Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats:	Måndagen den 15 augusti 2011 klockan 14.00-18.00 i V.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Lexikon, typgodkänd miniräknare samt en egenhändigt skriven A4 med valfritt innehåll.
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Per Salomonsson, 031–772 3231.

Betygsgränser: Tentamen består av fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng (om ej annat anges). För att bli godkänd krävs minst 12 poäng på uppgifterna 1-3 (inklusive eventuella bonuspoäng från de två inlämningsuppgifterna).
För de som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-5 plus eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna enligt följande gränser:
12-23 poäng ger betyg 3, 24-29 poäng ger betyg 4, 30+ poäng ger betyg 5.

För registrerade studenter från tidigare årskurser finns möjligheten att göra en extra tentamensuppgift (6 poäng) på kursdel A som ersättning för inlämningsuppgifterna.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras , införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt!

Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

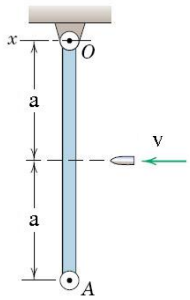
- För full (6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag, om orimligheten pekas ut; annars 5-6 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 5-6 poängs avdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lycka till!

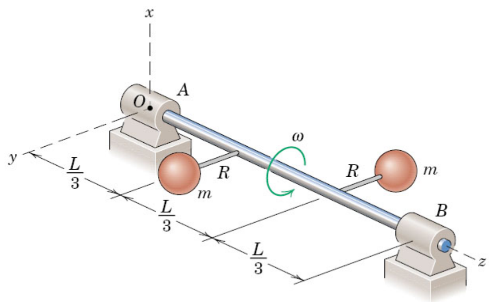
Obligatoriskt del

1. *(6 poäng. 3 poäng per deluppgift. Fullständiga lösningar skall ges.)*

   (a) En kula med massa m och horisontell hastighet v träffar en homogen, stillastående stav OA med massa M (se figur). Staven är fritt upphängd i punkten O och kulan träffar precis mellan ändpunkterna. Vad blir systemets vinkelhastighet direkt efter träffen med kulan inbäddad i staven?



   (b) Ett system består av en tunn stav med massa M och två punktformiga massor (massa m) som är placerade enligt figur. De korta stavstyckena med längd R har försumbar massa. Systemet roterar kring den positiva z-axeln (koordinatsystemet definieras i figuren). Beräkna systemets rörelsemängdsmoment i det givna ögonblicket.



2. När en bil kör längs en grusväg med regelbundna gropar (som en tvättbräda) kan detta få bilens hjulpar att oscillera. Varje hjulpar består av 2 hjul + hjulupphängning + axel. Finn hastigheten för vilket denna störande vibration hamnar i resonans. Använd följande information:

   - När fem studenter, som totalt väger 320 kg, kliver in i bilen sjunker den med 2 cm.
   - Det finns två hjulaxlar och varje axel sitter på två stycken fjädrar.
   - Dämpningens effekt på resonansfrekvensen är försumbar.
   - Den totala vikten på varje system av 2 hjul+hjulupphängning+axel är 50 kg.
   - Groparna i vägen är separerade med 80 cm.

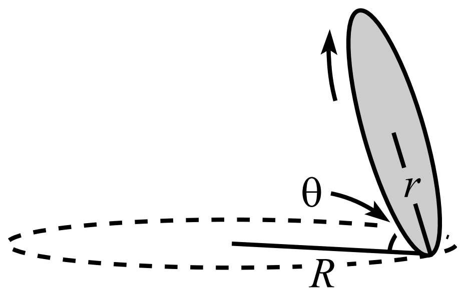
3. Tyngdaccelerationen som uppmäts i ett jordfixt koordinatsystem betecknas med $\mathbf{g}$. Pga jordens rotation skiljer sig $\mathbf{g}$ från den *verkliga* gravitationsaccelerationen $\mathbf{g}_0$ som hade uppmätts om jorden inte hade roterat. Antag (något förenklat och felaktigt) att jorden är ett perfekt klot och räkna ut

   (a) Skillnaden i storlek $g - g_0$ som en funktion av latituden ϕ;

   (b) Den maximala vinkeln mellan $\mathbf{g}$ och $\mathbf{g}_0$ samt vid vilken latitud denna inträffar.

Överbetygsuppgifter

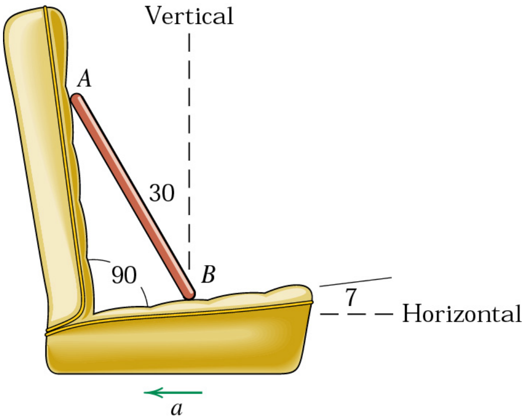
4. Ett mynt med radie r utför en rullande rörelse enligt figur (ingen glidning). Myntets kontaktpunkt med marken ritar ut en cirkel med radie R och myntet lutar en vinkel θ relativt horisontalaxeln. Visa att en sådan rörelse enbart är möjlig då R är större än ett minimivärde som beror på r och θ. Hur ser detta villkor ut?



5. En liten kloss med massan m glider friktionsfritt inuti en tunn ring med radien R och massan M, som i sin tur kan rulla utan glidning på ett horisontellt underlag. Hur många frihetsgrader har systemet om rörelsen förutsätts försiggå i ett fixt plan? Använd Lagranges formalism för att skriva ned systemets rörelseekvationer och finn egenfrekvensen/-erna för små svängningar.

Extrauppgift (del A)

6. En homogen, tunn stav med massan m och längden L vilar på en bilstol enligt figur. För vilken retardation a kommer staven att börja tippa framåt? Vi kan anta att friktionen i kontaktpunkten B är tillräckligt stor för att förhindra glidning.



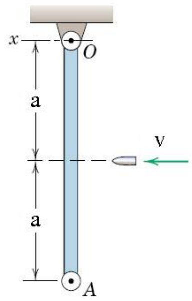
Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Måndagen den 15 augusti 2011 klockan 14.00-18.00 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. (a)



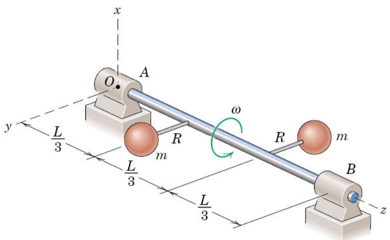
Rörelsemängdsmomentet är bevarat

$$L_{O,1} = L_{O,2} \quad \Leftrightarrow \quad mva = (I_O + ma^2)\omega.$$

Staven har tröghetsmomentet $I_O = M(2a)^2/3$. Detta ger slutligen vinkelhastigheten direkt efter stöten

$$\omega = \frac{v}{a\left(1 + \frac{4M}{3m}\right)}.$$

(b)



Rörelsemängdsmomentet ges av sambandet

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{I}_O \omega.$$

Rotationer sker kring en fix axel. Med det givna koordinatsystemet

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega.$$

Vi behöver endast tre element ur tröghetsmatrisen eftersom $\mathbf{L}_O$ blir

$$\mathbf{L}_O = \omega \left[-I_{xz}\hat{\mathbf{i}} - I_{yz}\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}\hat{\mathbf{k}} \right].$$

Dessa matriselement blir

$$\begin{cases} I_{xz} = \int dmxz = 0, \\ I_{yz} = \int dmyz = mR\frac{L}{3} - mR\frac{2L}{3} = -\frac{mRL}{3}, \\ I_{zz} = \int dm(x^2 + y^2) = 2mR^2. \end{cases}$$

Detta ger slutligen det sökta rörelsemängdsmomentet

$$\mathbf{L}_O = mR\omega \left[\frac{L}{3}\hat{\mathbf{j}} + 2R\hat{\mathbf{k}} \right].$$

2. (kortfattat)

Informationen i uppgiften ger följande:

- Fjäderkonstanten för varje fjäder är $k = 4 \cdot 10^4$ N/m.
- Den naturliga vinkelfrekvensen för varje hjulsystem är $\omega_n = 40$ rad/s.
- Underlaget kan antas vara sinusformat med en våglängd på $\lambda = 0.8$ m. Hjulsystemet kommer att röra sig upp och ner med frekvensen $f = v/\lambda$, där v är bilens horisontella hastighet.

Hjulsystemet hamnar alltså i resonans då

$$v = \lambda \frac{\omega_n}{2\pi} \approx 5 \text{ m/s}.$$

Kommentar: Notera att vad vi har räknat ut är den hastighet då hjulparet hamnar i resonanssvängning. Men det som egentligen ger passagerarna obehag är bilkroppens svängningsrörelse.

3. (enbart svar)

Med beteckningen $x \equiv R\Omega^2/g_0$, där R är jordradien och Ω rotationshastigheten, fås svaren:

(a) $g - g_0 \approx g_0 \frac{x^2-2x}{2} \cos^2 \phi$;

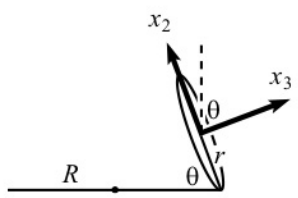
(b) Den maximala vinkeln mellan $\mathbf{g}$ och $\mathbf{g}_0$ inträffar vid latituden $\phi = 45^o$ och blir

$$\theta \approx \frac{x}{2\sqrt{1+(x^2-2x)/2}} \approx \frac{x}{2}$$

.

Överbetygsuppgifter

4. Vi inför ett kroppsfixt koordinatsystem med origo i myntets masscentrum (se figur). Riktningen $\hat{x}_1$ pekar in i pappret.



Vi kan betrakta rörelsen i ett koordinatsystem med origo i masscentrum och som roterar kring en fix, vertikal $\hat{Z}$-axel med frekvensen Ω. I detta koordinatsystem är myntets masscentrum fixt medan myntet spinner kring sin (negativa) $\hat{x}_3$ axel med frekvensen ω'. Eftersom myntet rullar gäller att $\omega' r = \Omega R$. Myntets rotationsvektor kan alltså skrivas

$$\vec{\omega} = \Omega \hat{Z} - \omega' \hat{x}_3 = \Omega \sin\theta \hat{x}_2 - \Omega \left(\frac{R}{r} - \cos\theta \right) \hat{x}_3.$$

Huvudtröghetsmomenten är $I_3 = mr^2/2$ och $I_2 = mr^2/4$ och rörelsemängdsmomentet map cirkelns mittpunkt blir $\vec{L} = I_2\omega_2\hat{x}_2 + I_3\omega_3\hat{x}_3$. Enbart den horisontella komponenten av denna kommer att ha ett tidsberoende: $\vec{L}_\perp = (I_2\omega_2 \cos\theta - I_3\omega_3 \sin\theta)\, \hat{e}_\perp$, där vektorn $\hat{e}_\perp$ pekar

horisontellt in mot cirkelrörelsens mittaxel.
Vi får nu rörelseekvationen från

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = -\Omega L_\perp \hat{x}_1 = \ldots = -\frac{1}{4} m r \Omega^2 \sin\theta \left(2R - r\cos\theta\right) \hat{x}_1.$$

Vridmomentet, map masscentrum, uppkommer pga krafterna som verkar genom kontaktpunkten. Dessa består av en vertikal komponent, $mg\hat{Z}$, samt en horisontell friktionskraft. Den sistnämnda måste vara $\vec{F}_\perp = m\left(R - r\cos\theta\right)\Omega^2 \hat{e}_\perp$, eftersom masscentrum rör sig i en cirkelbana med radie $R - r\cos\theta$. Slutligen fås vridmomentet

$$\vec{M} = -\left[mgr\cos\theta - m(R - r\cos\theta)\Omega^2 r\sin\theta\right]\hat{x}_1.$$

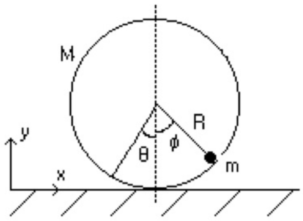
Rörelseekvationen ovan ger slutligen sambandet

$$\Omega^2 = \frac{g}{\frac{3}{2}R\tan\theta - \frac{5}{4}r\sin\theta}.$$

Vi får enbart fysikaliska lösningar då högerledet är positivt, vilket ger villkoret $R > \frac{5}{6} r\cos\theta$.
Specialfall: $\theta \to \pi/2$ ger $\Omega \to 0$, vilket är rimligt.
$\theta \to 0$ ger $\Omega \to \infty$, vilket också är rimligt.
Notera att då $R \to \frac{5}{6} r\cos\theta$ så går frekvensen $\Omega \to \infty$. Detta betyder också att friktionskraften blir stor vilket i praktiken betyder att friktionskoefficienten måste vara motsvarande hög. Så småningom börjar antagligen myntet att glida.

5. (kortfattat)

Systemet har två frihetsgrader. Välj förslagsvis två vinklar för att beskriva klossens läge relativt horisontalaxelns (ϕ) samt ringens rotationsvinkel (θ). (Notera att positiv rotationsriktning moturs innebär att ringen har rullat åt vänster då $\theta > 0$.)



Kinetisk och potentiell energi blir med dessa generaliserade koordinater

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \left[\dot{\theta}^2 \left(1 + \frac{2M}{m}\right) - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi + \dot{\phi}^2\right],$$
$$V = mgR\left(1 - \cos\phi\right).$$

Lagranges ekvationer blir

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{1+2M/m}\left(\dot{\phi}^2 \sin\phi - \ddot{\phi}\cos\phi\right) = 0,$$
$$\ddot{\theta}\cos\phi - \ddot{\phi} - \frac{g}{R}\sin\phi = 0.$$

Dessa ekvationer kan vi linearisera för små svängningar kring det stabila jämviktsläget $\theta = \phi = 0$. Rörelseekvationerna blir då

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{1+2M/m}\ddot{\phi} \approx 0,$$
$$\ddot{\theta} - \ddot{\phi} - \frac{g}{R}\phi \approx 0.$$

Notera att den första ekvationen enbart tillåter att θ och ϕ har motsatt tecken. Dvs vi har bara en egenlösning. Ansatsen $\phi(t) = A\exp(\pm i\omega t)$ ger egenfrekvensen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g(1+m/2M)}{R}}.$$

Specialfall: $M \to \infty$ ger $\omega \to \sqrt{g/R}$, dvs en matematisk pendel med pendellängden R, vilket vi bör förvänta oss.

Extrauppgift (del A)

---

6. (kortfattat)

   Staven kommer att tippa då kontaktkraften i punkten A går mot noll, dvs $N_A \to 0$. I detta gränsläge gäller fortfarande att $\ddot{\theta} = 0$. Kraften i kontaktpunkten B utgörs av en summa av normal- och friktionskraft. En friläggning, samt tecknandet av vridmometsekvationen med avseende på masscentrum ger att den resulterande kraften $\vec{N}_B$ måste vara riktad parallellt med stången. Rörelseekvationerna i x- och y-led (x =rörelseriktningen, y =vertikalt uppåt) ger då

$$-N_B\sin\theta = -ma \qquad (x-\text{led}),$$
$$N_B\cos\theta - mg = 0 \qquad (y-\text{led}),$$

där θ är vinkeln mellan staven och horisontalaxeln. I vårt fall är $\theta = 30^o$ vilket ger lösningen

$$a = g \tan\theta = g/\sqrt{3}.$$

Alternativt tecknar vi vridmomentekvationen m.a.p. punkten B, men får då inte glömma termen $m\bar{a}d$ som kommer från masscentrums acceleration.