Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Tisdagen den 26 maj 2006 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Lexikon, typgodkänd miniräknare samt en egenhändigt skriven A4 med valfritt innehåll.
Examinator: Christian Forssén.
Jourhavande lärare: Christian Forssén, 031–772 3261.

Betygsgränser: Tentamen består av sex uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng (om ej annat anges). För att bli godkänd krävs minst 12 poäng på uppgifterna 1-4. För dem som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-6 plus eventuella bonuspoäng enligt följande gränser:
12-23 poäng ger betyg 3, 24-29 poäng ger betyg 4, 30+ poäng ger betyg 5.

Rättningsprinciper: Alla svar (med undantag för uppgift 1 i förekommande fall) skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt!

Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För 6 poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag, om orimligheten pekas ut; annars 5-6 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 5-6 poängs avdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng.

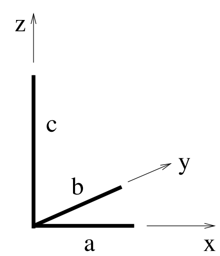
Obligatorisk del

---

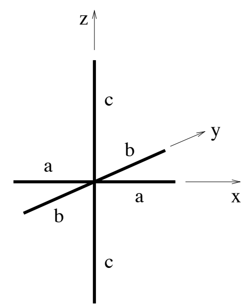
1. 2008-08-26: 1
   Svara på följande fyra delfrågor (endast svar skall ges)!
   a) Ange SI-enheterna för storheterna kraft, energi, impuls, tröghetsmoment och rörelsemängdsmoment uttryckta i kilogram, meter och sekund. *1 poäng*

   b) Ett tåg går med farten 250 km/h i en kurva med krökningsradien 4.0 km. Hur mycket skall det luta för att passagerarna skall uppleva det som horisontellt? *1 poäng*

   c) En kropp består av tre pinnar med längderna a, b och c enligt figuren. Pinnarna har samma konstanta massa/längdenhet ρ, och är hopfästade vinkelrätt mot varandra i ändpunkterna. Ange ortvektorn för masscentrum för den sammansatta kroppen! *2 poäng*



d) En kropp består av tre pinnar med längderna $2a$, $2b$ och $2c$ enligt figuren. Pinnarna har samma konstanta massa/längdenhet ρ, och är hopfästade vinkelrätt mot varandra i mittpunkterna. Ange tröghetsmatrisen för den sammansatta kroppen! *2 poäng*



2. *2005-05-16: 2*
   Galileo Galilei släpper en kula från det lutande tornet i Pisa, på ungefär 44^o nordlig bredd. Tornets höjd h är 55 m. Luftmotståndet kan försummas. På grund av corioliskraften landar inte kulan rakt nedanför den punkt den släpps från, utan ett litet avstånd d därifrån.

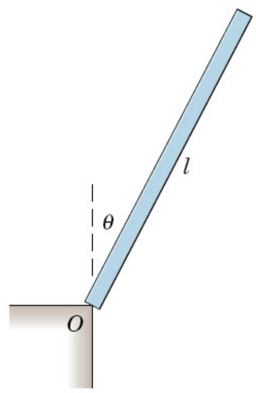
   a) Med vetskap om att corioliskraften är proportionell mot ω, jordens rotationshastighet, kan man sluta sig till att d är proportionell mot ω. Använd dimensionsanalys för att avgöra vilken potens av h som d är proportionell mot! *2 poäng*

   b) Bestäm avvikelsen, till storlek och riktning (kontrollera mot deluppgift a)!

   Ledning: Corioliskraften kommer att vara mycket mindre än tyngdkraften. Så länge avvikelsen från vertikalen är liten kan den vertikala rörelsen fortfarande approximeras med den som fås utan corioliskraft. *4 poäng*

3. *P6/74 (variant)*

   En rak, homogen stav med massan m och längden l står på högkant på kanten av ett bord (se figur). Staven släpps från vila i det vertikala läget.
   Vid vilken vinkel θ släpper pinnen kontakten med underlaget under antagandet att den inte börjar glida?



4. En sfärisk kropp med massan 10 g och radien 8.0 mm är utsatt för en återförande kraft som är proportionell mot förflyttningen från jämviktsläget med proportionalitetskonstanten 0.50 N/m. Massan svänger i vatten, och utsätts därför för en bromsande kraft från vattnet (se nedan). Visa att den resulterande svängningsrörelsen kommer att vara svagt dämpad (ge även ett värde på den dimensionslösa koefficienten ζ) om amplituden är tillräckligt liten för att strömningen skall kunna betraktas som laminär. Ungefär hur stor får amplituden vara om detta skall gälla?

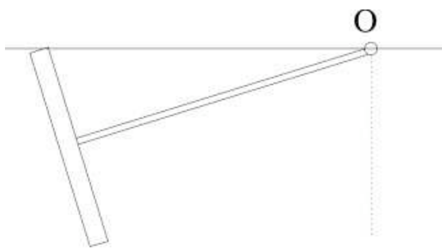
Kommentar: Vattenmotståndet beter sig olika för laminärt och för turbulent flöde. Vilket som gäller bestäms av Reynoldstalet, $Re = \frac{\rho d v}{\eta}$, där ρ är vattnets densitet, d föremålets typiska diameter, v dess fart och $\eta \approx 1.5 \times 10^3$ kg/(ms) vattnets viskositet. För Reynoldstal mindre än c:a 30 har man laminär strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten enligt $F \approx 6\pi\eta r v$, där r är sfärens radie.

Överkursuppgifter

---

5. *2008-05-27: 5*

   En rotationssymmetrisk snurra är momentfritt upphängd i en punkt i taket. Kan snurran rulla utan glidning på taket utan att "ramla ned"?
   (För full poäng krävs en detaljerad kvantitativ utredning i termer av rörelsemängdsmoment och dess tidsderivata; direkt insättning i någon färdig formel för precessionsrörelse godtas inte.)



6. *A22*
   En pärla kan glida (utan friktion) längs ett masslöst snöre. Snörets ändpunkter är fixa i punkterna $(x, y) = (0, 0)$ och $(a, 0)$. Snörets längd är $a\sqrt{2}$. Gravitationen verkar i negativ z-riktning.
   Finn pärlans stabila jämviktsläge och hitta frekvensen för små svängningar runt detta.

Lycka till!

Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Lösningsskiss

1. a) Se svar 2008-08-26: 1

   b) Upplevs horisontellt av passageraren om normalkraftens (från golvet) radiella komponent (mot krökningscentrum) precis motsvarar centripetalaccelerationen. $\tan\theta = \frac{\omega^2\rho}{g}$

   c) Masscentrums x-koordinat fås från villkoret $m\bar{x} = \int_0^a xdm = \int_0^a x\rho dx = \rho a^2/2$, där $m = \rho(a+b+c)$ är den totala massan. y- pch z koordinayter fås på samma sätt och vi får $\bar{\vec{r}} = \frac{a^2\hat{\mathbf{i}}+b^2\hat{\mathbf{j}}+c^2\hat{\mathbf{k}}}{2(a+b+c)}$.

   d) Symmetrin ger att deviationsmomenten är noll (t.ex. $I_{xy} = \int xydm = 0$). Integralerna går över hela kroppens utsträckning. Huvudtröghetsmomenten blir t.ex.

$$I_{xx} = \int (y^2+z^2)dm = 2\int_0^b (y^2+0)\rho dy + 2\int_0^c (0+z^2)\rho dz = \frac{2\rho}{3}(b^3+c^3).$$

   Tröghetsmatrisen blir slutligen $I = \frac{2\rho}{3}\begin{pmatrix} (b^3+c^3) & 0 & 0 \\ 0 & (a^3+c^3) & 0 \\ 0 & 0 & (a^3+b^3) \end{pmatrix}$.

2. Se lösning 2005-05-16: 2.

   a) $d = \omega\sqrt{\frac{h^3}{g}}\tilde{f}(\theta)$.

   b) $d = 6.5$ mm österut.

   Kommentar: Vi kan notera att centripetalaccelerationen är riktad i vertikal led men att storleken är mycket mindre än tyngdaccelerationen. Denna effekt är dessutom redan "inbyggd" i tyngdaccelerationens θ-beroende.
   Vad gäller Coriolisaccelerationen kommer den att bero på kulans hastighet. Här försummar vi den lilla hastighetskomponent som uppstår pga Coriolisaccelerationen och betraktar enbart Coriolisaccelerationen från den vertikala hastighetskomponenten, dvs $\dot{\vec{r}} \approx \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$.

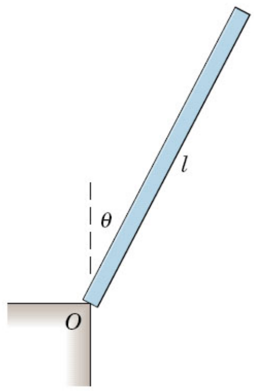
3. (a)

   Staven släpper då normalkraften går mot noll. Under första delen av rörelsen har vi rotation kring en fix punkt (eftersom staven inte glider). Lösningsstrategi:

   (a) Lös rotationsrörelsen (mha vridmomentsekv.)

   (b) Sätt upp translationsekv. (eftersom vi behöver ett utrryck för normalkraften).

   (c) Finn vinkeln då $N = 0$.



$\dot{L}_O = M_O$, där $L_O = I_O\dot{\theta}$. Detta ger $\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = mg\frac{l}{2}\sin\theta$, dvs $\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$

Vi behöver ej $\theta(t)$ utan kan istället skriva om $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$.
Vår rörelseekv. ger oss $\omega(\theta)$ genom integration: $\omega d\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta d\theta$.
Begynnelsevillkoret $\omega(\theta = 0) = 0$ ger $\omega^2 = \frac{3g}{l}(1 - \cos\theta)$

(b) En friläggning av staven vid en vinkel θ visar tyngdkraften och en normalkraft (riktad längs med staven). Rörelseekvationen i n-led blir

$$ma_n = m\frac{l}{2}\omega^2 = mg\cos\theta - N.$$

Med uttrycket för ω^2 ovan får vi $N = mg\left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos\theta\right)$.

(c) Staven släpper då $N = 0$, dvs $\cos\theta = 3/5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 53^o$.

4. Frilägg kulan vid en positiv förflyttning (med dämpningskraft från laminärt flöde) och teckna rörelseekvationen

$$m\ddot{x} = -kx - 6\pi\eta r\dot{x}.$$

Denna rörelseekvation kan skrivas om på traditionell form

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n x = 0,$$

med $\omega_n = \sqrt{k/m}$ och $\zeta = \frac{3\pi\eta r}{\sqrt{km}}$.
En dimensionskontroll visar att $[\zeta] = 1$. ok!
Med värden fås $\zeta \approx 10^{-3}$, dvs svag dämpning.

Vi tecknar rörelsen för att undersöka villkor på amplituden så att vi verkligen har laminärt flöde

$$x(t) = A\exp\left[-\omega_n\zeta t\right]\cos\left[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi\right].$$

Vi behöver farten $v = |\dot{x}|$ för att räkna ut Reynoldstalet.

$$\dot{x}(t) = A\exp\left[-\omega_n\zeta t\right]\left(-\omega_n\zeta\cos\left[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi\right] - \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cos\left[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi\right]\right),$$

och noterar att den andra termen är klart störst ($\omega_n\zeta \ll \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \approx \omega_n$) så att $|\dot{x}(0)| \approx A\omega_n$.
Från villkoret för laminärt flöde $Re = \frac{\rho r\omega_n A}{\eta} \lesssim 30$ ges villkoret på A.

5. Se 2008-05-27: 5

6. Se uppgift 22 i "An Introduction to Analytical Mechanics".

Ledning: Vid varje tidpunkt ser linan ut som en triangel sammansatt av två rätvinkliga trianglar. Summan av hypotenusornas längd är lika med snörets längd. Detta ger att partikelns bana ï en ellips och systemet har en frihetsgrad.