Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats:	Tisdagen den 26 maj 2009 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Lexikon, typgodkänd miniräknare samt en egenhändigt skriven A4 med valfritt innehåll.
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén, 031–772 3261.

Betygsgränser: Tentamen består av sex uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng (om ej annat anges). För att bli godkänd krävs minst 12 poäng på uppgifterna 1-4. För dem som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-6 plus eventuella bonuspoäng enligt följande gränser:
12-23 poäng ger betyg 3, 24-29 poäng ger betyg 4, 30+ poäng ger betyg 5.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras (uppgift 1 undantagen i förekommande fall) , införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt!

Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag, om orimligheten pekas ut; annars 5-6 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 5-6 poängs avdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng.

Obligatorisk del

---

1. En svärm med knott består av 1000 individer, vardera med en vikt av 2 mg. Knotten flyger i en klotformad formation, med konstanta inbördes avstånd. Klotets massfördelning är homogen och dess radie $r \approx 1$ m.

   (a) Svärmens mittpunkt rör sig med konstant fart 0.4 m/s västerut samtidigt som svärmen roterar långsamt kring rörelseriktningen med ett varv på 20 timmar. Ange svärmens totala rörelsemängd, rörelseenergi och rörelsemängdsmoment med avseende på masscentrum. Bortse från jordens rotation.

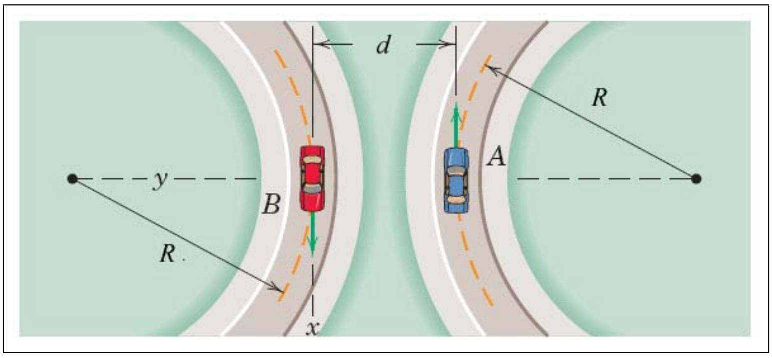
   (b) Svärmen flyger genom LHC-tunneln på CERN. Tunneln har en omkrets på 27 km. Det tar 20 timmar att flyga ett varv och vi kan anta att svärmens masscentrum rör sig med konstant fart. Svärmen roterar med rörelsen så att den hela tiden vänder samma sida mot mitten. Ange svärmens totala rörelsemängd, rörelseenergi och rörelsemängdsmoment med avseende på LHC-cirkelns mittpunkt. Bortse från jordens rotation.

   (6 poäng. 1 poäng för varje rätt svar. Endast svar skall ges.)

2. Bilarna A och B kör genom en kurva (krökningsradie R) med lika stor fart v.

   (a) Bestäm *hastigheten* för bil A uppmätt av en observatör i bil B, vars koordinatsystem är kroppsfixt och därmed roterar med rörelsen, vid ögonblicket som visas i figuren (då avståndet mellan bilarna är d). *(2 poäng)*

   (b) Bestäm *accelerationen* för bil A uppmätt av en observatör i bil B vid ögonblicket som visas i figuren. *(4 poäng)*



3. Åkattraktionen Uppswinget på Liseberg är en gunga som kan beskrivas som en sammansatt stel kropp bestående av en stav med längden R och massan m samt en punktmassa M längst ut. Enligt Lisebergs hemsida är längden på gungan 20 m och maxvinkeln relativt lodlinjen är $\theta_{\mathrm{max}} = 120^o$.

   Teckna ett uttryck för en passagerares acceleration i negativ z-led (dvs mot marken) som en funktion av vinkeln θ relativt lodlinjen och kvoten $x \equiv m/M$. Visa att denna acceleration är större än tyngdaccelerationen g under en del av färden. *(6 poäng)*

4. En punktmassa fäst i en fjäder släpps från vila avståndet x_0 från jämviktsläget. Systemet karakteriseras av en naturlig vinkelfrekvens ω_n. Under rörelsen uppmäts massans fart som en funktion av tiden.

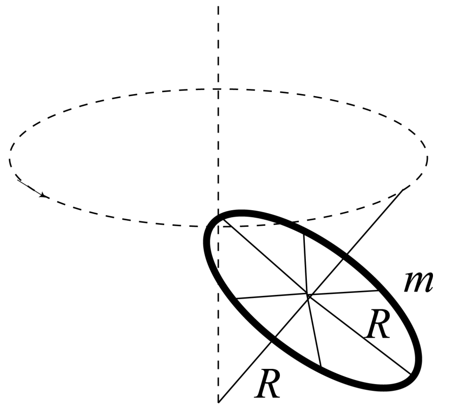
   Experimentet upprepas, men denna gång med systemet nedsänkt i vatten som leder till att svängningsrörelsen blir kritiskt dämpad.

   (a) Använd dimensionsanalys för att motivera att den maximala farten i det första experimentet är en numerisk faktor gånger den maximala farten i det andra experimentet. *(2 poäng)*

   (b) Finn storleken på denna numeriska faktor. *(4 poäng)*

Överbetygsuppgifter

5. En snurra består av en axel med försumbar massa samt ett cirkulärt hjul (radie R) vars massa m kan betraktas vara jämnt fördelad utefter periferin. Axelns nedre ända är fäst i en friktionsfri universalled på avståndet R från hjulets masscentrum (se figur). Snurran spinner kring sin symmetriaxeln med den konstanta vinkelhastigheten ν och precesserar med den konstanta vinkelhastigheten Ω så att axelns rörelse spänner upp en kon med toppvinkeln $\theta = 45^o$.

   Härled ett uttryck för ν som funktion av Ω och ange riktningen på snurrans spinn om precessionsrörelsen sker moturs enligt figuren. *(6 poäng)*

6. Betrakta storheten

$$E \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L,$$

   där $L = L(q, \dot{q}, t)$ är Lagrangianen för ett system med N frihetsgrader och q_i, $\dot{q}_i$ är generaliserade koordinater och hastigheter.

   (a) Ovanstående storhet motsvarar (i de flesta fall) ett systems totala mekaniska energi. Visa explicit att detta påstående är sant för en partikel i rummet som beskrivs med cartesiska koordinater xyz och en allmän potentiell energi $V(x, y, z)$. *(2 poäng)*

   (b) Visa nu att Lagranges ekvationer ger att E (enligt definitionen ovan) är en konserverad storhet om Lagrangianen ej har något explicit tidsberoende (dvs $\partial L/\partial t = 0$). *(4 poäng)*

Lycka till!

Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

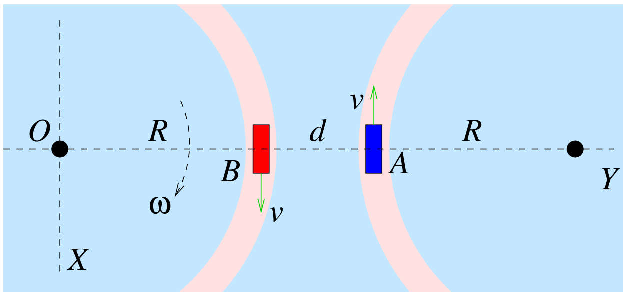
Tid och plats: Tisdagen den 26 maj 2009 klockan 08.30-12.30 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén och Per Salomonson.

Obligatorisk del

---

1. *(6 poäng. 1 poäng för varje rätt svar. Endast svar skall ges.)*
   (a) Svärmens rörelsemängd $0.8 \cdot 10^{-3}$ Ns åt väster,
   rörelseenergi $1.6 \cdot 10^{-4}$ J, och
   rörelsemängdsmoment $0.70 \cdot 10^{-7}$ Nms i rotationsriktningen.
   (b) Svärmens rörelsemängd $0.75 \cdot 10^{-3}$ Ns i flygriktningen,
   rörelseenergi $1.4 \cdot 10^{-4}$ J, och
   rörelsemängdsmoment 3.2 Nms vertikalt riktat (i rotationsriktningen).

2. *(2 + 4 poäng)*
   Låt (X, Y) vara ett jordfixt koordinatsystem med origo i B-bilens kurvas centrum och Y-axel riktad mot A-bilens. I detta system har A-bilen i det aktuella ögonblicket position $\vec{r}_A = (R+d)\hat{Y}$, hastighet $\vec{v}_A = -v\hat{X}$, och acceleration $\vec{a}_A = (v^2/R)\,\hat{Y}$.

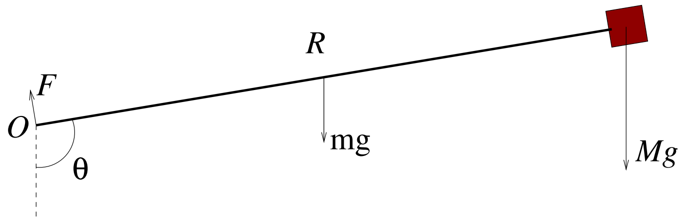


   Låt (x, y) vara ett koordinatsystem som är fixerat relativt B-bilen, och som sammanfaller med det jordfixa systemet i det aktuella ögonblicket. (Notera att detta inte är samma koordinatsystem som är indikerat i figuren i tentamenstesen. Origo ligger så att B-bilen befinner sig i vila i $R\vec{y}$.) Hastighet och acceleration uppmätt av observatör i bil B betyder hastighet och acceleration relativt det bilfixa systemet. Detta system rör sig relativt det jordfixa. Denna rörelse är ren rotation kring origo med konstant rotationsvektor $\vec{\omega} = -(v/R)\hat{Z}$. Enligt räknereglerna för hastighet och acceleration i rörliga referenssystem har vi:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A\mathrm{rel}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A,$$
$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A\mathrm{rel}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{A\mathrm{rel}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_A).$$

   Nu återstår endast algebra för att få de sökta kvantiteterna.
   (a) $\vec{v}_{A\mathrm{rel}} = \vec{v}_A - \vec{\omega} \times \vec{r}_A = -(2v + v\frac{d}{R})\hat{x}$.
   (b) $\vec{a}_{A\mathrm{rel}} = \vec{a}_A - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{A\mathrm{rel}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_A) = -(2\frac{v^2}{R} + \frac{v^2 d}{R^2})\hat{y}$.
   Möjlig rimlighetskontroll: Enligt svaret blir både hastighet och acceleration för bil A sedd från bil B noll om $d = -2R$. Kan det verkligen stämma? Ja, för då kör bilarna runt samma cirkel åt samma håll med samma fart, så att de hela tiden befinner sig på motsatta sidor av den, dvs bil A befinner sig hela tiden på avståndet $2R$ rakt åt höger från bil B.

3. *(6 poäng)*
Man får tänka sig att gungan först ges fart under en startfas. Därefter svänger den fritt kring sin upphängningspunkt O, och det är denna svängningsrörelse vi skall studera.



I O kan den då påverkas av lagerkraft F, men inte av något kraftmoment. Därför ställer vi upp rörelsemängdsmomentekvationen för gungan med avseende på upphängningspunkten O. Tröghetsmomentet x vinkelaccelerationen = summan av kraftmomenten:

$$(mR^2/3 + MR^2)\ddot{\theta} = -(mgR/2 + MgR)\sin\theta.$$

För att uttrycka passagerarnas (dvs M's) acceleration behöver vi också vinkelhastigheten. Den kan vi få tex genom att multiplicera ekvationen ovan med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden från tidpunkten för maximalt utslag:

$$\ddot{\theta} = -\frac{m/2 + M}{m/3 + M}\frac{g}{R}\sin\theta, \qquad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{m/2 + M}{m/3 + M}\frac{g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Passagerarnas accelerationen i negativ z-led kan beräknas tex genom att teckna ett uttryck för M's z-koordinat och derivera det två gånger.

$$\begin{aligned}
-z &= R\cos\theta \\
-\dot{z} &= -R\sin\theta\,\dot{\theta} \\
-\ddot{z} &= -R(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2) = -\frac{m/2 + M}{m/3 + M}\,g(-\sin^2\theta + 2(\cos\theta - \cos\theta_0)\cos\theta).
\end{aligned}$$

Detta är det efterfrågade uttrycket. Att accelerationen nedåt stundtals är större än g kan man tex se genom att räkna ut den för utslagsvinkeln 90°. Då är den

$$-\ddot{z}(\pi/2) = \frac{m/2 + M}{m/3 + M}\,g > g.$$

4. *(2+4 poäng)*
Eftersom begreppen naturlig vinkelfrekvens och kritisk dämpning förekommer i uppgiftstexten så får man anta att det är frågan om harmonisk svängning, resp lineärt dämpad harmonisk svängning, dvs rörelseekvationerna i de två fallen är på formerna

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0, \qquad \text{resp.} \qquad \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0.$$

Vi antar att vattnet inte påverkar fjäderkonstanten eller tröga massan, så att det är samma ω_n i bägge fallen.
(a) Vi är intresserade av den maximala fart v_m som uppstår efter att massan släpps från vila i $x = x_0$. Den bestäms av vår rörelseekvation, dvs det finns ett funktionssamband

mellan kvantiteterna ω_n, ζ, x_0 och v_m. För att sambandet skall vara dimensionellt korrekt skall det kunna uttryckas i dimensionslösa kombinationer av dem. Kvantiteterna har dimensionerna

$$[\omega_n] = 1/T, \qquad [\zeta] = 1, \qquad [x_0] = L, \qquad [v_m] = L/T.$$

Här förekommer två grunddimensioner. Vi eliminerar dem och får två oberoende dimensionslösa kombinationer av våra fyra kvantiteter, ζ och $v_m/(x_0\omega_n)$. För att funktionssambandet skall vara dimensionellt korrekt måste det vara ett samband mellan bara dessa två. Löser man det för den senare har man

$$v_m/(x_0\omega_n) = f(\zeta), \qquad \text{dvs} \qquad v_m = x_0\omega_n f(\zeta).$$

De två experimenten skiljer sig bara genom att ζ är olika, $\zeta_1 = 0$, medan $\zeta_2 = 1$ (krititisk dämpning). Således

$$v_{m2}/v_{m1} = f(1)/f(0).$$

(b) I första fallet är rörelseekvationens lösning med givna startvillkoren $x(t) = x_0\cos(\omega_n t)$, och maximala farten $v_{m1} = \omega_n x_0$.
I andra fallet är rörelseekvationens allmänna lösning på formen $x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$. Begynnelsevillkoren $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ bestämmer integrationskonstanterna så att

$$x(t) = x_0(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}.$$

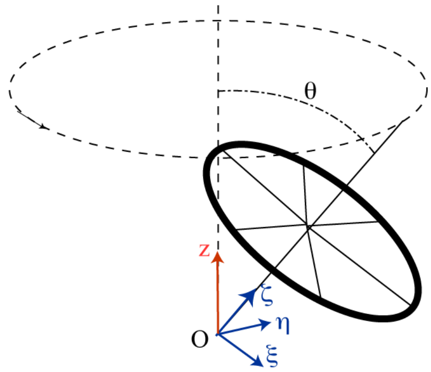
Man deriverar $x(t)$ en gång för att få hastigheten, sedan ännu en gång för att hitta tidpunkten när hastigheten är maximal:

$$\dot{x} = -x_0\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \qquad \ddot{x} = x_0\omega_n^2(\omega_n t - 1)e^{-\omega_n t}.$$

Den blir $t_m = 1/\omega_n$, och $v_{m2} = -\dot{x}(t_m) = x_0\omega_n e^{-1}$. Således är den sökta numeriska faktorn: $v_{m1}/v_{m2} = e$.

Överbetygsuppgifter

5. *(6 poäng)*
Strategi: Vi noterar att vi har rotation kring en fix punkt (O). Vi väljer därför att teckna rörelsemängdsmoment och vridmoment med avseende på denna fixa punkt och därefter skriva rörelseekvationen.
Inför en rumsfix axel $\hat{z}$ samt ett kroppsfixt koordinatsystem $\xi\eta\zeta$ som följer med precessionsrörelsen (se figur).



En allmän rotationsvektor i $\xi\eta\zeta$-systemet kan skrivas $\vec{\omega} = \omega_\xi\hat{\xi} + \omega_\eta\hat{\eta} + \omega_\zeta\hat{\zeta}$. Men vi vet redan att rotationsrörelsen består av en precessions- och en spinnkomponent så att rotationsvektorn kan skrivas explicit i detta fall

$$\vec{\omega} = \Omega\hat{z} + \nu\hat{\zeta}.$$

Kroppen är helt symmetrisk kring ξ och η (dvs $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = I_1$). Axeln ζ är huvudsymmetriaxeln och alla deviationsmoment är noll.

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_\zeta \end{pmatrix}$$

Med massan koncentrerad längs med periferin blir $I_\zeta = mR^2$ och $I_1 = mR^2/2 + mR^2 = 3mR^2/2$.
Kraftmomentet m.a.p. O

$$\vec{M}_O = R\hat{\zeta} \times (-mg\hat{z}) = mgR(\hat{z} \times \hat{\zeta}).$$

Rörelsemängdsmomentet m.a.p. O

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_O\vec{\omega} = I_1\omega_\xi\hat{\xi} + I_1\omega_\eta\hat{\eta} + I_\zeta\omega_\zeta\hat{\zeta} = I_1\vec{\omega} + (I_\zeta - I_1)\omega_\zeta\hat{\zeta} = I_1\Omega\hat{z} + [I_1\nu + (I_\zeta - I_1)\omega_\zeta]\,\hat{\zeta},$$

där vi utnyttjat både det generella och explicita uttrycket för $\vec{\omega}$. Vi kan identifiera $\omega_\zeta = \hat{\zeta} \cdot \vec{\omega} = \Omega\cos\theta + \nu$ och får därför

$$\vec{L}_O = I_1\Omega\hat{z} + [I_\zeta\nu + (I_\zeta - I_1)\Omega\cos\theta]\,\hat{\zeta}.$$

Rörelseekvationen blir (utnyttja att enbart $\hat{\zeta}$ är tidsberoende: $\dot{\hat{\zeta}} = \vec{\omega} \times \hat{\zeta} = \Omega\hat{z} \times \hat{\zeta}$

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \Rightarrow mgR(\hat{z} \times \hat{\zeta}) = [I_\zeta\nu + (I_\zeta - I_1)\Omega\cos\theta]\,\Omega(\hat{z} \times \hat{\zeta}).$$

Vi får alltså

$$I_\zeta \nu \Omega + (I_\zeta - I_1)\Omega^2 \cos\theta - mgR = 0,$$

med $\theta = 45^o$

$$-\frac{mR^2}{2}\frac{\Omega^2}{\sqrt{2}} + mR^2\nu\Omega - mgR = 0,$$

eller

$$\nu = \frac{g}{\Omega R} + \frac{\Omega}{2\sqrt{2}}.$$

[dimension 1/T ok!].
En moturs precession enligt uppgiftsillustrationen betyder att $\Omega > 0$ vilket innebär att $\nu > 0$ vilket betyder positiv rotation kring ζ-axeln.

---

6. Betrakta storheten

$$E \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L,$$

där $L = L(q, \dot{q}, t)$ är Lagrangianen för ett system med N frihetsgrader och q_i, $\dot{q}_i$ är generaliserade koordinater och hastigheter.

(a) *(2 poäng)*

Partikel i rummet med cartesiska koordinater. Potentiell energi $V(x, y, z)$. Lagrangianen blir

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - V(x, y, z).$$

Storheten E blir

$$\begin{aligned} E &= (m\dot{x}\dot{x} + m\dot{y}\dot{y} + m\dot{z}\dot{z}) - L \\ &= \left[\frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) + V(x, y, z) \right] = T + V, \end{aligned}$$

dvs E är den totala mekaniska energin.

(b) *(4 poäng)*

Med $L = L(q, \dot{q}, t)$ och flitigt användande av kedjeregeln

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{dL}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] - \left(\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Vi har fyra termer i summorna och en femte utanför. Den andra och fjärde termen tar ut varandra. Lagranges ekvationer ger att $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ och därmed kommer den första och tredje termen ta ut varandra.

Kvar återstår bara

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Med en Lagrangain utan explicit tidsberorende, dvs $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, får vi $\frac{dE}{dt} = 0$, dvs den totala energin är en konserverad storhet.