Tentamen i Mekanik för F, del 2
Tisdagen 26 augusti 2008, 14.00-18.00, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar , utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

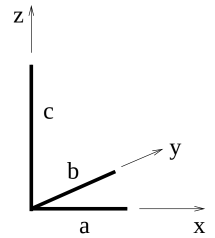
---

1. Svara på följande fyra delfrågor (endast svar skall ges)!
(12 poäng: 3 per korrekt besvarad deluppgift)

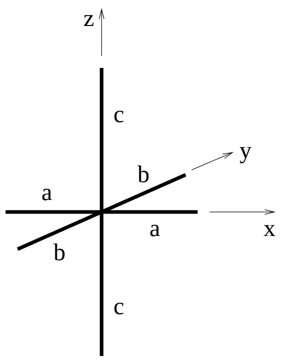
a) Ange SI-enheterna för storheterna kraft, energi, impuls, tröghetsmoment och rörelsemängdsmoment uttryckta i kilogram, meter och sekund.

b) Ett tåg går med farten 250 km/h i en kurva med krökningsradien 4.0 km. Hur mycket skall det luta för att passagerarna skall uppleva det som horisontellt?

c) En kropp består av tre pinnar med längderna a, b och c enligt figuren. Pinnarna har samma konstanta massa/längdenhet ϱ, och är hopfästade vinkelrätt mot varandra i ändpunkterna. Ange ortvektorn för masscentrum för den sammansatta kroppen!



d) En kropp består av tre pinnar med längderna $2a$, $2b$ och $2c$ enligt figuren. Pinnarna har samma konstanta massa/längdenhet ϱ, och är hopfästade vinkelrätt mot varandra i mittpunkterna. Ange tröghetsmatrisen för den sammansatta kroppen!



2. a) En kula kan glida utan friktion på en roterande horisontell skiva med radie R och vinkelhastighet Ω. Om kulan ges en begynnelsefart v (relativt skivan) i en punkt på skivans periferi, vilken riktning skall den ha (relativt skivan) för att passera skivans mittpunkt? Rita!
(4 poäng)

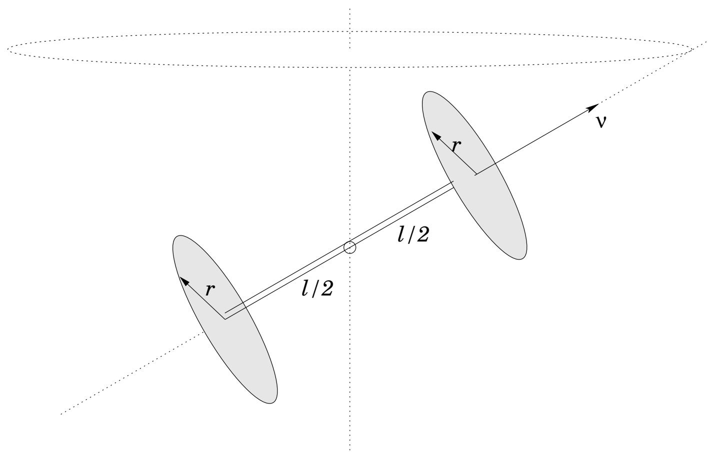
   b) Samma kula och samma skiva som i deluppgift a. Kulan är nu i vila på radien $a \neq 0$ relativt det *inertialsystem* där skivans mittpunkt är i vila. Visa att de fiktiva krafter (centrifugalkraft, corioliskraft) som kulan utsätts för i skivans vilosystem (ett roterande system med origo i vila i skivans mitt) tillsammans ger upphov till rätt relativ acceleration!
(8 poäng)

3. Ett homogent sfäriskt skal släpps från vila och rör sig därefter nedför ett sluttande plan med lutningsvinkel α. Friktionskoefficienten mellan sfären och planet är μ. För vilka värden på μ rullar respektive glider sfären? Bestäm dess acceleration då μ är tillräckligt stor för att det skall rulla, samt dess acceleration och vinkelacceleration då μ är för liten för att förhindra glidning!
(16 poäng)

Uppgifter för överbetyg

---

4. En stel kropp består av två homogena cirkelskivor, vardera med massan m och radien r, som är sammanfogade med en lätt pinne med längden l. Pinnen är fäst vinkelrätt mot skivorna i deras mittpunkter. Kroppen är momentfritt upphängd i sitt masscentrum (pinnens mittpunkt). Frågan gäller vilken sorts precessionsrörelse kroppen kan utföra. Låt spinnvektorn $\vec{\nu}$, som pekar längs kroppens symmetriaxel, bilda en konstant vinkel θ mot en rumsfix axel och precessera runt den (man kan tänka på den rumsfixa axeln som vertikal, men eftersom tyngdkraften inte spelar in kan det vara vilken axel som helst). Undersök, för alla möjliga värden på parametrarna i problemet, åt vilket håll precessionsrörelsen sker, moturs eller medurs sett uppifrån i figuren, dvs. om precessionsvektorn pekar uppåt eller nedåt i figuren. (En lösning som bygger på avläsning av en "formel" accepteras inte, utan det krävs resonemang kring och uträkning med rotationsvektorer, rörelsemängdsmoment osv.)
(10 poäng)



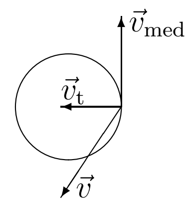
5. En projektil skjuts upp från jordytan med begynnelsefarten v_0 (understigande flykthastigheten) och stigningsvinkeln $\alpha < 90°$ (bortse från jordens rotation). Vilken är den högsta höjd h projektilen når, om luftmotståndet kan försummas? Beräkna för $v_0 = 8.0$ km/s och $\alpha = 60°$! (Det kan vara lämpligt att göra sina uttryck mer överskådliga genom att uttrycka saker i den dimensionslösa parametern $x = v_0^2 R/(2\gamma)$, där $\gamma = gR^2$.) Verifiera, t.ex. genom serieutveckling, att för små hastigheter v_0, $h \approx v_0^2 \sin^2 \alpha/(2g)$, som man får vid konstant tyngdacceleration! Är detta en god approximation för de numeriska värdena ovan? (Jordradien är c:a 637 mil.)
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 26/8-2008.

1. a) Kraft: $\mathrm{kg\,m/s^2}$, energi: $\mathrm{kg\,m^2/s^2}$, impuls: $\mathrm{kg\,m/s}$, tröghetsmoment: $\mathrm{kg\,m^2}$, rörelsemängdsmoment: $\mathrm{kg\,m^2/s}$.
   b) Lutningsvinkel 7.1 grader.
   c) Ortsvektor $\vec{R} = (a^2\hat{x} + b^2\hat{y} + c^2\hat{z})/(2(a+b+c))$.
   d) Tröghetsmatrisen är en diagonalmatris: $I = (2\rho/3)\mathrm{diag}(b^3+c^3, c^3+a^3, a^3+b^3)$.

2. Jag inför ett cartesiskt inertialsystem (X, Y, Z) med Z-axel utefter skivans vertikala rotationsaxel, samt ett koordinatsystem (x, y, z) fixerat i skivan, och med z-axel sammanfallande med Z-axeln. Hastigheten hos en punkt $\vec{r}$ på skivan är $\vec{v}_{\mathrm{med}} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, där $\vec{\Omega} = \Omega\hat{Z}$ är skivans rotationsvektor.

   a) För att passera skivans mittpunkt måste kulan ha hastighet relativt inertialsystemet, $\vec{v}_t = \vec{v} + \vec{v}_{\mathrm{med}}$ riktad mot skivans centrum. De tre hastighetsvektorerna bildar en triangel med rät vinkel mellan $\vec{v}_t$ och $\vec{v}_{\mathrm{med}}$ och $\vec{v}$ pekande i den sökta riktningen. Den kan beskrivas av att den bildar en vinkel α med $\vec{v}_t$, där $\sin\alpha = v_{\mathrm{med}}/v = \omega R/v$.

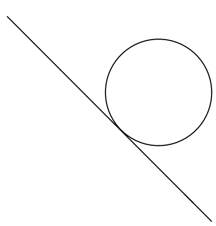
   b) Man kan välja systemens orientering så att kulans ortsvektor är

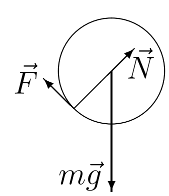
   $$\vec{r}(t) = R\hat{X} = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = R(\cos(\Omega t)\hat{x} - \sin(\Omega t)\hat{y}).$$

   Observera minustecknet som krävs för att stämma med den antagna rotationsrörelsen. Erforderliga storheter beräknas:

   $$\begin{aligned}
   \vec{v}_{\mathrm{rel}} &= \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = -R\Omega(\sin(\Omega t)\hat{x} + \cos(\Omega t)\hat{y}),\\
   m\vec{a}_{\mathrm{rel}} &= m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}) = -m\Omega^2\vec{r},\\
   \vec{F}_{\mathrm{ce}} &= -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = m\Omega^2\vec{r},\\
   \vec{F}_{\mathrm{co}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\mathrm{rel}} &= 2mR\Omega^2\hat{Z} \times (\sin(\Omega t)\hat{x} + \cos(\Omega t)\hat{y}) = -2m\Omega^2\vec{r}.
   \end{aligned}$$

   Med dessa uttryck kollar man lätt att rörelseekvationen $m\vec{a}_{\mathrm{rel}} = \vec{F}_{\mathrm{co}} + \vec{F}_{\mathrm{ce}}$ är uppfylld.





3. Beteckningar: Planets lutningsvinkel α. Skalets radie a. Skalets massa m. Skalets tröghetsmoment med avseende på masscentrum $I = (2/3)ma^2$. x = koordinat som anger hur långt masscentrum rört sig utför planet. ω = skalets vinkelhastighet, positiv för rullning utför planet. N = normalkraften från planet på skalet. F = friktionskraften på skalet från planet. Rörelseekvationerna för skalets rotation kring masscentrum, för dess translationsrörelse utför planet, samt jämviktsekvationen i riktningen vinkelrätt mot planet är, respektive:

   $$\begin{aligned}
   I\dot{\omega} &= aF,\\
   m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - F,\\
   N &= mg\cos\alpha.
   \end{aligned}$$

Nu har vi två fall som måste behandlas var för sig, (a) skalet rullar utan att glida, och (b) skalet både rullar och glider.

I fall (a) har vi ett tvångssamband mellan x och ω: $\dot{x} = a\omega$. (Dessutom ger friktionslagen en relation mellan F och N: $F \leq \mu N$.) De två rörelseekvationerna kombineras till en ekvation utan F och ω elimineras ur den med hjälp av tvångssambandet. Resultatet blir en ekvation som ger ett uttryck för accelerationen i fall (a):

$$\ddot{x}_{(a)} = mg \sin\alpha/(m + I/a^2) = (3/5)g \sin\alpha.$$

I fall (b) har vi inget tvångssamband, men i stället ger friktionslagen i detta fall en ekvation, $F = \mu N$. Den bestämmer tillsammans med jämviktsekvtionen ovan friktionskraften till $F = \mu mg \cos\alpha$, och rörelseekvationerna ger acceleration och vinkelacceleration

$$\ddot{x}_{(b)} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad \dot{\omega}_{(b)} = aF/I = (3\mu g/2a)\cos\alpha.$$

Det återstår att avgöra när det ena eller andra fallet inträffar. I fall (a) måste friktionskoefficienten vara tillräckligt stor för att förhindra glidning. Eftersom vi nu känner accelerationen kan vi beräkna friktionskraften ur rörelseekvationen och kolla friktionsrelationen. $\mu \geq F/N = (\sin\alpha - (3/5)\sin\alpha)/\cos\alpha = (2/5)\tan\alpha$.

I fall (b) förutsätts skalet glida utför planet. Vi kan kolla om skalets kontaktpunkts acceleration utför planet enligt vår beräkning verkligen är positiv. $0 < \ddot{x} - a\dot{\omega} = \ddot{x} - a^2F/I = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - (3/2)\mu\cos\alpha)$. Detta kan skrivas $\mu < (2/5)\tan\alpha$. Observera att kriterierna för de två faller är komplementära. Det ger en räknekontroll. Det är förresten enkelt men ändå meningsfullt att dimensionskontrollera slut-ekvationerna och -relationen

4. Kroppens tröghetsmoment med avseende på masscentrum är, för symmetriaxeln $I_{\parallel} = mr^2$, och för axlar vinkelräta mot symmetriaxeln $I_{\perp} = m(r^2 + \ell^2)/2$. Eftersom inget yttre kraftmoment med avseende på masscentrum verkar på kroppen så måste den röra sig så att rörelsemängdsmomentet är konstant. Jag inför ett rumsfixt cartesiskt koordinatsystem (X, Y, Z) så att rörelsemängdsmomentet pekar i Z-riktningen, $\vec{L} = L\hat{Z}$. Z-riktningen definierar den rumsfixa axel som nämns i tesen. (Man kan tänka sig att $\hat{Z}$ pekar vertikalt uppåt.) Om man vill kan man begränsa sig till fallet $L > 0$, för när det är avklarat kan man lätt gå till fallet $L < 0$ genom att ändra tecknet på L och på alla rotationsvektorer. Jag inför också ett rörligt cartesiskt koordinatsystem (x, y, z) sådant att kroppens symmetriaxel pekar i riktning $\hat{z}$, och sådant att $\hat{y}$ alltid ligger i det plan som spänns av $\hat{Z}$ och $\hat{z}$, dvs $\hat{Z} = \hat{z}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$, där θ är vinkeln mellan rörelsemängdsmoment och symmetriaxel. Kroppens rotationsvektor måste också ligga i detta plan, och brukar skrivas som spin plus precession så här $\vec{\omega} = s\hat{z} + \Omega\hat{Z}$. Observera att man kan byta tecknet på symmetriaxelriktningen, $\theta \to \pi - \theta$, utan att ändra den fysiska situationen om man samtidigt byter tecknet på s. Därför kan vi, om vi vill, begränsa oss till $\cos\theta > 0$ eller till $s > 0$, men vi kan inte göra bägge begränsningarna samtidigt. Vi uttrycker nu rörelsemängdsmoment i rotation och tröghetsmoment, och får ett samband mellan våra parametrar från villkoret att rörelsemängdsmomentet skall peka i riktning $\hat{Z}$.

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= (s + \Omega\cos\theta)\hat{z} + \Omega\sin\theta\hat{y}, \\
\vec{L} &= I_{\parallel}(s + \Omega\cos\theta)\hat{z} + I_{\perp}\Omega\sin\theta\hat{y} = \\
&\quad L\hat{Z} = L\hat{z}\cos\theta + L\hat{y}\sin\theta. \\
\Rightarrow \qquad I_{\parallel}(s + \Omega\cos\theta)/(L\cos\theta) &= I_{\perp}\Omega\sin\theta/(L\sin\theta).
\end{aligned}$$

Av de två olika uttrycken för impulsmomentet följer att $L = I_\perp \Omega$, och därmed $\vec{L} = I_\perp \vec{\Omega}$. Precessionen uttryckt i övriga parametrar blir

$$\Omega = \frac{I_\parallel}{(I_\perp - I_\parallel)} \frac{s}{\cos\theta} = \frac{2r^2 s}{(\ell^2 - r^2)\cos\theta}.$$

Av detta uttryck följer bland annat att om axlarna definierats så att $\theta < \pi/2$ och om $\ell < r$ så att $I_\perp < I_\parallel$, då har spin och precession motsatta tecken. Det beror på att i detta fall bildar $\vec{\omega}$ större vinkel med symmetriaxeln än $\vec{L}$, så att vektorerna $\vec{\omega}$ och $\hat{z}$ ligger på var sin sida om $\vec{L}$. När $\vec{\omega}$ då uttrycks som summan av precession och spin, dvs en vektor i riktning som $\vec{L}$ och en i riktning $\hat{z}$, då blir koefficienten för den senare, dvs spinnet, negativt om precessionen är positiv.

Sammanfattningsvis, för en axelsymmetrisk stel kropp som inte påverkas av yttre kraftmoment pekar precessionsvektorn alltid som rörelsemängdsmomentet. Spinnet däremot kan ha olika tecken beroende på tecknet på $\cos\theta$ (dvs symmetriaxelns och spinnets definition), samt på tecknet på $I_\perp - I_\parallel$.

5. Banans största avstånd från jordens centrum, $R + h$, kallar jag r, och hastigheten då, som är horisontell, betecknas v. Energi- och rörelsemängdsmomentkonserveringslagarna ger två ekvationer som bestämmer r och v.

$$L/m = Rv_0 \cos\alpha = rv,$$
$$E/m = v_0^2/2 - \gamma/R = v^2/2 - \gamma/r.$$

Jag löser v ur första ekvationen och sätter in i den andra. Sedan multiplicerar jag med $r^2/(R\gamma)$, och ersätter $v_0^2 R/(2\gamma)$ med parametern x som definierades i tesen. Det blir en andragradsekvation för r/R. Jag löser den och serieutvecklar lösningen till linjär ordning i x.

$$(1-x)(r/R)^2 - r/R + x\cos^2\alpha,$$
$$\frac{r}{R} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(1-x)x\cos^2\alpha}}{2(1-x)} \approx \frac{1 + 1 - 2x\cos^2\alpha}{2(1-x)} \approx 1 + x\sin^2\alpha.$$

För små hastigheter är x liten och approximationen god, och resultatet kan skrivas $h \equiv r - R = Rx\sin^2\alpha = v_0^2 \sin^2\alpha/(2g)$, det välkända resultatet som gäller när gravitationsaccelerationen är konstant och jorden platt.

Approximationen bör vara god när $x << 1$. I det numeriska exemplet är $x \approx (8000)^2/(2 \cdot 10 \cdot 6400000) = 1/2$, inte så liten, och "exakta" och approximativa uttrycken ger $x = 0.5121$, $h = 0.9123R = 581$ mil, respektive $h \approx Rx\sin^2\alpha = 0.384R = 245$ mil.