektor

$\lambda_1 = -1 \qquad (A - \lambda I)x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = t \\ x_1 = t \end{array} \qquad V_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

normerad efterssom det söks en ortogonal matris.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ multipelt egenvärde

$(A - \lambda_i I)x = 0$

$$\left.\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_3 = t \\ x_2 = s \\ x_1 = -t - s \end{matrix}$$

Vi kan ta $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Men vi vill ha dem ortogonala : Kör G-S : Ta $\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{v}_2$ ortogonal mot $\hat{v}_1$ $\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle}{\| v_1 \|_2^2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

normera $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi får $T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

Ex på icke tillämpbart diagonalisering

Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ utred detta !

Användning av diagonalisering

Beräkna A^k, A diagonalsvektor $T^{-1}AT = D$

$A = TDT^{-1}$, $A^2 = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) = TD\underbrace{T^{-1}T}_{=I}DT^{-1}$

$A^2 = TD^2T^{-1}$

$\vdots$

$A^k = TD^kT^{-1}$, $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$

$A^{1/2}$

Beräkning av (def av) $A^{1/2}$, då A pos. definit (egenv. positiva)

$B = A^{1/2}$ är en matris sådan att $B^2 = A$

Låt $A = TDT^{-1}$

Då $B = TD^{1/2}T^{-1}$, $D^{1/2} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & & & 0 \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^{1/2} \end{bmatrix}$

så gäller $B^2 = (TD^{1/2}T^{-1})(TD^{1/2}T^{-1}) = TD^{1/2}D^{1/2}T^{-1} =$

$= TDT^{-1} = A$

Användning av diagonaliserbarhet (Bonusupp 7)

1. A^k
2. $A^{1/2}$
3. Folkomflyttning: x_n i staden, y_n på landet, vid tiden n

totala befolkningen: $\boxed{x_n + y_n = 1}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}9\, x_n + 0{,}2 \\ y_{n+1} = 0{,}1\, x_n + 0{,}8\, y_n \end{cases}$$

System $u_n = \begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix}$, $u_{n+1} = \begin{vmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} u_n$

u_0, $u_1 = Au_0$, $u_2 = A(Au_0) = A^2u_0$, $\ldots$ $u_n = A^n u_0$

Diagonalisera: $T^{-1}AT = D$ $\quad$ T = egenvektorer, D = egenvärden

$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

dvs $u_n = (TD^nT^{-1})u_0$ (enl 1)

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} u_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Konvergens mot ändliga tal $\neq 0$ $\longleftrightarrow$ $\|D\| = 1$

Vad händer om $\|D\| < 1$?

$\|D\| > 1$?

Ex 4.12 System av massor och fjädrar

Rörelseekv $\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$

kan skrivas $x'' = Ax$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

där $A = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}$

Kvadratiska former

$q(x) = x^T A x$, A reell, symmetrisk

Diagonalisering $T^T A T = D$

Spektralsatsen, T ortogonal

Variabeltransf $\xi = T^T x \Leftrightarrow x = T\xi$

$q = x^T A x = \ldots = \xi^T D \xi$. Vi har diagonaliserat formen.

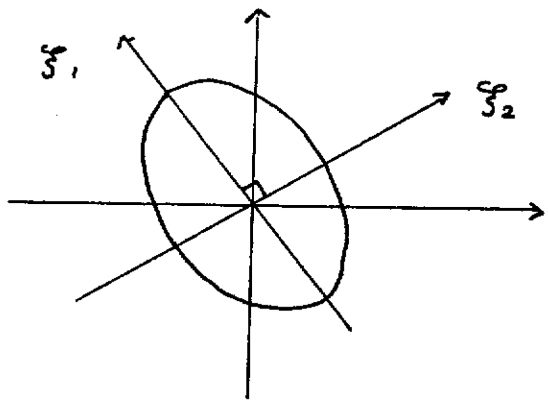
Ex. Andragradskurva i planet. Ellipsen $7x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 = 3$ kan skrivas $x^T A x = 3$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

med $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Diagonaliseringen $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,

$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliserad form: $3\xi_1^2 + 8\xi_2^2 = 3$

Ellips med halvaxlarna $1, \sqrt{3/8} \approx 0{,}6$ i riktningarna

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ resp $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Def A eller q är positivt definit om $q(x) = x^T A x > 0$ $\forall x \neq 0$. A pos semidefinit om $x^T A x \geq 0$ $\forall x$.

A indefinit om $x^T A x$ kan ha olika tecken för olika x.

Genom diagonaliseringen $q(x) = x^T A x = \xi^T D \xi$ kan detta karakteriseras genom egenvärdena.

A pos def $\Leftrightarrow$ $\lambda_i > 0 \ \forall i$

A pos semidef $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \geq \ \forall i$

A indefinit $\Leftrightarrow$ λ_i olika tecken

<u>Sats 4.10</u>

A reell, symmetrisk

$$\lambda_{min} \leq \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_{max} \quad , \quad \forall x \in R^n, \ x \neq 0$$

med likhet $\Leftrightarrow$ x är egenvektor hörande till λ_{min} resp λ_{max}.

<u>Bevis</u>

$$q = x^T A x = \xi^T D \xi \ , \quad \xi = T^T x$$

$$x^T x = (T\xi)^T (T\xi) = \xi^T \underbrace{T^T T}_{I} \xi = \xi^T \xi$$

$$x^T A x = \xi^T D \xi = \lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2 \geq \lambda_{min}(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)$$
$$= \lambda_{min} \xi^T \xi = \lambda_{min} x^T x$$

Likhet fås $\Leftrightarrow$ $\xi_i = 0 \quad \forall \lambda_i > \lambda_{min}$

dvs för $x = T\xi = \sum_{\lambda_i = \lambda_{min}} \xi_i e_i$ (e_i egenvektorer).

Då är $Ax = \lambda_{min} \sum_{\lambda_i = \lambda_{min}} \xi_i e_i = \lambda_{min} x$

dvs x egenvektor. ■

Åt andra hållet pss.

<u>Ex</u> Ett enkelt optimeringsproblem

Bestäm max och min för

$$q(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3$$

då $\|x\|_2 = 3$.

__Lösning__

$q = x^T A x$ där $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

Egenvärden:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer:

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Enl. sats 4.10

$$2 \leq \frac{x^T A x}{x^T x} \leq 14$$

$x^T x = 9 \Rightarrow \quad 18 \leq x^T A x \leq 126$

Enl satsen antas maximum för $x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ så att

$\|x\|_2 = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Minimum antas för $x = \xi_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

så att $\|x\|_2 = 3$

dvs $\|x\|_2 = 5\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2$

dvs för (ξ_1, ξ_2) så att $5\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2 = 9$

en ellips! ■

__Kap 5 System av diffekv__

$x' = A(t)x + f(t)$

__Ex__ Åter till mekanikexempel 4.12

Rörelseekv $\quad x'' = Ax \rightarrow x' = \tilde{A}x$

$\qquad x \in R^2 \qquad x \in R^4$

Generell teknik: Låt $x_3 = x_1'$, $x_4 = x_2'$

Då gäller: $x_3' = x_1''$, $x_4' = x_2''$

Utökat system:

$$\begin{pmatrix} x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = x_4 \\ x_3' = -\frac{k_1+k_2}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_2} x_2 \\ x_4' = \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2}{m_2} x_2 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{A} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Teori: Sats 5.1 - 5.4.

Sats 5.2-5.4, bra repetition på grunderna om linjära rum, linjärt beroende/oberoende, bas, dimension.

Dynamiska system

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} , \quad x = x(t)$$

$A^{n\times n}$. Anta att vi har n st linj ober egenvektorer. Då kan vi diagonalisera

$$T^{-1}AT = D, \quad T = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Variabeltransf. $z = T^{-1}x \iff x = Tz$

$$x' = Ax \implies z' = T^{-1}x' = T^{-1}Ax = T^{-1}ATz = Dz$$

Separabel lösning:
$$\begin{cases} z_1' = \lambda_1 z_1 \\ z_2' = \lambda_2 z_2 \\ \vdots \\ z_n' = \lambda_n z_n \end{cases}$$

med lösning $\begin{cases} z_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ z_n = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$

Återtransformation: $x = Tz = z_1 u_1 + z_2 u_2 + \ldots + z_n u_n$

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} u_n \quad (*)$$

Ex ö. 180 $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 4x_3(t), & x_1(0) = 4 \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) - x_3(t), & x_3(0) = 0 \end{cases}$

$x' = Ax,$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Enligt (*) är lösningen

$$x(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ger linj ekv för $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 2 \\ -5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = 2e^{3t} + 5/3\, e^{-2t} + 1/3\, e^{t}$$

$$e^{-3t} x_1(t) \longrightarrow 2 \text{ då } t \longrightarrow \infty$$

<u>Ex 5.2</u> $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Lösning enl (*)

$x(t) = c_1 e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ godtagbar lösning

$z = x + iy$, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (eulers formler)

$x(t) = c_1 e^t(\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^t(\cos(-2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\vdots$

Matrisexponentialfunktionen

Den skalära ekvationen $x' = ax$ har lösning $x = e^{at} = \{\text{Taylor}\}$
$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k t^k$

Hur skulle man kunna skriva lösningen till $x' = Ax$ som
$x = e^{At}$?

<u>Def</u> $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$

<u>Anm</u>. Likformig konv hos potensserier.

Om A är diagonaliserbar kan vi beräkna e^{tA} så här:

$T^{-1}AT = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $A = TDT^{-1}$. $A^k = TD^kT^{-1}$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k T D^k T^{-1} = T\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k D^k\right] T^{-1} =$$

$$= Te^{tD}T^{-1} \quad \text{där } e^{tD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k D^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

185 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = TDT^{-1}, \quad e^{tA} = Te^{tD}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2e^{t} - e^{t} & -e^{t} + e^{-t} \\ 2e^{t} - 2e^{-t} & -e^{t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$\uparrow \qquad \uparrow$

Vi ser att dessa två är lösningar till problemet $X' = AX$.

kontrollera gärna detta!

Klara med Holmåker!

Singulärvärdesuppdelning Heat 3.6

Singulära värden är $\sqrt{\text{egenvärden till } A^TA}$

<u>Tillämpningar</u>: Minsta-kvadrat. Avskilja signaler från brus. Komprimering av information (bonusuppg 9). Modellreduktion. Informationssökning. Bästa appr. av matris.

<u>MATLAB</u>: svd, singulärvärdesuppd.

<u>Anm</u>: Spektralsatsen: Symmetrisk matris A

$$A = TDT^{-1} = TDT^T, \quad T \text{ ortogonal. diagonalisering.}$$

Svd är generalisering av spektralsatsen till en godtycklig matris.

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \; m \geq n, \; \text{rang}(A) = r, \quad A = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} \; & \; \end{bmatrix}}^{r}}_{n} \; m$$

$$\text{SVD:} \quad A = U\Sigma V^T = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{U_1}_{r} & U_2 \end{bmatrix}}_{m\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{r\times r}{\Sigma_r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}}_{n\times n} \begin{matrix} \}\, r \\ \; \end{matrix} \qquad (*)$$

U och V är ortogonala

$$\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r), \text{ singulära värden}$$

ordnade $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$.

kolonnerna i U: vänstersingulära vektorer

– " – V: höger – " –

Från $(*)$ får vi kompakt svd:

$$A = U_1 \Sigma_r V_1^T$$

Obs! Vi har många ekvationssystem med samma matris.

$PA = LU$ en gång.

varje iteration löser vi nedåt- och uppåt triangulära syst.

Invers iteration med skift

Potensmetoden på $(A-\sigma I)^{-1}$, σ skift, beräknar dominerande egenpar till $(A-\sigma I)^{-1}$, som motsvarar det egenvärde till A som ligger närmast σ.

Anm: Egenvärdena till $(A-\sigma I)^{-1}$ är $(\lambda_j-\sigma)^{-1}$ och om $|\lambda_i-\sigma| < |\lambda_j-\sigma|$, $j \neq i$ så är $(\lambda_i-\sigma)^{-1}$ dominerande.

Algoritmen för invers iteration med skift

$x^{(0)}$ start

$P(A-\sigma I) = LU$

$$\left.\begin{aligned} Lz^{(i)} &= Px^{(i)} \\ Uy^{(i+1)} &= z^{(i)} \\ x^{(i+1)} &= y^{(i+1)} / \| y^{(i+1)} \| \end{aligned}\right\} \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

$\lambda_{k+1} = x^{(k+1)^T} A x^{(k+1)}$ Rayleigh-kvoten

Rayleigh-kvot iteration

variera skiftet genom iterationerna

$\sigma_i = (x^{(i+1)})^T A x^{(i+1)}$ och

$P(A-\sigma_i I) = LU$

dvs faktorisering görs om.

En utveckling av R-kvot iteration är Lanczos metod, se bonusuppg 10.

Deflation

för fallet $\{v_i\}$ ON-bas. speciellt då A symmetrisk.

Matrisen $A_2 = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$ har egenvärdena $0, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$

och egenvektorerna oförändrade.

Bevis $A_2 v_1 = A v_1 - \lambda_1 v_1 \underbrace{v_1^T v_1}_{=1} = \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 = 0$

$j \neq 1 \quad A_2 v_j = A v_j - \lambda_1 v_1 \underbrace{v_1^T v_j}_{=0} = \lambda_j v_j$

Parentes (fråga):

$x^{(0)} =$

$x^{(1)} = A x^{(0)}$

$x^{(2)} = A(Ax^{(0)}) = A^2 x^{(0)}$

$\vdots$

$x^{(n)} = A^n (x^{(0)})$ potens av A

Anta nu att $|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Då kan vi tillämpa potensmetoden på A_2 och bestämma egenpar $\{\lambda_2, v_2\}$

A_2 behöver inte beräknas explicit, vi behöver $A_2 *$ vektor, dvs $A_2 *$ vektor och $\lambda_1 v_1 \underbrace{v_1^T * \text{vektor}}_{\text{skalär}}$

dvs en skalär $*$ vektor.

Invers iteration

Om $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_{n-1}| \underset{\uparrow}{>} |\lambda_n|$ så kan $\{\lambda_n, v_n\}$ beräknas med potensmetoden på A^{-1}, som ju har egenvärdet λ_i^{-1}, med $|\lambda_n^{-1}|$ störst. Vi behöver inte bestämma inversen.

Vi ska beräkna $y^{(i+1)} = A^{-1} x^{(i)} \Leftrightarrow A y^{(i+1)} = x^i$

dvs vi löser ekv.system i varje iteration.

Numerisk lösning av egenvärdes-problem, Heath 4.5

$A v_i = \lambda_i v_i\,,\quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad A \in R^{n \times n}$

$\{\lambda_i, v_i\}$ egenpar.

Anta $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$

$\{v_i\}_{i=1}^{n}$ är bas i R^n

(speciellt om A är diagonaliserbar)

Potensmetoden (Power method)

$x^{(0)}$ startapproximation

Idé: $A x^{(0)} \to x^{(1)}$, $A x^{(1)} \to A x^{(2)}, \ldots$

Anta $x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ med $\alpha_1 \neq 0$

Iterera: $y^{(i+1)} = A x^{(i)}$

Normera: $x^{(i+1)} = y^{(i+1)} / \| y^{(i+1)} \|$, $i = 0, 1, \ldots, k$

Konvergens: $x^{(i+1)} \longrightarrow v_1 / \|v_1\|$, $i \to \infty$

Övning: Visa detta! Ledning: Använd antagandet.

Bryt ut λ_1^i.

Som approximation till λ_1 kan vi då ta

$$\lambda^{(k+1)} = \left(x^{(k+1)}\right)^T A x^{(k+1)} \qquad (*)$$

Förklaring: Om $Ax = \lambda x$ så gäller ju

$$x^T A x = \lambda x^T x \quad \text{dvs} \quad \lambda = \frac{x^T A x}{x^T x}$$

kvoten kallas Rayleigh-kvot.

Anm: i $(*)$ finns inte nämnaren med eftersom $x^{(k+1)}$ normerad.

Datoraritmetik flyttalsaritmetik

$1,234 \cdot 10^4$

$5,678 \cdot 10^{-5}$

bas antal siffror

Flyttalssystem (β, t, L, U)

lägsta exp högsta exp.

innehåller tal på formen

$\boxed{x = m\beta^e}$ där $m = d_0 . d_1 d_2 \ldots d_{t-1}$ (mantissa)

$0 \leq d_i < \beta \quad , i = 1, \ldots, t-1$

normalisering: $0 < d_0 < \beta$ dvs $1 \leq |m| < \beta$

<u>Obs!</u> $\beta = 2 \Rightarrow d_0 = 1$, behöver inte lagras.

"underflow", för litet tal, gräns β^L, minstär $(1,000 \cdot 10^L)$

"overflow", för stort tal, gräns $\beta^{U+1}(1-\beta^{-t})$

"gradual underflow"

tal mellan 0 och β^L kan lagras men med sämre precision $(0,012 \cdot 10^L)$

Speciella talvärden: Inf - "oändlighet", 1/0

NaN - "not a number", 0/0

<u>IEEE-standard</u>

enkel precision: $(2, 24, -126, 127)$

dubbel precision: $(2, 53, -1022, 1023)$ -standard

<u>kancellation</u>, nogrannhetsförlust vid subtraktion mellan två nästan lika stora tal

dvs $\delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_k}(\hat{x})\delta x_k = \nabla f(\hat{x})^T \delta x$

<u>Ex</u> $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$

felfortplantningsformeln:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \delta y = \frac{1}{y}\delta x - \frac{x}{y^2}\delta y = \frac{y\cdot \delta x - x\delta y}{y^2}$$

dvs $\frac{\delta f}{f} = \underbrace{\frac{\delta x}{x}}_{\text{relativt fel } x} - \underbrace{\frac{\delta y}{y}}_{\text{relativt fel } y}$

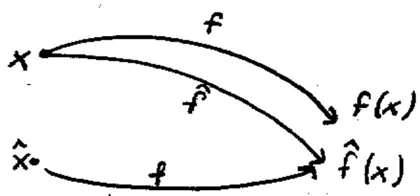
relativa felen för täljare och nämnare subtraheras. ■

<u>Övning</u> Vad gäller för $f(x,y) = x\cdot y$?

<u>Framåt- och bakåtfel</u>

Om f approximeras med $\hat{f}$.

<u>Framåtfel</u> i x : $\hat{f}(x) - f(x)$



Låt nu $\hat{x}$ definieras av att $f(\hat{x}) = \hat{f}(x)$

Då är <u>bakåtfelet</u>: $\hat{x} - x = f^{-1}(\hat{f}(x)) - x$

<u>Ex</u> $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ nära noll.

För $x = 0,1$ är framåtfelet:

$1 - \frac{0,1^2}{2} - \cos(0,1) = -4,16\cdot 10^{-6}$

och bakåtfelet: $\arccos(1 - \frac{0,1^2}{2}) - 0,1 = 4,17\cdot 10^{-5}$

Felfortplantningsformeln

$$|\delta V| \lesssim |V'(\hat{r})|\,|\delta r| \lesssim 4\pi\hat{r}^2 \cdot \hat{r} \cdot 0{,}01 = 4\pi\hat{r}^3 \cdot 0{,}01$$

$$\frac{|\delta V|}{|V|} \lesssim \frac{4\pi\hat{r}^3\, 0{,}01}{\frac{4}{3}\pi\hat{r}^3} = 3 \cdot 0{,}01 = 0.03$$

<u>Svar</u>: 3 % osäkerhet. ∎

Om $f'(\hat{x})$ är nära noll duger inte formeln. Man får ta med fler termer i Taylorutvecklingen.

$$f(\hat{x}) - f(x) = f'(x)(\hat{x}-x) + f''(\xi)\frac{(\hat{x}-x)^2}{2}$$

<u>Ex</u> $f(x) = x^2 + 2x - 1$

Antag att x kan bestämmas med 1 % osäkerhet. Hur noggrant kan $f(-1)$ bestämmas?

<u>Lösning:</u> $f'(x) = 2x+2$, $f'(-1) = 0$

$f''(x) = 2$

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq 0{,}01 \qquad \delta f = f''(\xi)\frac{(\hat{x}-x)^2}{2} \approx f''(\hat{x})\frac{\delta x^2}{2} = \delta x^2$$

$$|x| = 1 \Rightarrow |\delta x| \leq 0{,}01 \Rightarrow |\delta f| \leq 10^{-4}$$

$$f(-1) = -2 \Rightarrow \frac{|\delta f|}{|f|} \lesssim 0{,}5 \cdot 10^{-4}$$

<u>Felfortplantning – flera variabler</u>

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\delta x = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix}$$

$$\delta f = f(\hat{x}) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x + \theta\delta x)\,\delta x_k, \quad 0 < \theta < 1$$

Ex: $x = 0{,}01234 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-5} = \hat{x} \pm 0{,}5 \cdot 10^{-5}$

$\hat{x}$ har 5 korrekta decimaler och 4 signifikanta siffror.

$\hat{\pi} = 3{,}1416$ är angivet med 4 korrekta decimaler

5 signifikanta siffror.

Felfortplantning - en variabel

$x = \hat{x} - \delta x$

Vad händer om vi använder $\hat{x}$ i stället för x i en beräkning?

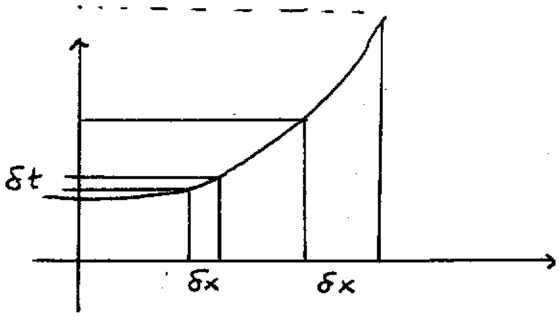
$f(\hat{x})$?

Taylorutveckling: $f(\hat{x}) - f(x) = f'(\xi)(\hat{x} - x) \quad \xi \in int(\hat{x}, x)$

dvs $\delta f = f(\hat{x}) - f(x) = f'(\xi)\,\delta x$

eller approximativt

$$\boxed{\delta f \approx f'(\hat{x})\,\delta x}$$



Ex Vi vill bestämma volymen hos en sfär med radien r, bestämd med 1% osäkerhet. Hur stor blir osäkerheten i volymbestämningen?

Lösning $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V(r) = 4\pi r^2$

Förutsättning: $\frac{|\delta r|}{|r|} \le 0{,}01$, dvs $|\delta r| \lessapprox \hat{r} \cdot 0{,}01$

Pseudoinversen $A^+ = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{-1} v_i u_i^T$

minsta-kvadratlösning $x = A^+ b = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{-1} v_i u_i^T b$
$(Ax+b)$

Trunkerad pseudoinvers: $A_k^T = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{-1} v_i u_i^T$ se bonus. 8.

Bästa approximation av matris

Den närmaste matrisen av rang=k till A är A_k och felet är $\| A - A_k \|_2 = \sigma_{k+1}$

Tillämpning: Bildkomprimering, bonus 9.

Kap 1 i Heath

Felanalys och datoraritmetik

Definitioner och beteckningar

a exakt värde

$\hat{a}$ approximation av a.

absoluta felet: $\delta a = \hat{a} - a$

relativa felet: $\frac{\delta a}{a} \approx \frac{\delta a}{\hat{a}}$

Om $|\delta a| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-t}$ så har $\hat{a}$ t korrekta decimaler.
Siffran i pos 10^{-t} är då signifikant, liksom alla siffror innan den positionen, inledande nollor ej räknade.

dvs $\| b-Ax\|_2^2$ minimeras om $c_1 = \Sigma_r z_1$

dvs $z_1 = \Sigma_r^{-1} c_1$ och då är $\|b-Ax\|_2 = \|c_2\|_2$

Vi kan nu välja z_2 så att $\|x\|_2$ minimeras.

Det gäller $\|x\|_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{invariant}}}{=} \|z\|_2^2 = \|z_1\|_2^2 + \|z_2\|_2^2$ och blir

minst om $z_2 = 0$

Lösningen blir $\underline{x} = Vz = V_1 z_1 + V_2 \overset{\to 0}{z_2} = V_1 z_1 = V_1 \Sigma_r^{-1} c_1 =$

$$= V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b = \underline{x} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{-1} v_i u_i^T b$$

Om vi nu inför pseudoinversen: $A^+ = V_1 \Sigma_r^{-1} U^T$

kan vi skriva $x = A^+ b$

Vanligt ekv. syst. $Ax = b$ skrivs $x = A^{-1} b$

Överbest. ekv. syst. $Ax = b$ skrivs $x = A^+ b$

Speciellt om A har full rang så är

$$\boxed{A^+ = (A^TA)^{-1}A^T}$$

enl. normalekvationerna.

SVD (repetition)

$$A = U\Sigma V^T = U_1 \Sigma_r V_1^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma v_i^T u_i, \quad U_1 = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_r \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix} \qquad V_1 = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_r \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Trunkerad SVD

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_r \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \ldots + \sigma_r u_r v_r^T$$

mindre och mindre termer.

Anm $A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T \underbrace{U^TU}_{I} \Sigma V^T =$

$= V\Sigma^T\Sigma V^T$

där $\Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & & \\ & \sigma_2^2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r^2 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$ spektralsatsen. σ_i^2 är egenvärden till A^TA.

Anm: $A : R^n \to R^m$

$\exists$ ON-baser V i R^n och U i R^m så att avbildningen representeras av diagonal matris Σ ∎

SVD för minsta-kvadrat

$\min_x \|Ax-b\|_2$.

Ej entydig lösning om $r<n$

SVD tar fram lösningen med minsta norm $\|x\|$.

Låt $z = V^Tx = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $c = U^Tb = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$\|b-Ax\|_2^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{invariant}}}{=} \|U^T(b-Ax)\|_2^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SVD} \\ A=U\Sigma V^T \\ U^TA=\Sigma V^T}}{=} \|U^Tb - \Sigma V^Tx\|_2^2 =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} c_1 - \Sigma_r z_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

Lånaföreläsning 20/5-2002

Begynnelsevärdesproblem för ode

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$(T) \quad \begin{cases} y' = \lambda y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

(i) Kontrollera nogrannheten (approximationsordningen) hos metoder

(ii) Undersöka stabiliteten hos metoden.

En <u>metod</u> är <u>stabil</u> för en viss steglängd h, om den ger begränsade lösningar tillämpad på testekvationen (T) med $\lambda < 0$

<u>Ex</u> Euler framåt på (T)

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k = (1 + h\lambda) y_k$$

Approximationerna y_{k+1} ~~[illegible]~~ begränsade om $|1 + h\lambda| \leq 1$

För $\lambda < 0$ ger detta att $h\lambda \geq -2$ dvs $h \leq \frac{-2}{\lambda}$

För stort negativt λ måste h väljas litet.

<u>Anm</u> Vid system $y' = Ay$ så måste $h \leq -\frac{2}{\lambda_i}$ för alla egenvärden λ_i till A. Speciellt vid <u>styva problem</u> dvs med olika storleksordning hos egenvärdena, blir Euler framåt ineffektiv.

Implicita metoder har bättre stabilitetsegenskaper än explicita. Euler bakåt och trapetsmetoden är A-stabila (samma stab egenskap som problemet). Men implicita metoder besvärligare, man måste i allmänhet lösa ett ickelinjärt ekv.syst. i varje steg. För startapproximation kan man använda en explicit metod, typ Euler framåt.

Ex $y' = -y^2, \quad y(0) = 1$

Bestäm $y(0,1)$ approximativt

Startmetod (prediktor)

Euler framåt, $h = 0,1$.

$y_1 = y_0 + h(-y_0^2) = 1 + 0,1(-1) = 0,9$

som korrektor tar vi trapetsmetoden

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[-y_0^2 - y_1^2\right]$

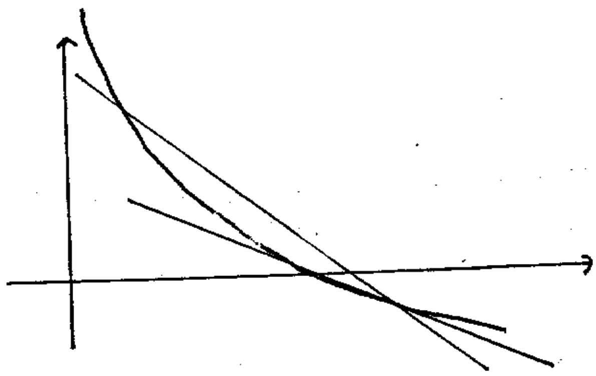
fixpunktsiteration (funkar alltid, och för mycket taskigare problem)

$y_1^{(0)} = 0,9$ från prediktorn.

$y_1^{(1)} = 1 + \frac{0,1}{2}\left[-1 - 0,9^2\right] = 0,9095$

$y_1^{(2)} = 1 + \frac{0,1}{2}\left[-1 - 0,9095^2\right] = 0,9086$

$y_1^{(3)} = 1 + \frac{0,1}{2}\left[-1 - 0,9086^2\right] = 0,9087$ ■



Sekantmetoden konvergerar

superlinjär, $q = 1{,}618$

<u>Funktionskänslighet, feluppskattning</u>

Låt $\delta x = \hat{x} - x^*$ $\quad \hat{x}$ approx, x^* exakt rot

$f(x^*) = 0$

Taylorutveckling kring x^*:

$$f(\hat{x}) = f(x^* + \delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) =$$

$$= 0 + f'(x^*)\delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) \approx f'(x^*)\delta x$$

$$\Rightarrow \delta x \approx \frac{f(\hat{x})}{f'(x^*)} \approx \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})}$$

<u>Obs!</u> Gäller vid enkelrot. Vid multipelrot: Ta med fler termer i T-utvecklingen.

$$\Rightarrow (\delta x)^m \approx m! \frac{f(\hat{x})}{f^{(m)}(\hat{x})}$$ om multipliciteten är m.

Åter till enkelrot!

Vi har fått en metodoberoende feluppskattning.

$$\boxed{|\delta x| \lesssim \frac{|f(\hat{x})|}{|f'(\hat{x})|}}$$

Dividera med $f'(x^{(k)}) \neq 0$

$$0 = \underbrace{\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} - x^{(k)}}_{=-x^{(k+1)}} + x^* + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x^{(k)})}(x^* - x^{(k)})^2$$

enl. Newtons metod.

dvs $$x^{(k+1)} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x^{(k)})}(x^* - x^{(k)})^2$$

och $$\frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi_k)}{f'(x^{(k)})}\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left|\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\right| = C < \infty$$

ok för enkelrot.

$q = 2$, dvs Newtons metod konvergerar kvadratiskt för enkelrot.

För multipelrot är Newtons metod linjärt konvergent ($q = 1$) med felkonstant $C = \frac{m-1}{m}$

En variant på Newtons metod som inte kräver derivator är sekantmetoden

Derivatan approximeras med differenskvot.

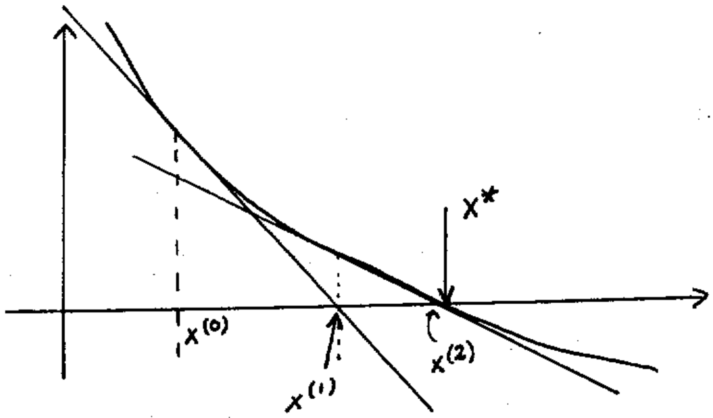
$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

jfr derivatans definition.

<u>sekantmetoden</u>: $$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})\frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$$

Vi behöver två startapproximationer, $x^{(0)}$, $x^{(1)}$.

Newtons metod



analytiskt (linjärisering med Taylor)

$x^{(0)}$ approximation, linjärisera f kring $x^{(0)}$

$$f(x) \approx f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)})$$

Linjär modell: I stället för den icke-linjära ekvationen $f(x) = 0$ löser vi den linjära ekvationen

$$f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0$$

och låt lösningen bli nästa approximation $x^{(1)}$!

Linjära ekv. har lösningen

$$x = x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

Newtons metod: $\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$

Konvergent om $x^{(0)}$ tillräckligt nära x^*

Konvergensordning för Newtons metod:

Taylorutveckling kring $x^{(k)}$

$$0 = f(x^*) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^* - x^{(k)}) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x^* - x^{(k)})^2$$

$\xi_k \in \mathrm{int}(x^*, x^{(k)})$

ICKE-LINJÄRA EKVATIONER kap 5 i Heath

problem : $f(x)=0$, $f: R \rightarrow R$

Def En rot till ekvationen $f(x)=0$ är en enkelrot om $f'(x^*) \neq 0$, annars multipelrot. Om $f'(x^*) = f''(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$ men $f^{(m)}(x^*) \neq 0$ så är multipliciteten $= m$.

Multipliciteten har betydelse för

- hur noggrant roten kan bestämmas
- hur snabbt roten kan bestämmas.

Iterationsmetoder:

$x^{(0)}$ startapproximation

$x^{(1)} = \text{formel}(x^{(0)})$

$x^{(2)} = \text{formel}(x^{(0)}, x^{(1)})$

Om $x^{(k)} \rightarrow x^*$ konvergens

Konvergensordning

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^k - x^*|^q} = C < \infty$$

Största möjliga q är konvergensordningen.

C kallas asymptotiska felkonstanten

Om $q = 1$ så linjär konvergens

$q > 1$ så superlinjär

$q = 2$ kvadratisk.

$fl(a+b) = -0{,}004 \cdot 10^4 = -4{,}000 \cdot 10^1$

$fl(fl(a+b)+c) = fl(-4{,}000 \cdot 10^1 + 3{,}456 \cdot 10^1) =$

$-0{,}544 \cdot 10^1 = -5{,}440 \cdot 10^0$

$fl(a + fl(b+c)) = fl(9{,}876 \cdot 10^4 + [-9{,}880 + 0{,}003456] \cdot 10^4)$

$= fl([9{,}876 - 9{,}877] \cdot 10^4) = -0{,}001 \cdot 10^4 = -1{,}000 \cdot 10^1$

kancellation

Framåt och bakåtfel

Ex: Algoritmen $y = a \cdot x + b$

a) framåtanalys. uppskattar felet

$|fl(ax+b) - ax - b|$

$fl(ax) = (1+\varepsilon_1)ax$

(*) $fl(ax+b) = (1+\varepsilon_2)[(1+\varepsilon_1)ax + b] = (1+\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2)ax +$

$+ (1+\varepsilon_2)b$

med $|\varepsilon_i| \le \mu$

$fl(ax+b) - (ax+b) = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)ax + \varepsilon_2 b$

$|fl(ax+b) - (ax+b)| \le 2\mu|ax| + \mu|b| + \mathcal{O}(\mu^2)$

b) Bakåtanalys, relaterar felet "bakåt" till indata.

Används för att avgöra om algoritmen är stabil

En algoritm är stabil om bakåtfelet är litet.

(*) $fl(ax+b) = \underbrace{(1+\varepsilon_2)a}_{\hat{a}} \cdot \underbrace{(1+\varepsilon_1)x}_{\hat{x}} + \underbrace{(1+\varepsilon_2)b}_{\hat{b}} = \hat{a}\hat{x} + \hat{b}$

där $\hat{a} = (1+\varepsilon_1)a$

$\Rightarrow \dfrac{\hat{a} - a}{a} = \varepsilon_2$ dvs $\left|\dfrac{\hat{a}-a}{a}\right| \le \mu$

pss $\left|\dfrac{\hat{x}-x}{x}\right| \le \mu$, $\left|\dfrac{\hat{b}-b}{b}\right| \le \mu$ Små bakåtfel $\Rightarrow$ stabil algoritm.

Speciella fenomen

① Kancellation

Ex $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$, $x \neq \pm 1$

för x nära 0. Räkna med 3 siffror.

$x = 0{,}001. \Rightarrow \quad \dfrac{1}{0{,}999} - \dfrac{1}{1{,}00} = 1{,}00 - 1{,}00 = 0$

Kancellation: Nogrannhetsförlust vid subtraktion av två nästan lika stora tal. Ofta kan kancellation undvikas genom omskrivning.

<u>Ex</u>: $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2x}{1-x^2}$

$x = 0{,}001 \Rightarrow \quad \dfrac{2 \cdot 0{,}001}{1{,}00} = 0{,}00200$ (ok)

② Utskiftning

<u>Ex</u>: I exemplet ovan räknade vi ut $1+x$ där $x=0{,}001$ med tre siffror. I datoraritmetiken får vi $x = 1{,}00 \cdot 10^{-3}$. Summering $\Rightarrow$ skifta till största exp.

$1{,}00 + 0{,}001 = 1{,}001 \underset{\text{lagring till flyttal}}{=} 1{,}00$

x har inte påverkat summan pga total utskiftning.

<u>Tips</u>: Summera tal i växande storleksordning begränsar effekten av utskiftning.

<u>Ex</u>: Ordningen mellan operationer har betydelse.

$a = 9{,}876 \cdot 10^4$

$b = -9{,}880 \cdot 10^4$

$c = 3{,}456 \cdot 10^1$

Precision

Det lagrade flyttalet motsvarande x, betecknas $fl(x)$.

Då gäller

$$(*) \quad \frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t} = \mu$$

Ex: $x = 1,234567 \cdot 10^{-5}$

$fl(x) = 1,235 \cdot 10^{-5}, \quad \mu = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$

(*) kan skrivas $fl(x) = x(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq \mu$

gäller för IEEE-standard

Det gäller även för enkla aritmetiska operationer $+, -, *, /, \sqrt{\ }$,

att felet är begränsat av μ, dvs

$$\frac{|x \odot y - fl(x \odot y)|}{x \odot y} \leq \mu$$

eller $fl(x \odot y) = x \odot y(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq \mu$

Ex: Operationer i datorn

systemet $(10, 4, -9, 9)$

$x = 1,234 \cdot 10^{0}, \quad y = 4,567 \cdot 10^{-2}$

a) Bestäm $z = fl(x+y)$ (addition)

$$1,234 \cdot 10^{0} + 4,567 \cdot 10^{-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skift}}}{=} 1,234 \cdot 10^{0} + 0,04567 \cdot 10^{0} =$$

$$= 1,27967 \cdot 10^{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lagring till} \\ \text{flyttal}}}{=} 1,280 \cdot 10^{0}$$

Obs! De arimetiska registren kan hantera fler siffror än t.

b) Bestäm $w = fl(x * y)$ (multiplikation)

$$1,234 \cdot 10^{0} * 4,567 \cdot 10^{-2} = 5,635678 \cdot 10^{-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lagring till flyttal}}}{=} 5,636 \cdot 10^{-2}$$

■

Fixpunktsiteration

Problemet $f(x)=0$ skrivs på form

$$x = g(x)$$

Sedan itererar man såhär:

$$x^{(1)} = g(x^{(0)})$$

$$x^{(2)} = g(x^{(1)})$$

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vid konvergens har vi $x^* = g(x^*)$

x^* kallas då fixpunkt till funkt. $g(x)$.

Fixpunktsiteration konvergerar om

$$\| G(x) \| \leq \mu < 1$$

där $G(x)$ är Jacobianen till $g(x)$ konv. gäller i en omgivning till x^* om $x^{(0)} \in$ omgivningen.

Feluppskattning

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \leq \frac{\mu}{1-\mu} \| x^{(k-1)} - x^{(k)} \|$$

Beviset ingår ej.

sedan framåt - och bakåt - substitution i varje iteration.

LU - $O(n^3)$ ← <u>en</u> gång triang s $O(n^3)$ ← varje iteration.

<u>Men</u> konvergensen endast linjär.

<u>Kvasi - Newton</u>

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ B_k d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$$

Jämför: $B_k = J(x^{(k)})$ klassisk Newton.

$B_k = J(x^{(0)})$ modifierad Newton.

B_{k+1} uppdateras från B_k så att B_{k+1} approximerar $J(x^{(k+1)})$ enligt följande idéer:

① $B_{k+1} d^{(k)} \approx J(x^{(k+1)}) d^{(k)}$ dvs bra appr. i sökriktningen $d^{(k)}$. Vi har från Taylor:

$$J(x^{(k+1)})\, d^{(k)} = J(x^{(k+1)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \approx f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})$$

detta leder till s.k. sekantvillkor

(1) $B_{k+1} d^{(k)} = f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})$

② B_{k+1} oförändrad i riktningar ortogonala mot $d^{(k)}$

(2) $B_{k+1} z = B_k z$, $\forall z$ så att $z^T d^{(k)} = 0$

<u>övning:</u> Visa att följande uppdateringsteknik, Broydens metod uppfyller (1) och (2):

$$B_{k+1} = B_k + \frac{1}{\|d^{(k)}\|_2^2}\left[f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) - B_k d^{(k)}\right](d^{(k)})^T$$

Newtons metod $f(x)=0$

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$$

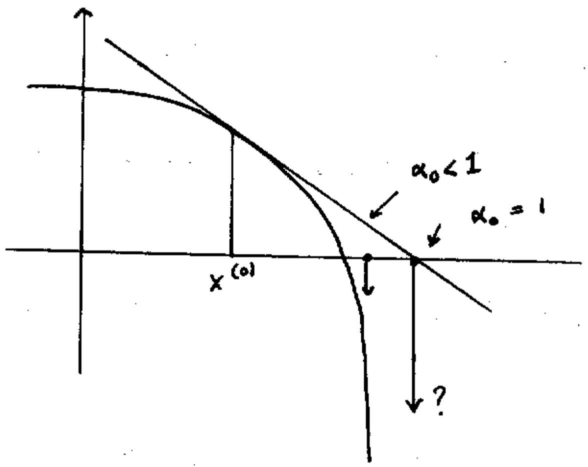
Varianter på Newtons metod. Dämpad Newton, vidgar konvergensområde.

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$

<u>Steglängd</u> $\alpha_k < 1$

väljs så att $\| f(x^{(k+1)}) \| < \| f(x^{(k)}) \|$

Närmare x^* kan man gå över till $\alpha_k = 1$



Modifierad Newton

Inte alla dessa derivator!

$J(x^{(0)})$ eller en approx. av $J(x^{(0)})$ används hela tiden

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(0)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$$

Förutom att räkna ut nya derivator har vi samma matris i varje iteration. Vi LU-faktoriserar <u>en</u> gång och löser

J är singulär i $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

men reguljär i $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $J = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Newtons metod

analytiskt: Taylorutveckling

geometriskt: Funktionsytor approximeras med tangentplan.

Taylorutv. kring approximation $x^{(k)}$

$f(x) \approx f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)})$ linjär modell av $f(x) = 0$

är då $f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0$

detta är ett linjärt ekv. system.

$J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = -f(x^{(k)})$

Vi har då en iteration i Newtons metod.

Man brukar skriva såhär

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}}$$

då är $d^{(k)}$ lösningen till det linjära ekvationssystemet.

$$\boxed{J(x^{(k)})\, d^{(k)} = -f(x^{(k)})}$$

$d^{(k)}$ kallas för sökriktning.

Newtons metod är <u>lokalt konvergent</u>

Newtons metod är <u>kvadratiskt konvergent</u> för reguljär rot.

Heath, övning 5.3

$f(x) = x^2 - y$ för att beräkna $x = \sqrt{y}$

$f'(x) = 2x$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - y}{2x^{(k)}} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{y}{x^{(k)}}\right)$$

Test: $x^{(0)} = 1{,}5$, $y = 2$

$x^{(1)} = 1{,}4167$

$x^{(2)} = 1{,}414215686$

$x^{(3)} = 1{,}4142135623 7469$

$x^{(4)} = 1{,}4142135623 7309$

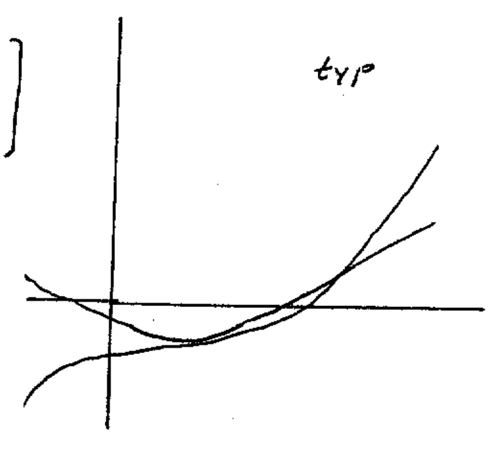
System av ickelinjära ekvationer

$f(x) = 0$, $f: R^n \to R^n$, $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$, $f = \begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix}$

Def En rot, en lösning till $f(x) = 0$, betecknas x^*.
Roten är singulär om Jacobianen $J(x^*) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*)\right]$ är singulär, annars är roten reguljär

Ex: $\begin{cases} x_1^3 - x_2 - 1 = 0 \\ x_1^2 - x_2 - 1 = 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 - x_2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 - 1 \end{pmatrix}$ $J(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix}$



$f(\ ) = 0$ har lösningarna $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och

$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

En linjär modell av vårt problem

$\min_x \|f(x)\|_2^2$ blir då

$$\min_x \|f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)})\|_2^2$$

$$\|b + Ax\|_2^2$$

Detta är ett överbestämt linj. ekv. syst. som alltså ska lösas i varje iteration. Metoden kallas

<u>Gauss-Newton-metod</u>

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$$ ← <u>överbest.</u> linj. ekv. syst.

Ser ut som Newton men andra metoder används för ekv. lösning, exvis QR-faktorisering

MATLAB fixar detta med \. (backslash)

<u>GN:</u> Lokalt konvergent som vanligt Newton

Men linjärt konvergent (endast)

Konjugerad gradient (på samma problem)

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ enl. St. Desc.

$$\beta_1 = \frac{\| \nabla f^{(1)} \|_2^2}{\| \nabla f^{(0)} \|_2^2} = \frac{0,01}{1} = 0,01$$

$$d^{(1)} = -\nabla f^{(1)} + \beta_1 d^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,1 \end{pmatrix} + 0,01 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{(\nabla f^{(1)})^T d^{(1)}}{(d^{(1)})^T H d^{(1)}} = -\frac{-0,01}{0,009} = \frac{10}{9}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d^{(1)} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x^*$$

Icke linjära minsta-kvadratproblem H 6.6

$f(x) = 0$, $f : R^n \to R^m$

$m > n$, överbestämt

minsta-kvadratlösning : $\min_x \|f(x)\|_2$

(speciell typ av minimering)

Jämför Newtons metod för ekv. lösn.

$f(x) = 0$, $f : R^n \to R^n$ $\Rightarrow$ i varje iteration löses ett linj. ekv. syst. med Jacobianen som matris.

Vid överbest system får vi stegvis linjärisering p.s.s.

I varje iteration får vi nu ett överbestämt linjärt ekv. syst.

Taylorutveckling kring approximationen

$x^{(k)}$: $f(x) \approx f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)})$

④ <u>Konjugerad Gradient</u>

$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) + \beta_k d^{(k-1)}$

"metod med minne"

$$\beta_k = \frac{\| \nabla f(x^{(k)}) \|_2^2}{\| \nabla f(x^{(k-1)}) \|_2^2}$$

<u>Egenskap</u>: Om f kvadratisk så blir sökriktningarna parvis <u>konjugerat</u> ortogonala, dvs $(d^{(k)})^T H d^{(j)} = 0 \quad k \neq j$

konjugerat

dvs högst n iterationer, ty n ortogonala vektorer i R^n.

<u>Ex</u> $\min 5x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 - x_1$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 10x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Steepest Descent</u> $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \nabla f^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kvadratisk funktion $\Rightarrow$

$$\alpha_0 = -\frac{(\nabla f^{(0)})^T d^{(0)}}{(d^{(0)})^T H d^{(0)}} = \frac{1}{10},$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \ d^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,1 \end{pmatrix}, \ \alpha_1 = -\frac{(\nabla f^{(1)})^T d^{(1)}}{(d^{(1)})^T H d^{(1)}} = -\frac{-0,01}{0,01} = 1$$

$$x^{(2)} = x' + \alpha_1 d^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ -0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

I specialfallet f är kvadratiskt blir det enkelt (nivåkurvorna är ellipser). Då ges α_k av formeln:

$$x_k = \frac{\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}}{(d^{(k)})^T H d^{(k)}}$$

där H är den konstanta Hessianen.

<u>Bevis</u>: Övning på flervariabelanalys.

<u>Ledning</u>: Sätt $g(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$ och lös $g'(\alpha) = 0$

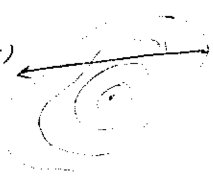
Flerdimensionell minimering

<u>Sökmetoder</u>. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$

α_k med <u>linjesökning</u>.

<u>Val av sökriktning</u> $d^{(k)}$

$d^{(k)}$



1. <u>Steepest Decent</u>: $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$

2. <u>Newton</u> $d^{(k)}$ väljs som lösning till linj. ekv. system

$$H(x^{(k)})d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

dvs Newtons metod för att lösa ekv. syst.

$$\nabla f(x^{(k)}) = 0$$

3. <u>Kvasi-Newton</u>: Ekv. system

$$B_k d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

B_k approx till $H(x^{(k)})$

Broydens uppdateringsmetod ex.vis!

(5) <u>Sekantmetoden</u>

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k-1)})}$$

Enast 1:a derivator.

Flerdimensionell optimering utan bivillkor H. 6.5

<u>Problem</u>: $\min_{x \in R^n} f(x)$; $f: R^n \to R$

<u>Sökmetoder</u>: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$

$d^{(k)}$ kallas <u>sökriktning</u>.

α_k kallas <u>steglängd</u>.

Antag först att $d^{(k)}$ är vald. Hur väljs steglängden α_k?

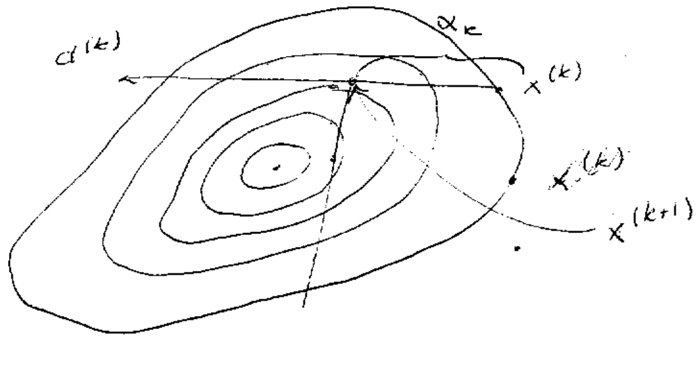
Vi vill välja α_k s.a f minimeras längs den valda sökriktningen.

Detta är ett endimensionellt optimeringsproblem, map α_k.

Problemet kallas Linjesökningsproblemet.

(P_L) : $\min_{\alpha} f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$

<u>Ex</u> Två variabler

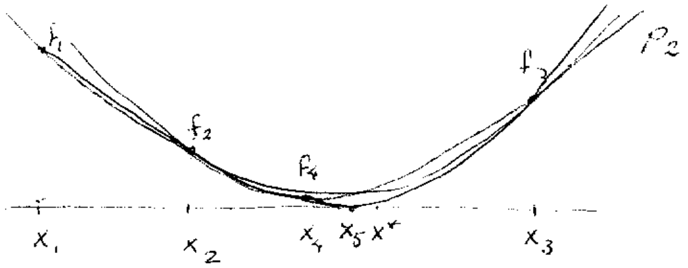


(2) Polynomapproximation, populär i programvara.

Bara f-beräkningar (inga derivator).

Förutsättning: f konvex.

Illustration:



P_2 är interpolationspolynomet till f_1, f_2, f_3. Att minimera P_2, av grad ≤ 2 är enkelt. Låt x_4 vara P_2:s minimum. Byt x_4 mot någon gammal punkt, så att x^* finns mellan de tre nya punkterna.

I illustrationen fortsätter vi med x_2, x_4 och x_3.

(3) Newtons metod: för att lösa $f'(x)=0$.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}, \quad k=0,1,\ldots$$

Kräver 1:a och 2:a derivator.

(4) Modifierad Newton

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{c}, \quad k=0,1,\ldots$$

där c är approximation till $f''(x^{(0)})$. Endast 1:a derivatan behövs.

med $R_T = \mathcal{O}(h^2)$, $h \to 0$

$R_T = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots$ $\Leftarrow$ Taylor

Funktionskänslighet

Centraldifferensen: $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

Osäkerhet i f: $|\delta| \le \varepsilon$

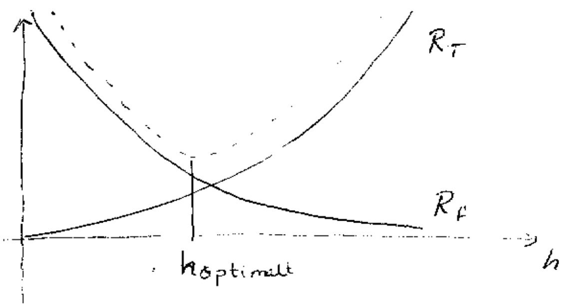
Felet R_f i centraldiff, som beror på detta fel i f,

kan då uppskattas.

$$|R_f| \le \frac{\varepsilon + \varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h} = \mathcal{O}(h^{-1})$$

här blir det konflikt mellan felen R_T och R_f:

Det finns ett bästa h!



Richardson-extrapolation H. 8.7

Förutsättning är att man känner en felutveckling i h-potenser.

För centraldifferensen för förstaderivatan

$$F(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

2 olika steglängder, h och $2h$

$$F(h) = f'(x) + b_1 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

$$F(2h) = f'(x) + 4 b_1 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

Numerisk approximation av derivator   H. 8 6

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$, framåtdifferens

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$, bakåtdifferens

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$, centraldifferens

Trunkeringsfelet kan bestämmas med Taylorutveckling.

Ex. Framåtdifferensen

$$R_T = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \underset{Tay}{=} \frac{1}{h}\Big[\cancel{f(x)} + \cancel{hf'(x)} + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) \dots - \cancel{f(x)}\Big] - \cancel{f'(x)} =$$

$$= \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{6}f^{(3)}(x) + \dots$$

dvs
$$\boxed{\begin{array}{l} R_T = \mathcal{O}(h),\ h \to 0 \\ R_T = a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + \dots \end{array}}$$

pss för centraldifferensen: $R_T = \mathcal{O}(h^2),\ h \to 0$

$$R_T = b_1 h^2 + b_2 h^4 + b_3 h^6 + \dots$$

2:a derivatan kan approximeras med centraldifferensens

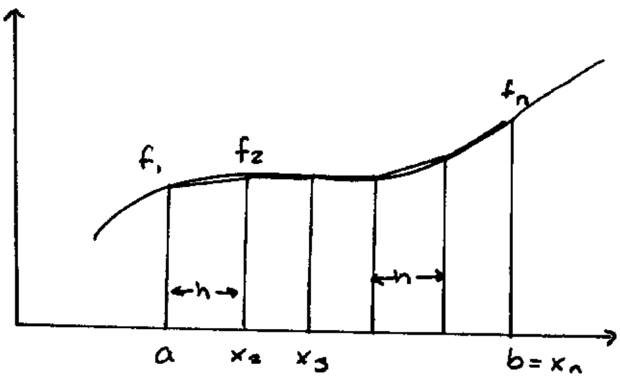
$$f''(x) \underset{\text{framåt}}{\approx} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \underset{\text{bak}}{\approx} \frac{1}{h^2}\Big[f(x+h)-f(x) - \frac{1}{2}f(x) - f(x-h)\Big] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\Big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\Big]$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]$$

Trapetsregeln.

<u>Styckvis linjär interpolation</u>



$$I \approx \frac{h}{2}(f_1+f_2)+\frac{h}{2}(f_2+f_3)+\ldots+\frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n) =$$

$$h\left[\frac{1}{2}f_1+f_2+f_3+\ldots+f_{n-1}+\frac{1}{2}f_n\right]$$

kallas trapetsformeln.

<u>Ex</u> $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2 = 0{,}693147$

Trapetsformeln, $h = \frac{1}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{1.25} + 1\cdot\frac{1}{1{,}5} + 1\cdot\frac{1}{1.75} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right] \approx 0{,}697$$

Man kan visa att felet i trapetsformeln uppfyller

$$\int_a^b p_1(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

pol. av grad 1.

Numerisk beräkning av integraler, kap 8 i Heath

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{w_i}_{\text{vikter}} \, f(\underbrace{x_i}_{\text{punkter}})$$

kallas kvadraturformel.

Varför numeriska metoder

- $f(x)$ har ingen känd primitiv funktion, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$
- $f(x)$ ej explicit given men kan beräknas för godt. x med t.ex datorprogram.
- f given i en tabell för vissa givna x-värden.
- den analytiska metoden har numeriska svårigheter

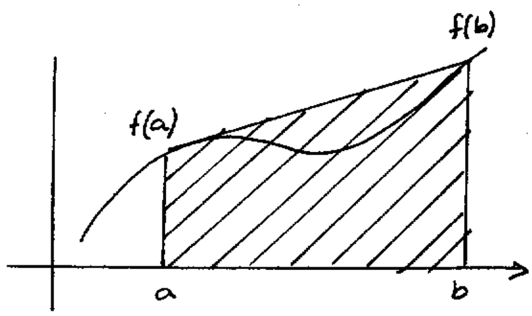
Ex $\quad I = \int_{999}^{1000} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1000) - \arctan(999)$

ger kancellation.

Grundidé för konstruktion av kvadraturformel.

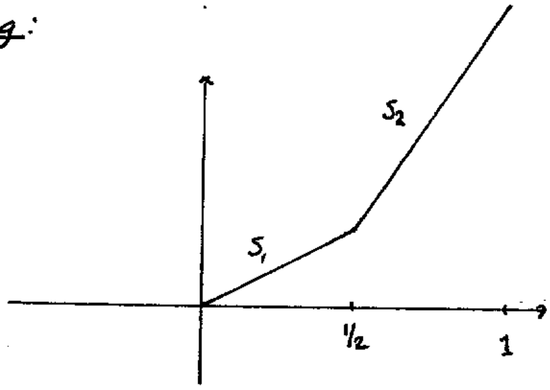
Approximera f med $\hat{f}$, där $\hat{f}$ är enkel funktion t.ex. polynom, trigonometriska, exp, log .... och integrera $\hat{f}$.
Vi använder endast polynom eller styckvisa polynom (splines).

Ex Linjär interpolation



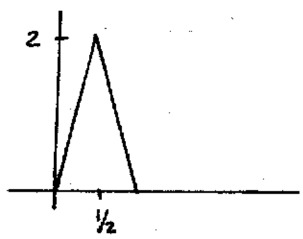
Ex. Bestäm den linjära spline som intepolerar $y(t)=t^2$ i $0, \frac{1}{2}, 1$.

Lösning:



$$s(t) = y(0)B_0'(t) + y(\tfrac{1}{2})B_1'(t) + y(1)B_2'(t) = \frac{1}{4} B_1'(t) + 1\cdot B_2'(t)$$

$$B_1'(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1/2 \\ 2-2t, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

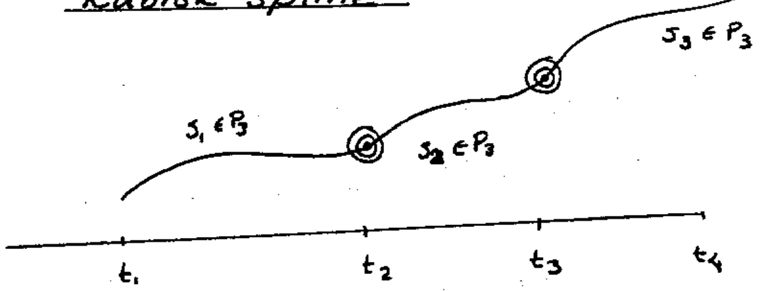


$$B_2'(t) = -1+2t, \quad \frac{1}{2} \le t \le 1$$

Vi får

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot 2t = \frac{1}{2}t, & 0 \le t \le 1/2 \qquad (s_1) \\ \frac{1}{4}(2-2t) + 1(-1+2t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \qquad (s_2) \end{cases}$$

Kubisk spline



Antal parametrar: 4 st per spline

totalt: $4(n-1)$ param.

Antal villkor: 3 per inre nod $3(n-2)$

Vi har alltså $n+2$ villkor kvar att utnyttja

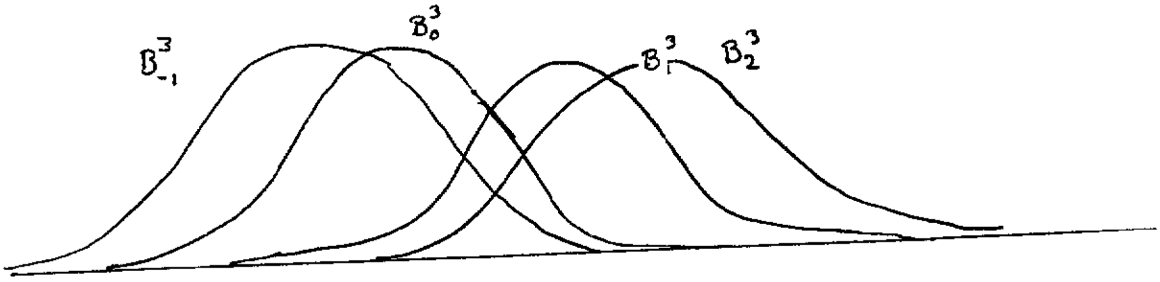
Om vi använder splinen till interpolation i de n punkterna så har vi 2 villkor kvar. Man brukar ta dessa som olika ändpunktsvillkor.

- naturlig spline: $s''(t_1) = s''(t_n) = 0$
- rätta randvillkor: $s'(t_1) = y'(t_1)$, $s'(t_n) = y'(t_n)$
- periodiska randvillkor: $s'(t_1) = s'(t_n)$, $s''(t_1) = s''(t_n)$

Man kan använda splinen till annat än interpolation, t.ex anpassning i minsta-kvadrat-mening till givna data.

Basfunktioner via kubiska splines.

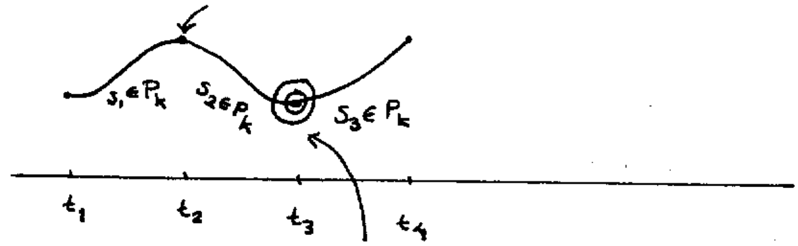
B-spline ($B \sim$ Bell-shaped)



Splines, avsnitt 7.4 i Heath

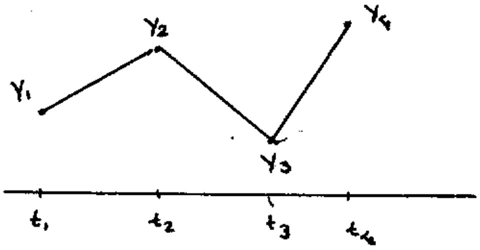
Def. En spline är ett styckvis av grad k med derivator av ordning k-1 kontinuerliga i knutpunkterna, de inre noderna.

$s_1^{(j)} = s_2^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$



en ring för varje derivata

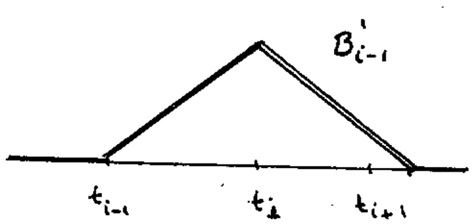
Vanliga splines är $k=1$, linjära, och $k=3$, kubiska.



Linjär spline

Vi kan skriva $s(t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i B_{i-1}^{1}(t)$ där $B_{i-1}^{1}(t)$ är splinens basfunktioner.

$$B_{i-1}^{1}(t_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

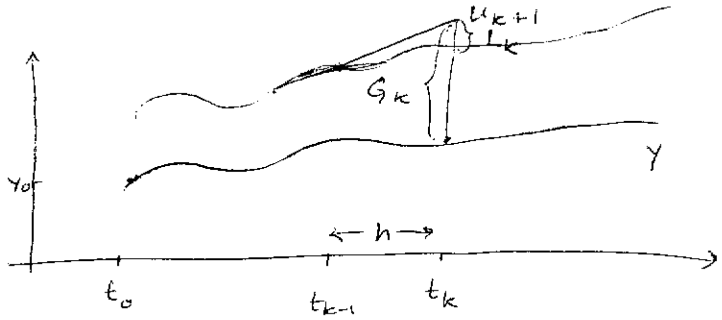


Viktiga begrepp

Lokalt fel

$L_k = y_k - u_{k-1}(t_k)$

där u_{k-1} är den lokala lösningen



Globalt fel $G_k = y_k - y(t_k)$

Om lokala felet är av ordning $O(h^{p+1})$ så är

metoden av ordning p.

Tumregel Lokala felet bestäms genom att tillämpa metoden på testproblemet

$$(T) \quad \begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = c \end{cases} \qquad \text{med lösning } y(t) = c^{\lambda t}$$

och kontrollera till vilken ordning i h som den numeriska metoden approximeras den exakta lösningen.

Ex Euler framåt på (T)

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda \cdot y_k = (1 + h\lambda) y_k$$

tillväxtfaktorn $1 + h\lambda$ jämförs med exakta lösningens tillväxtfaktor

$$e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6}$$

Stämmer med två termer och felet $O(h^2)$ dvs Euler framåt av ordning 1.

$$\Rightarrow \quad y(t+h) = y(t) + h y'(t)$$

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$$

Med bakåtdifferens av derivatan får vi

$$y'(t) \approx \frac{y(t) - y(t-h)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y(t-h) + h y'(t)$$

dvs $y_k = y_{k-1} + h f(t_k, y_k)$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1})}$$ Euler bakåt

Annan teknik att ta fram ode-metoder: Integrering

$$y' = f(t, y)$$

integreras över intervallet (t_k, t_{k+1})

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,dt$$

Approximera integralen med trapetsregeln:

$$\boxed{y(t_{k+1}) - y(t_k) = \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]}$$

kallas trapetsmetoden

Euler framåt explicit: givet y_k kan y_{k+1} beräknas "direkt"

Euler bakåt och Trapets är implicita eftersom

y_{k+1} finns i funktionen f i högerledet.

dvs vi får lösa ett icke-linjärt ekvationssyst för varje

steg $y_k \rightarrow y_{k+1}$

Ex Ekosystem av kaniner/rävar

Mer realistiskt

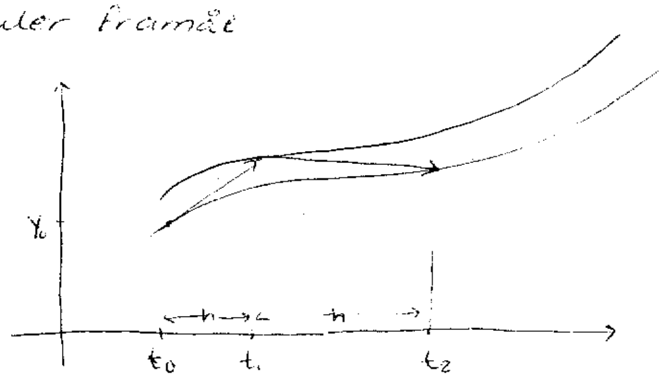
$$\begin{cases} k' = \alpha k - \beta k \cdot r \quad , \quad k(0) = k_0 \\ r' = -\gamma r + \delta k \cdot r \quad , \quad r(0) = r_0 \end{cases}$$

Högre ordnings system, dvs med högre ordnings derivator kan skrivas om till utökat system

Ex System med massor och fjädrar!

Numeriska metoder för ode

Euler framåt



Vi ser att $Y_1 = Y_0 + h\, Y_0'$

$$Y_1 = Y_0 + h f(t_0, Y_0)$$

$$Y_2 = Y_1 + h f(t_1, Y_1)$$

$$\boxed{Y_{k+1} = Y_k + h f(t_k, Y_k)} \quad \text{Euler fram}$$

Metoden kan härledas gm differensapproximation av derivatan:

$$y'(t) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

$\Rightarrow$ Bättre formel

$$\frac{F(2h) - F(h)}{3} = \frac{3b_1 h^2}{3} + \mathcal{O}(h^4) = b_1 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\Rightarrow F(h) = f'(x) + \frac{F(2h) - F(h)}{3} + \mathcal{O}(h^4)$$

dvs $F_2(h) \equiv F(h) + \dfrac{F(h) - F(2h)}{3} = f'(x) + \mathcal{O}(h^4)$ (!!)

Man kan upprepa

$$\left.\begin{matrix} F_2(h) \\ F_2(2h) \end{matrix}\right\} \quad \dots\dots$$

$$F_3(h) = F_2(h) + \frac{F_2(h) - F_2(2h)}{15}$$

<u>Numerisk approximation av diff.ekv kap 9</u>

(ODE) $y' = f(t, y)$, sökt $y(t)$

givet $f(t, y)$

Begynnelsevärdesproblem (BVP)

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

<u>Ex</u> $\begin{cases} y' = -(y - \sin(t)) + \cos(t) \\ y(0) = c \end{cases}$

Vi tänker oss <u>system</u> av ODE dvs

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ vektor med lösningskomp

Linjära sådana har vi sett (Holm 5):

$y' = Ay + b$

Visa att $\|xy^T\|_2 = \|x\|_2 \|y\|_2$ för $x, y \in \mathbb{R}^n$

(tenta 2001-01-09 nr 1b)

<u>Ledning</u>: Definition av matrisnorm

Cauchy's olikhet

<u>Lösning</u>:

$$\|xy^T\|_2 \underset{def}{=} \max_{\|z\|_2} \frac{\|xy^Tz\|_2}{\|z\|_2}$$

$$\frac{\|xy^Tz\|_2}{\|z\|_2} = \frac{|y^Tz| \, \|x\|_2}{\|z\|_2} \underset{Cauchy}{\leq} \frac{\|y\|_2 \|z\|_2 \|x\|_2}{\|z\|_2} =$$

$$= \|y\|_2 \|x\|_2$$

Cauchy's olikhet kan ge likhet, dvs maximum antas!! ■

Visa att om A och B är ortogonala matriser med $\det(A) = -\det(B)$ så gäller att $A+B$ är singulär = icke-inverterbar, reguljär.

<u>Ledning</u>: Definitioner, produktregeln för determinanter.

<u>Lösning</u>: A ortogonal, $A^TA = I$

$\det(A^T)\det(A) = \det(I) = 1$

$\det(A)^2 = 1$

$\det(A) = \pm 1$

B också ortogonal.

$A^T(A+B) = I + A^TB = B^TB + A^TB = (B+A)^TB$

Obs! I varje iteration i sekantmetoden löser man (BVP) för nytt s-värde.

REPETITION

Visa att varje skalärprodukt i R^n, $<\cdot,\cdot>$, kan skrivas $<x,y> = y^T A x$, där A är en symmetrisk, positivt def matris.

Ledning: Det finns bas. Använd egenskaper hos skalärprodukt.

Lösning: $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ bas

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

$$<x,y> = <\sum x_j e_j , \sum y_i e_i> = \sum_i \sum_j x_j y_i \underbrace{<e_j, e_i>}_{<e_j,e_i> = a_{ij}} =$$

$$= \sum_i y_i \sum_j a_{ij} x_j = y^T A x$$

A symmetrisk ty $<e_j, e_i> = <e_i, e_j>$

A pos. def ty $<x,x> = x^T A x \geq 0$

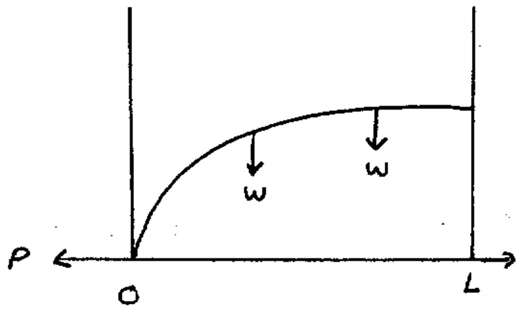
$= 0 \Leftrightarrow x = 0$ ■

Ekvationen $q(s) = 0$ kan lösas t.ex. med sekantmetoden (Newton besvärligare pga derivatorna)

$$s^{(k+1)} = s^{(k)} - \frac{\left[y_1(1, s^{(k)}) - c_2\right]\left(s^{(k)} - s^{(k-1)}\right)}{y_1(1, s^{(k)}) - y_1(1, s^{(k-1)})}$$

<u>Ex</u>

Mekanik, hållf. lära. Böjd balk.



$$(RVP) \begin{cases} EI \dfrac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{1/2}} = Py - \dfrac{wx^2}{2} \\ y(0) = 0, \quad y'(L) = 0 \end{cases}$$

<u>Inskjutning</u>: $y_1 = y$, $y_2 = y'$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x, y, y') \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = s \end{cases}$$

Ekvation: $q(s) \equiv y_2(L, s) = 0$

Sekantmetoden: $s^{(k+1)} = s^{(k)} - \dfrac{y_2(L, s^{(k)})(s^{(k)} - s^{(k-1)})}{y_2(L, s^{(k)}) - y_2(L, s^{(k+1)})}$

■

$$
\begin{pmatrix}
-2\alpha + h^2\gamma & \beta\frac{h}{2} + \alpha & & 0 \\
-\beta\frac{h}{2} + \alpha & \ddots & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & \beta\frac{h}{2} + \alpha \\
0 & & -\beta\frac{h}{2} + \alpha & -2\alpha + h^2\gamma
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
h^2 f_2 - c_1(\alpha - \beta\frac{h}{2}) \\ h^2 f_3 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} - c_1(\alpha + \beta\frac{h}{2})
\end{pmatrix}
$$

Alltså ett tridiagonalt ekv system.

<u>Metod 2</u> Inskjutning

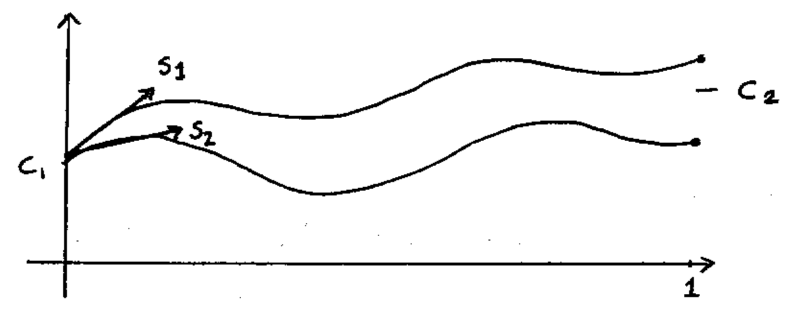
Skriv (RVP) som ett (BVP) av 1:a ordning. $y_1 = y$, $y_2 = y'$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= \frac{1}{\alpha}\left(-\beta y_2 - \gamma y_1 + f(x)\right), \quad 0 \le x \le 1 \\
y_1(0) &= c_1 \\
y_2(0) &= s \quad \leftarrow \text{parameter att bestämma}
\end{aligned}
$$

Välj nu s så att lösningen $y_1(1,s) = c_2$. Vi har alltså en ekvation i variabeln s att lösa

$$
q(s) \equiv y_1(1,s) - c_2 = 0 \qquad (q(s) = 0)
$$

<u>Illustration</u>



Jämför med problemets (T) tillväxtfaktor:

$$e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{3!} + \dots$$

taylor

3 termer stämmer! Lokala felet $\mathcal{O}(h^3)$

$\Rightarrow$ Metoden av ordning 2.

■

Inskjutning, titta på 2000-08-25 nr 8

mekanisk påverkan av ryggraden

$\Rightarrow \quad c = 2(f_3 - 2f_2 + f_1)$

dvs $\quad p_2 = f_1 + 2(f_2 - f_1)x + 2(f_3 - 2f_2 + f_1)x(x - \frac{1}{2})$

$$\underbrace{\int_0^1 p_2\,dx = f_1 + (f_2 - f_1) + \frac{1}{6}(f_3 - 2f_2 + f_1)}_{\int_0^1 x(x-\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}} = \frac{1}{6}(f_1 + 4f_2 + f_3),$$

detta är Simpsons formel. ∎

Visa att trapetsmetoden har stabilitetsområde $Re(z) \leq 0$ dvs A-stabil.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]$$

$y' = f(t, y) \quad (T): \quad y' = \lambda y$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h\lambda}{2}(y_k + y_{k+1})$$

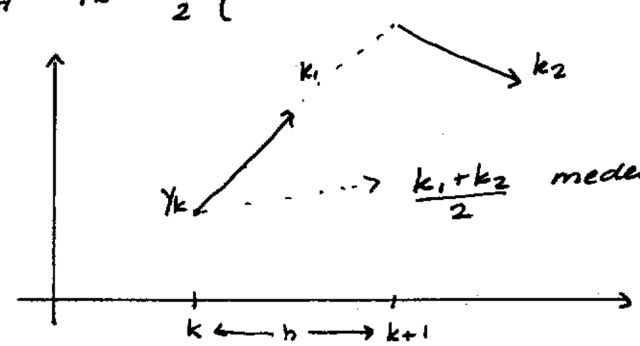
$$y_{k+1} = \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}\right) y_k$$

Villkor $(z = h\lambda)$: $\left|1 + \frac{z}{2}\right| \leq \left|1 - \frac{z}{2}\right|$

$\Leftrightarrow Re(z) = 0$ ∎

Bestäm approximationsordning för Heuns metod:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left\{f(t_k, y_k) + f\left[t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k)\right]\right\}$$



$$(T): \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left\{\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)\right\}$$

$$= y_k + h\lambda y_k + \frac{(h\lambda)^2}{2} y_k = y_k \underbrace{\left[1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right]}_{\text{tillväxtfaktor}}$$

Residual = avvikelse mellan mätning (?) och modell.

Icke-linjär modell

residual: $f_i = R_i - b\,w_i^{a}$, $i = 1, \dots, m$

Jacobian: $J = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ -b \ln w_i \, w_i^{a} & -w_i^{a} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$

Gauss-Newton:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^{(k)}$$

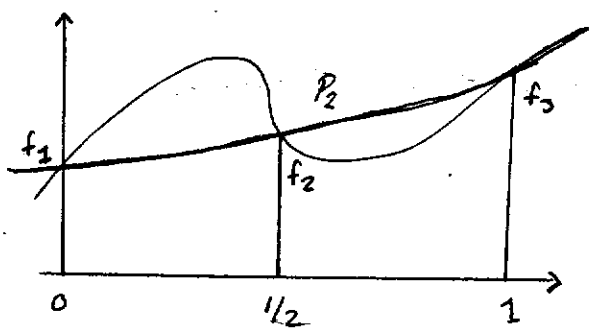
där $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^{(k)}$ är lösningen till ett överbest. ekv.syst.

$$J^{(k)} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^{(k)} = -f^{(k)}$$

Starta i lösning från a-uppgiften. ∎

Visa att kvadratisk interpolation ger Simpsons formel.

Det räcker att betrakta intervallet $(0,1)$



Newtons form: $P_2 = a + bx + cx(x + \frac{1}{2})$

$x = 0 \Rightarrow a = f_1$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{1}{2} b = f_2 \Rightarrow b = 2(f_2 - f_1)$

$x = 1 \Rightarrow f_1 + 2(f_2 - f_1) + c\frac{1}{2} = f_3$

Förklara varför metoden

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$ konvergerar kvadratiskt mot

dubbelrot.

<u>Ledning</u>: Studera $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ och dess derivator.

<u>Lösning</u>: $f'(x)(u(x)) = f(x)$

derivera: $f'(x)u'(x) + f''(x)u(x) = f'(x)$

sätt x^*: $\underset{\substack{\| \\ 0}}{f'(x^*)}u'(x^*) + \underset{\substack{\neq \\ 0}}{f''(x^*)}u(x^*) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{f'(x^*)}$

$\Rightarrow u(x^*) = 0$

derivera iden: $f''(x)u'(x) + f'(x)u''(x) + f'''(x)u(x) + f''(x)u'(x) = f''(x)$

sätt in x^*: $f''(x^*)u'(x^*) + 0 + 0 + f''(x^*)u'(x^*) = f''(x^*)$

$\Rightarrow \quad u'(x^*) = \frac{1}{2}$

u har en enkelrot i x^*.

Newton pu $u(x) = 0$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{u(x^{(k)})}{u'(x^{(k)})} \approx x^{(k)} - \frac{2f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

■

Samband mellan vikt w och syrekonsumtion hos en larv. R: $R = bw^a$

Mätningar: (R_i, w_i) $i = 1, \dots, m$

parametrar att bestämma: a, b

a) Linjärisera: $\ln R_i = \underbrace{\ln b}_{\hat{b}} + a \ln w_i$

dvs ett linjär ekv.syst

$$\begin{bmatrix} \ln w_1 & 1 \\ \ln w_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \ln w_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln R_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \ln R_m \end{bmatrix}$$

$Pu_1 = u_1 - 2u_1\underbrace{u_1^T u_1}_{I} - 2u_2\underbrace{u_2^T u_1}_{=0} = -u_1$ en egenvektor

$Pu_2 = \ldots = -u_2$

Tag nu $\{u_i\}_{i=1}^n$ ON-bas (GS)

$Pu_j = u_j - 2u_1\underbrace{u_1^T u_j}_{0} - 2\underbrace{u_2 u_2^T}_{0} u_j = u_j$

Egenvärden: 2 st: -1

n-2 st: 1

■

Undersök algoritmen $y = x^2$ med framåt- och bakåt-analys. Är algoritmen stabil?

Framåt: $\tilde{x} = fl(x) = x(1+\delta_1)$ $|\delta_1| \le \mu$

(*) $fl(\tilde{x}^2) = x^2(1+\delta_1) = x^2(1+\delta_1)^2(1+\delta_2) =$

$= x^2(1+2\delta_1+\delta_2) + O(\mu^2)$

Vi får $\left|\frac{fl(x^2)-x^2}{x^2}\right| \le 3\mu + O(\mu^2)$

Bakåt: (*) $fl(\tilde{x}^2) = x^2(1+\delta_1)^2(1+\delta_2) = \hat{x}^2$

där $\hat{x} = x(1+\delta_1)\sqrt{1+\delta_2} = x(1+\delta_1)(1+\frac{\delta_2}{2}+O(\mu^2)) =$

$= x + x\delta_1 + x\frac{\delta_2}{2} + O(\mu^2)$

dvs $\left|\frac{\hat{x}-x}{x}\right| \le \frac{3}{2}\mu + O(\mu^2)$

Algoritmen är alltså stabil, ty $\hat{x}$ nära x.

■