Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Lördagen 26 augusti 2006, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231, 168437

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

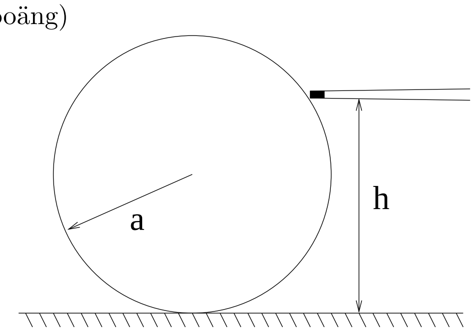
Obligatoriska uppgifter

---

1. Ange för varje av de tolv påståndena om det är korrekt eller ej.
(12 poäng, 2 för varje rätt svar utöver 6)

i) Vid en icke-elastisk kollision kan mekanisk rörelsemängd och energi övergå till andra rörelsemängds- och energiformer.
ii) Rörelsemängden hos en bisvärm beror bara på dess massa och masscentrums hastighet.
iii) Rörelseenergin hos en bisvärm beror bara på dess massa och masscentrums hastighet.
iv) Att en konståkare ökar sin rotationshastighet när han drar armarna mot kroppen beror på att tröghetsmomentet minskar.
v) Corioliskraften på en jumbojet med massan 150 ton kan överstiga 1 MN.
vi) Inre krafter i ett partikelsystem ändrar inte rörelsemängdsmomentet.
vii) Det är i princip lika riktigt att säga att jorden står stilla och universum snurrar, som tvärtom; skillnaden går inte att mäta.
viii) En stel kropp vars masscentrum är tvingat att röra sig på en linje har fyra frihetsgrader.
ix) Om A påverkar B med ett vridande moment $\vec{M}$ så påverkar B A med momentet $-\vec{M}$.
x) Om man dubblerar alla dimensioner hos en kropp, utan att ändra densiteten, blir tröghetsmomenten 32 gånger så stora.
xi) Med tillräcklig mätnoggrannhet kan jordens rotationshastighet mätas genom att bestämma havsytans normalriktnings avvikelse från lodlinjen p.g.a. centrifugalkraften.
xii) En frigolitkula och en blykula med samma dimensioner faller lika fort i vacuum, att de inte gör det i luft beror på att luftmotståndskraften är större på frigolitkulan vid samma hastighet.

2. Bestäm höjden h i figuren så att biljardbollen rullar utan glidning när man givit den en horisontell knuff med biljardkön (pinnen), oberoende av friktionskoefficienten mot underlaget.
(14 poäng)



3. En planet (massa m), kretsar runt solen (massa M) i en cirkulär bana. Eftersom gravitationskraften är $-(mMG/r^2)\hat{r}$ och den skall balansera centrifugalkraften $(mv^2/r)\hat{r} = (L^2/mr^3)\hat{r}$, blir radien för banan $r_0 = L^2/m^2MG = MG/v^2$. Omloppstiden räknas ut till $T = 2\pi r_0/v = 2\pi\sqrt{r_0^3/MG}$.

   Antag nu att planetens rörelse inte är riktigt cirkulär, utan att radien varierar med tiden. Eftersom rörelsemängdsmomentet L inte ändras under rörelsen, kan man betrakta centrifugalkraften som minus derivatan av en term $L^2/2mr^2$ i en potential, så att man i praktiken betraktar endimensionell rörelse i en potential

$$V(r) = -\frac{mMG}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad .$$

   Beräkna periodtiden för små svängningar i denna potential. Jämför den med omloppstiden ovan och dra någon slutsats om utseendet hos en planetbana vars radie inte är riktigt konstant.
   (14 poäng)

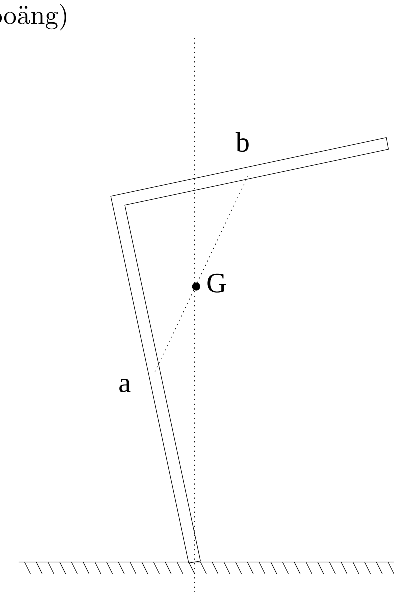
Uppgifter för överbetyg

---

4. Halleys komet var senast nära solen 1986. Den är en av de mest kända kometerna, och har siktats regelbundet sedan före Kristus. Enligt http://en.wikipedia.org har dess bana en period på 75.3 år, ett närmsta avstånd till solen på 0.586 AU, ett största avstånd på 35.1 AU, en excentricitet på 0.967 och en lutning relativt jordens bana på 162.3°. Hur många av dessa uppgifter behövs för att kunna bestämma de andra? Kontrollera om uppgifterna är inbördes konsistenta!
   (8 poäng)

   (1 (julianskt) år = 365.257 dagar
   Solmassan: $M_\odot = 1.9811 \times 10^{30}$ kg
   Gravitationskonstanten: $G = 6.674 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
   Jordens medelavstånd till solen: 1 AU = 1.49598×10^{11} m)

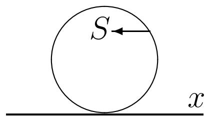
5. Figuren visar en stel kropp som är sammansatt av två smala homogena stänger med längderna a och b och densiteten (massa/längdenhet) ϱ. En person funderar litet på denna kropp, balanserar den på ett golv enligt figuren så att tyngdpunkten hamnar rakt ovanför kontaktpunkten med golvet för att finna tyngdpunkten, och tänker sedan: "Om det finns någon axel genom stödpunkten som den kroppen skulle kunna rotera kring så är det väl den som nu är vertikal". Personen sätter snurr på kroppen runt vertikalen i just denna position. Har hon rätt, dvs. är detta en huvudtröghetsaxel m.a.p. stödpunkten? Bestäm och rita (noggrant) ut huvudtröghetsaxlarna och bestäm huvudtröghetsmomenten för specialfallet $a = b$. Bestäm också rörelsemängdsmomenten då rotationsvektorn är riktad som i experimentet ovan (inte tidsberoendet, utan dess storlek och riktning momentant när den ges denna rotation).
   (12 poäng)



Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 26/8-2006.

1. De 12 påståendena är riktiga (R) respektive felaktiga (F) enligt följande lista:
FRFR FRFR RRFF

2. Förutsatt att kön inte slinter, så påverkar den bollen med en horisontell stötkraft. Den ger bollen en impuls S i kontaktpunkten. Om bollen är i vila före stöten, så har den alltså rörelsemängd S åt vänster och rörelsemängdsmoment med avseende på sitt masscentrum $(h - a)S$ moturs alldeles efter stöten. Stöten ger inga reaktionskrafter från underlaget eftersom den är horisontellt riktad. Rörelsemängd och rörelsemängdsmoment bestämmer kulans masscentrumhastighet och rotation



$$mv_x = -S,$$
$$I_G\omega = (h - a)S.$$

För att kulan inte skall glida måste hastigheten i kontaktpunkten vara noll

$$v_x + a\omega = 0.$$

Elimination S och v_x mellan dessa tre ekvationer ger ett samband där även ω kan förkortas bort, så att man får

$$(h - a) = I_G/(ma) = (2/5)a.$$

För sista likheten användes uttrycket för homogent klots tröghetsmoment med avseende på masscentrum $I_G = (2/5)a^2$. Sökta höjden är alltså: $h = (7/5)a$.

3. I potentialuttrycket dominerar andra termen när r är litet, och ger då en avtagande funktion av r. För stora r dominerar första termen och medför att potentialen då är en växande funktion av r. Därför har potentialen (minst) ett minimum. Nära minimet kan potentialen approximeras med ett andragradspolynom som beskriver rörelsen i radiell led som harmonisk svängning. Minimipunkten bestäms genom att sätta derivatan av potentialfuntionen till noll. För att bestämma approximativa uttrycket deriverar man sedan ytterligare en gång. Så här:

$$V(r) \approx V(r_0) + \frac{1}{2}V''(r_0)(r - r_0)^2, \qquad \text{där} \qquad V'(r_0) = 0.$$
$$V'(r) = \frac{mMG}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}; \qquad r_0 = \frac{L^2}{m^2MG};$$
$$V''(r)|_{r=r_0} = -\frac{2mMG}{r_0^3} + \frac{3L^2}{mr_0^4} = \frac{mMG}{r_0^3}.$$

Enligt formler för vinkelfrekvens och svängningstid vid harmonisk svängning har man

$$\omega^2 = V''(r_0)/m; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{MG}}.$$

Detta är precis samma uttryck som det för omloppstiden. Det betyder att efter varje varv återkommer planeten, i denna approximation åtminstone, precis till utgångspunkten.

4. Ett sätt att räkna oberoende banparametrar är följande. Kometen är en partikel i tre dimensioner. Rörelseekvationernas lösning innehåller därför sex integrationskonstanter, dvs sex oberoende parametrar. Två av dessa bestämmer banans plan. Vi vet att banan är en ellips i detta plan. Storaxelns riktning är en parameter, kometens position i banan vid tiden noll en annan. Alltså behövs två oberoende parametrar till för att bestämma rörelsen fullständigt.

   Av de fem uppgifterna i texten handlar en om banplanets orientering. Den är oberoende av de andra uppgifterna. De fyra andra uppgifterna handlar om banans form och storlek och om hastigheten. De är oberoende av banans orientering och av positionen i banan vid tiden noll. Därför beror de bara av de två sista oberoende parametrarna i stycket ovan. Svaret på första frågan är alltså tre.

   Och det blir 5-3=2 oberoende samband att kontrollera. Detta kan förstås göras på flera olika sätt. Till exempel bestäms både excentriciteten e och omloppstiden T av största och minsta avståndet, $r_{\max}$ och $r_{\min}$. Sambanden kan tex skrivas

$$\begin{aligned} r_{\max} + r_{\min} &= 2a, \\ r_{\max} - r_{\min} &= 2ae, \qquad\qquad M_{\odot} G (T/2\pi)^2 = a^3. \end{aligned}$$

   När man kontrollerar dem kan det vara lämpligt att försöka uttrycka den kvantitet som angivits med minst noggrannhet, eller den som är minst känslig för fel i de övriga parametrarna, i de övriga parametrarna. De två första sambanden ger

$$1 - e = 2(r_{\min}/r_{\max})/(1 + r_{\min}/r_{\max}).$$

   De givna uppgifterna ger högerledet med 3 siffrors noggrannhet, men vänsterledet med bara 2. Därför använder jag sambandet till att bestämma excentriciteten. Resultatet blir $e = 0.9672$, i utmärkt överensstämmelse med den givna uppgiften $e = 0.967$.

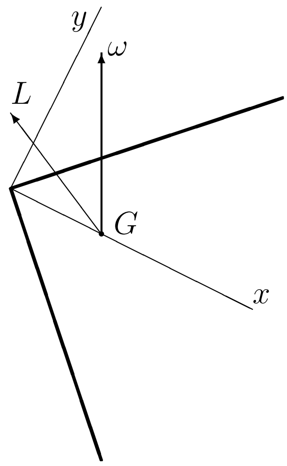
   Den sista ekvationen, Keplers tredje lag, använder jag till att beräkna a från T. Resultatet är $a = 17.81$ AU, att jämföra med $a = 17.84$ AU, som första ekvationen ger. Även här är överensstämmelsen god. Om man antar att alla givna numeriska värden är rätt avrundade, så ligger gränsen där man skulle börja oroa sig för att siffrorna inte passar ihop ungefär vid 7 enheters skillnad i sista siffran.

   Ett alternativt sätt att kontrollera Keplers tredje lag för kometen är att dividera den med Keplers tredje lag för jorden. Man uttnyttjar då att de givna sifferuppgifterna förutsätts konsistenta med Keplers tredje lag för jorden. Detta sätt är numeriskt lättvindigare:

$$(T/T_{\oplus})^2 = (a/a_{\oplus})^3; \qquad (\frac{1}{2}(35.1 + 0.586))^3/75.3^2 = 1.002$$

5. Jag börjar med specialfallet $a = b$, och inför ett koordinatsystem sådant att kroppens vinkel ligger i origo, och de bägge skänklarna i riktningarna $\hat{x} + \hat{y}$ och $\hat{x} - \hat{y}$, se nästa sida. Det är valt så att tröghetstensorn, pga kroppens symmetriska läge, är diagonal i detta koordinatsystem. De bägge skänklarnas masscentra ligger mitt på skänklarna, i $(1, \pm 1)a/\sqrt{8}$, och hela kroppens masscentrum mitt emellan dem, i $(1, 0)a/\sqrt{8}$. Kroppen är invariant under spegling i xy-planet. Därför är deviationsmomenten I_{xz} och I_{yz} noll. Den är också invariant under spegling i x-axeln. Därför är också I_{xy} noll. Dessa symmetriargument fungerar lika bra för tröghetstensorn med avseende på masscentrum som för tröghetstensorn med avseende på origo. Från definitionen av tröghetsmoment finner vi hu-

vudtröghetsmomenten med avseende på masscentrum

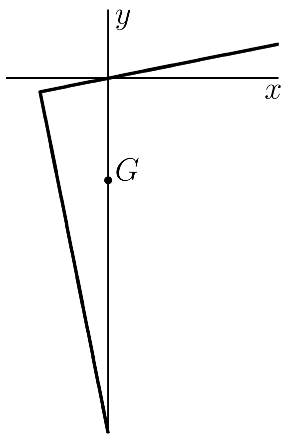


$$I_{\mathrm{G}xx} = 2\varrho \int_0^a (\ell/\sqrt{2})^2 \, d\ell = \varrho a^3/3,$$
$$I_{\mathrm{G}yy} = 2\varrho \int_{-a/2}^{a/2} (\ell/\sqrt{2})^2 \, d\ell = \varrho a^3/12.$$

Eftersom kroppen ligger i ett plan är det tredje huvudtröghetsmomentet $I_{\mathrm{G}zz} = I_{\mathrm{G}xx} + I_{\mathrm{G}yy} = \varrho a^3 5/12$. Eftersom alla huvudtröghetsmomenten är olika så finns inga andra huvudtröghetsaxlar än $\hat{x}, \hat{y}$, och $\hat{z}$. Svaret på första frågan är alltså nej, åtminstone när $a = b$. Man kan också dra slutsatsen att svaret i allmänhet är nej också när $a \neq b$.
Nu antas kroppen rotera kring axeln genom nedre skänkelns spets och masscentrum. Det betyder att rotationsvektorn pekar i riktningen $(1,0)a/\sqrt{8} - (1,-1)a/\sqrt{2} = (-1,2)/\sqrt{8}$. Den kan då skrivas $\vec{\omega} = (-1,2)\omega/\sqrt{5}$. Kroppens rörelsemängdsmoment kan nu beräknas

$$\vec{L} = (I_{\mathrm{G}xx}\omega_x, I_{\mathrm{G}yy}\omega_y) = (-2,1)\frac{\varrho a^3 \omega}{6\sqrt{5}}.$$

Det är beräknat med avseende på masscentrum, men eftersom masscentrum inte rör sig är det oberoende av momentpunkten. Om kroppen fortsätter att rotera kring sitt masscentrum med rotationsvektorn $\vec{\omega}$, vars riktning är konstant både i rummet och relativt kroppen, så kommer rörelsemängdsmomentet $\vec{L}$ att vara fixt relativt kroppen, dvs rotera med vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ i rummet. Då kräver rörelsemängdsmomentlagen att kroppen påverkas av ett kraftmoment $\vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{L}$. Rörelsemängdsmomentets storlek är $L = a^3\omega/6$, och dess vinkel θ mot vertikalen i figuren kan bestämmas genom skalärmultiplikation med rotationsvektorn, med resultatet $\cos(\theta) = 4/5$, $\theta \approx 37°$.
Anm 1: En alternativ och mer systematisk metod, som fungerar även när man inte hittar några symmetriargument, är att först beräkna tröghetstensorn i något lämpligt ortogonalt koordinatsystem. Sedan kan man bestämma dess egenvärden och den ortogonala transformation (=rotation) som gör den diagonal. Hur detta görs förklaras i kursen i lineär algebra.
Anm 2: Att axeln genom masscentrum och ena skänkelns spets inte är en huvudtröghetsaxel för något värde på a/b kan man se så här. Kriteriet för att den skall vara det är att $I_{xy} = 0$ i koordinatsystem med $y-$axel = rotationsaxeln, se figuren. Origo kan väljas var som helst på rotationsaxeln. Enligt definitionerna av tröghetstensor och masscentrum gäller

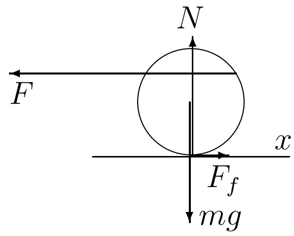


$$I_{xy} = -\Sigma_i m_i x_i y_i; \qquad 0 = \Sigma_i m_i x_i.$$

Summorna är över alla masspunkter (=atomer) som kroppen består av. Att I_{xy} inte beror av var på rotationsaxeln man väljer origo är lätt att se också algebraiskt. Flyttning av origo innebär addition av andra ekvationen, multiplicerad med flyttsträckan. Jag väljer skärningspunkten med övre skänkeln till origo. Då ser man medsamma att $I_{xy} < 0$, för alla termer i summan är ≤ 0.

2. Alternativ lösning till uppgift 2, inspirerad av studenternas. Antag att vinkelhastigheten moturs är ω, stötkraften F, normalkraft och friktionskraft från underlaget N och F_f, samt friktionskoefficient mot underlaget μ. Biljardbollens rörelseekvationer, villkoret för ingen glidning mot underlaget, friktionslagen, samt tröghetsmoment med avseende på masscentrum kan skrivas

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_f - F, \\ 0 &= N - mg, \\ I_G\dot{\omega} &= (h-a)F + aF_f \\ \ddot{x} &= -a\dot{\omega}, \\ |F_f| &\leq \mu N, \\ I_G &= 2a^2/5. \end{aligned}$$



Vi använder 4 av dessa ekvationer till att eliminera de 4 kvantiteterna $I_G, N, \dot{\omega}, \ddot{x}$. Då återstår en olikhet och en ekvation som kan skrivas

$$\begin{aligned} |F_f| &\leq \mu mg \\ (7a/5 - h)F &= (7a/5)F_f. \end{aligned}$$

Stöt innebär mycket stor kraft F under mycket kort tid. Friktionskraften är däremot begränsad av olikheten, till att vara inte mycket stor. Den sista ekvationen är därför vanligen inte uppfylld. Det som då händer är att kulan glider, så att en av de ekvationer vi startade med var fel. Undantaget är om $|7a/5 - h|$ är tillräckligt litet. Hur litet beror av bl a F och μ. För att ekvationen skall vara uppfylld för alla μ (även $\mu = 0$) måste man ha $h = 7a/5$. Detta är alltså det rätta svaret på uppgiften.
Ett svar sådant som $h = (7a/5)(1 - F_f/F)$ är fel, därför att det inte svarar på frågan i uppgiftstexten, eftersom F_f inte är oberoende av friktionskoefficienten utan begränsad av friktionslagen.