Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Tisdagen 16 augusti 2005, 14.00-18.00, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: NN, tel. 772????

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

---

1. En dörr är 230 cm hög, 100 cm bred och väger 15 kg. Massan är jämnt fördelad över dörrens yta. Den skall utrustas med en stängningsautomatik som utövar ett vridande moment på dörren som är proportionellt mot öppningsvinkeln, samt ett vridande moment proportionellt mot dörrens vinkelhastighet. Ange, utgående från väl motiverade resonemang, praktiskt lämpliga värden på de två proportionalitetskonstanterna!
(10 poäng)

2. Galileo Galilei släpper en kula från det lutande tornet i Pisa, på ungefär 44° nordlig bredd. Tornets höjd h är 55 m. Luftmotståndet kan försummas. På grund av corioliskraften landar inte kulan rakt nedanför den punkt den släpps från, utan ett litet avstånd d därifrån.

   a) Med vetskap om att corioliskraften är proportionell mot ω, jordens rotationshastighet, kan man sluta sig till att d är proportionell mot ω. Använd dimensionsanalys för att avgöra vilken potens av h som d är proportionell mot!

   b) Bestäm avvikelsen, till storlek och riktning (kontrollera mot deluppgift a)!

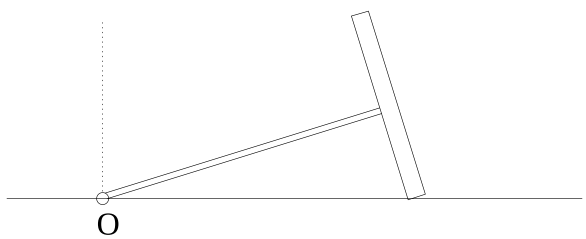
   Ledning: Corioliskraften kommer att vara mycket mindre än tyngdkraften. Sålänge avvikelsen från vertikalen är liten kan den vertikala rörelsen fortfarande approximeras med den som fås utan corioliskraft.
   (15 poäng)

3. Ett homogent klot rullar nedför ett plan med lutningsvinkeln α utan att glida, under inverkan endast av tyngdkraften och kontaktkraften från planet. Beräkna dess acceleration, dels genom att dela upp rörelsen i masscentrums translation och rotation kring masscentrum, dels genom att betrakta rörelsen som momentan rotation kring kontaktpunkten, och visa att de två metoderna ger samma resultat!
(15 poäng)

Uppgifter för överbetyg

---

4. En rotationssymmetrisk kropp är uppbyggd av en lätt axel med längden ℓ, på vilken en tunn homogen cirkelskiva med radie r och massa m är fästad vinkelrätt mot axeln. Axelns ände är momentfritt fästad i en punkt O på ett horisontellt plan, och cirkelskivan rullar utan glidning mot planet så att precessions-hastigheten runt vertikalen genom O är Ω. Bestäm kraften på kroppen från infästningen i punkten O samt kontaktkraften på cirkelskivan i kontaktpunkten med planet (det får förutsättas att den senare saknar horisontell komponent) till storlek och riktning!
(10 poäng)



5. En kropp med massan m påverkas av en återförande kraft med fjäderkonstant k samt en viskös dämpkraft proportionell mot hastigheten med proportionalitetskonstant $-b$. Dessutom utsätts den för en harmonisk kraft $F = F_0 \cos \omega t$. Efter det att eventuella transienter har dämpats ut visar sig kroppens svängningar ligga $\pi/4$ (radianer) efter den yttre kraften i fas. Bestäm konstanten b uttryckt i k och m! Bestäm också partikulärlösningens amplitud!
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 16/8-2005.

1. Jag tänker mig att det rör sig om, antingen en sådan dörr som bara skall svänga igen mjukt när den lämnas för sig själv, eller också en svängdörr som kan svänga ut åt bägge hållen. Men inte en sådan dörr som man vill skall slå igen med viss kraft, så att den låser sig i stängt läge av sig själv, för de brukar ha annorlunda fungerande stängningsanordningar.
   Dörrens tröghetsmoment med avseende på vridningsaxeln är
   $$I = mb^2/3 = 5\,\mathrm{kg\,m^2}.$$
   Rörelseekvation för dörrens svängning är
   $$I\ddot{\theta} = -c\dot{\theta} - k\theta.$$
   Högerledet består av stängningsanordningens två kraftmoment enligt uppgiftstexten. Kraftmomentet $-k\theta$ stänger dörren om $k > 0$. Kraftmomentet $-c\dot{\theta}$ dämpar svängningsrörelsen om $c > 0$. Det gäller att välja k så att dörren får upp lagom fart, och c så att den stannar så fort som möjligt. Det är enklast att först bestämma lämpligt c givet k. Om rörelsen är underdämpad innehåller bägge partikulärlösningarna en faktor $\exp(-tc/2I)$. De är dämpade svängningar, och dämpningen sker snabbare ju större c väljs. Om rörelsen är överdämpad är bägge partikulärlösningarna exponentialfunktioner. Den långsammast avtagande avtar långsammare ju större c väljs. För att uppnå snabbast möjliga garanterade avtagande amplitud för svängdörren är det därför bäst att välja c motsvarande kritisk dämpning.
   En dörr av första slaget kan antingen slå igen med stöt efter ändlig tid, eller också minska sin amplitud exponentiellt under oändlig tid. Kraftig stöt medför icke önskvärda stötkrafter. Stötrisken kan inte elimineras helt. Om rörelsen är underdämpad sker stöt oberoende av startvillkor. Men om rörelsen är överdämpad sker den bara om dörren startas med tillräckligt stor stängande fart, inte om dörren startas utan fart, som vanligen är fallet om man är aktsam. Även för sådana dörrar finns alltså ett gott argument för att välja kritisk dämpning. Då är rörelseekvationen
   $$\begin{aligned}&\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0,\\ &w_0^2 = k/I, \quad 2\zeta w_0 = c/I, \quad \zeta = 1.\end{aligned}$$
   Eftersom en sekund är en typisk tidsskala för en dörrs rörelse, föreslår jag valet $w_0 = 1\,\mathrm{s^{-1}}$. Detta innebär följande val av propotionalitetskonstanterna
   $$\begin{aligned}k &= I\omega_0^2 = 5\,\mathrm{kg\,m^2/s^2} = 5\,\mathrm{Nm/radian},\\ c &= 2I\omega_0 = 10\,\mathrm{kg\,m^2/s} = 10\,\mathrm{Nm/(radian/s)}.\end{aligned}$$

2. a) Dimensionsanalys. d kan bero av h, g, ω, och latituden θ. Så vi bör ha ett samband på formen
   $$d = \omega f(h, g, \theta),$$
   med okänd funktion f. De ingående parametrarnas dimensioner är
   $$[d/\omega] = LT, \quad [h] = L, \quad [g] = L/T^2, \quad [\theta] = 1.$$

Tid- och längd-dimensionerna måste stämma överens i ekvationens bägge led. Dessa två villkor bestämmer f's beroende av g och h, med resultatet

$$d = \omega g^{-1/2} h^{3/2} \tilde{f}(\theta),$$

där $\tilde{f}$ är en ny okänd funktion. Om man dessutom observerar att d beror av vinkelhastighetens horisontella komponent, $\omega\cos(\theta)$, men inte av dess vertikala komponent, $\omega\sin(\theta)$, så blir sambandet bestämt upp till en propotionalitetskonstant,

$$d = \omega\cos(\theta) g^{-1/2} h^{3/2} \cdot \text{konst.}.$$

b) Rörelseekvation och corioliskraftuttryck är

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{z} + \vec{F}_c, \qquad \vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}.$$

Med koordinater så att basvektorerna $\hat{z}$, $\hat{x}$, och $\hat{y}$ pekar vertikalt, österut, och norrut, respektive, blir rörelseekvationen i komponentform

$$\begin{aligned}
&\vec{\omega} = \omega(\hat{z}\sin(\theta) + \hat{y}\cos(\theta)), \\
&\dot{\vec{r}} \approx \dot{z}\hat{z}, \qquad \text{(enligt ledning)} \\
&m\ddot{z} = -mg, \\
&m\ddot{x} = -2m\omega\cos(\theta)\dot{z}.
\end{aligned}$$

Lösningen är, med falltiden t_0,

$$\begin{aligned}
&z(t) = h - gt^2/2, \qquad t_0 = \sqrt{2h/g}, \\
&x(t) = \omega g\cos(\theta)\, t^3/3, \\
&d = x(t_0) = (1/3)\omega\cos(\theta) g^{-1/2}(2h)^{3/2} = \\
&= (1/3)\cdot 0.73\cdot 10^{-4}\cdot \mathrm{s}^{-1}\cdot 0.72\cdot (2\cdot 55\,\mathrm{m})^{3/2}(9.8\,\mathrm{m/s^2})^{-1/2} \approx 6.5\,\mathrm{mm}.
\end{aligned}$$

Svar: Avvikelsen är $d = 6.5$ mm åt öster.

3. Mina beteckningar: x = koordinataxel riktad utför lutande planet, x_c = masscentrums koordinat, ω = klotets vinkelhastighet, m = dess massa, a = dess radie, p = kontaktpunkten mellan klot och plan, F_c = friktionskraften i p, riktad uppför planet. $I_c = (2/5)ma^2$ = kulans tröghetsmoment med avseende på masscentrum. I_p = kulans tröghetsmoment med avseende på p = $I_c + ma^2 = (7/5)ma^2$.
a) Rörelsemängdslagen för masscentrums rörelse, och rörelsemängdsmomentlagen för rotationsrörelsen kring masscentrum ger

$$m\ddot{x}_c = mg\sin\alpha - F_c, \qquad I_c\dot{w} = -F_c\, a.$$

Om villkoret för ingen glidning i p, $\dot{x}_c + a\omega = 0$, används till att eliminera variabeln w, och om sedan F_c elimineras ur ekvationssystemet, återstår ekvationen

$$(m + I_c/a^2)\,\ddot{x}_c = mg\sin\alpha.$$

b) Rörelsemängdsmomentlagen med avseende på p ger

$$I_p \dot{\omega} = -amg \sin \alpha.$$

Om man använder sambandet mellan ω och $\dot{x}$, och sambandet mellan I_c och I_p, så ser man att de bägge rörelseekvationerna beskriver samma acceleration,

$$\ddot{x}_c = mg \sin \alpha \, a^2/I_p = (5/7)\, g \sin \alpha.$$

4. Jag använder beteckningarna i figur 7/20 och ekvation (7/27) i läroboken, samt N = normalkraften på cirkelskivan i kontaktpunkten med planet, F_v = vertikala komponenten och F_h = horisontella komponenten, riktad bort från snurran, av sökta kontaktkraften i O. Vi har, med hjälp av informationen i uppgiftstexten,

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \ell/\sqrt{\ell^2 + r^2}, \qquad & I &= mr^2/2, \\ \cos\theta &= r/\sqrt{\ell^2 + r^2}, \qquad & I_0 &= mr^2/4 + m\ell^2. \end{aligned}$$

Spinnet bestäms av precessionen och av att kontaktpunktens momentana hastighet är noll (eftersom skivan inte glider). Vi har

$$\dot{\psi} = \Omega, \qquad p = -\Omega\sqrt{\ell^2 + r^2}/r = -\Omega/\cos\theta.$$

Kraftmomentet i ekvation (7/27) är med avseende på O och orsakas av N och gravitationskraften. Ekvation (7/27) tar formen

$$mg\ell \sin\theta - N\sqrt{\ell^2 + r^2} = \Omega^2 \sin\theta (I(\cos\theta - 1/\cos\theta) - I_0 \cos\theta).$$

Denna ekvation bestämmer sökta kraften N till

$$N = mg \sin^2\theta + \frac{\Omega^2}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \tan\theta (I \sin^2\theta + I_0 \cos^2\theta),$$

där $\sin\theta$, $\cos\theta$, I, och I_0 är givna ovan. Kontaktkrafterna i O kan nu fås med hjälp av rörelsemängdslagen. Masscentrums acceleration är $\ell \sin\theta\Omega^2$ i samma riktning som F_h. Resultat

$$\begin{aligned} F_v &= mg - N = mg\cos^2\theta - \frac{\Omega^2}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \tan\theta (I \sin^2\theta + I_0 \cos^2\theta), \\ F_h &= m\ell \sin\theta\, \Omega^2. \end{aligned}$$

5. Enligt uppgiftstexten är rörelseekvationen och rörelsen respektive

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -b\dot{x} - kx + F_0 \cos(\omega t), \\ x(t) &= A\cos(\omega t - \pi/4) = A/\sqrt{2}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)), \end{aligned}$$

där A är den sökta amplituden. Insättning av ansatsen i rörelseekvationen, och identifiering av sinustermer och cosinustermer ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} A/\sqrt{2}(-m\omega^2 - b\omega + k) &= 0, \\ A/\sqrt{2}(-m\omega^2 + b\omega + k) &= F_0. \end{aligned}$$

Dess lösning ger svaret till uppgiftsfrågan:

$$\begin{aligned} b &= k/w - m\omega, \\ A &= F_0/(\sqrt{2}(k - m\omega^2)). \end{aligned}$$