Tentamen i Mekanik för F, del 2
Tisdagen 24 maj 2005, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

1. Ange för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt!
(8 poäng, 2 för varje korrekt svar utöver 4)

a. Corioliskraften på ett fordon som väger 1 ton och färdas rakt norrut på 58° nordlig bredd med farten $100\,\mathrm{km/h}$ är riktad österut och har storleken $3.4\,\mathrm{N}$.

b. Masscentrum för ett partikelsystem rör sig alltid med konstant och likformig hastighet.

c. Tröghetsmomentet, för en tunn regelbunden femhörning med konstant massa per ytenhet och total massa m, med avseende på en axel genom mittpunkten och vinkelrät mot femhörningens plan, är $\frac{\sqrt{5}}{2}ma^2$, där a är avståndet från mittpunkten till ett av hörnen.

d. Den totala fjäderkonstanten för två fjädrar som sätts i bredd är hälften så stor som för var och en av dem.

e. Närvaron av fiktiva krafter, dvs. avvikelse från Newtons första lag, indikerar att koordinatsystemet man använder inte är ett inertialsystem.

f. Om en kropp har en tröghetsmatris I som innehåller deviationsmoment i ett system, så följer det av den ortogonala transformationen $I' = PIP^t$ (där P är en ortogonal matris) att så är fallet i alla ortonormerade system.

g. Inre krafter i ett system kan ge upphov till vridande moment på systemet som helhet.

h. Tiden det tar för en mycket starkt dämpad partikel att, då den släpps från vila, t.ex. halvera sitt avstånd till jämviktsläget är större ju starkare dämpningen är.

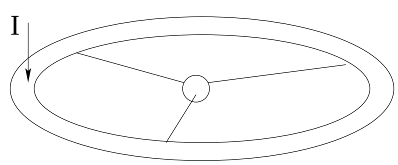
2. En sfärisk kropp med massan 10 g och radien 8.0 mm är utsatt för en återförande kraft som är proportionell mot förflyttningen från jämviktsläget med proportionalitetskonstanten 0.50 N/m. Massan svänger i vatten, och utsätts därför för en bromsande kraft från vattnet (se nedan). Visa att den resulterande svängningsrörelsen kommer att vara svagt dämpad (ge även ett värde på den dimensionslösa koefficienten ζ) om amplituden är tillräckligt liten för att strömningen skall kunna betraktas som laminär. Ungefär hur stor får amplituden vara om detta skall gälla?
(16 poäng)

   Vattenmotståndet beter sig olika för laminärt och för turbulent flöde. Vilket som gäller bestäms av Reynoldstalet, $Re = \frac{\rho d v}{\eta}$, där ρ är vattnets densitet, d föremålets typiska diameter, v dess fart och $\eta \approx 1.5 \times 10^{-3}$ kg/(ms) vattnets viskositet. För Reynoldstal mindre än c:a 30 har man laminär strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten enligt $F \approx 6\pi\eta r v$ där r är sfärens radie. För Reynoldstal från c:a 10^3 och uppåt har man turbulent strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten i kvadrat enligt $F \approx \frac{1}{2}\rho C_d A v^2$, där A är föremålets tvärsnittsarea och C_d en formfaktor som för en sfär är ungefär 0.5.

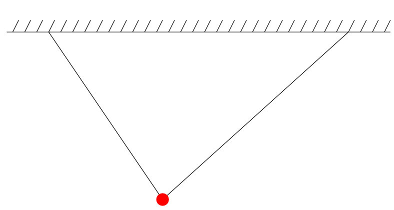
3. Man har diskuterat att montera svänghjul i stadsbussar för att kunna lagra energi vid inbromsning. Detta problem rör dock en annan hypotetisk tillämpning: dessa svänghjul skulle eventuellt kunna användas för att “motverka centrifugalkraften” då bussen svänger. Undersök om det finns något sätt att montera ett svänghjul i bussen så att detta åstadkoms, och isåfall hur dess rotationsvektor bör vara riktad. Fungerar det isåfall både för höger- och vänstersvängar? Ge en grov uppskattning av hur svänghjulet skulle behöva dimensioneras!
(16 poäng)

---

4. En rymdstation är formad som en smal torus (”doughnut”) enligt figuren. Dess radie är 200 m och dess massa 50 kiloton. Massan i övriga delar av rymdstationen är försumbar. Stationen roterar kring sin symmetriaxel så att den upplevda gravitationsaccelerationen vid periferin skall vara g. Vid ett tillfälle skjuts en rymdfarkost ut från torusen i en riktning parallell med rotationsaxeln, vilket åstadkommer en impuls i motsatt riktning av storleken $7.5 \cdot 10^5$ Ns. Beskriv rymdstationens rotationsrörelse därefter i termer av spinn och precession!
(10 poäng)



5. En liten kula kan glida friktionsfritt på ett lätt, tunt, otänjbart och lättböjligt snöre med längden l, vars ändar är fästa i samma höjd på avståndet a från varandra. Använd en energimetod för att bestämma periodtiden för små svängningar kring jämviktsläget!
(10 poäng)



Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 24/5-2005.

1. S F F F S F F S

2. Antag att strömningen är laminär, och att partikeln rör sig på x-axeln i ett koordinatsystem med origo i jämviktspunkten. Då är rörelseekvationen

$$\ddot{x} = -\frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = -2\zeta\omega_n\dot{x} - \omega_n^2 x.$$

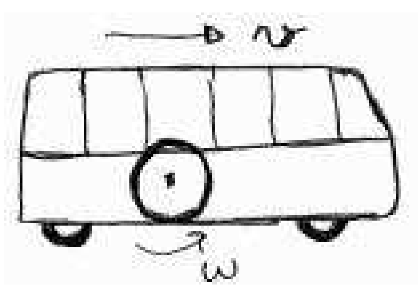
Dämpfaktorn blir $\zeta = \frac{6\pi\eta r}{m2\omega_n} = 3\pi\eta r/\sqrt{mk} = 3\pi \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8 \cdot 10^{-2}/\sqrt{10^{-2} \cdot 0.5} = 1.60 \cdot 10^{-3}$. (Dimensionskoll: $1 = [\zeta] = [\eta r/\sqrt{mk}] = \frac{M}{LT}L/\sqrt{M\frac{F}{L}} = \frac{M}{T}/\sqrt{\frac{MML}{TTL}} = 1$). Eftersom dämpfaktorn är mycket mindre än ett är rörelsen nästan odämpad harmonisk svängning, dvs nästan på formen

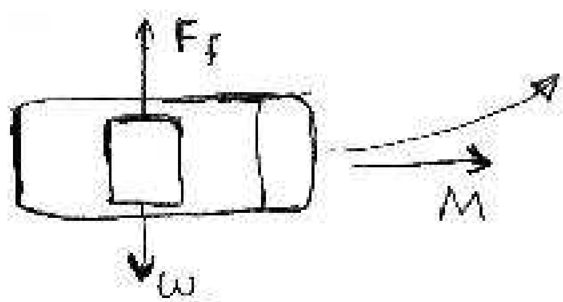
$$x(t) = A\sin(\omega_n t - \varphi), \qquad \dot{x}(t) = A\omega_n\cos(\omega_n t - \varphi).$$

Den kritiska hastigheten, v_c, som inte skall överskridas för att ovanstående beskrivning av rörelsen skall vara en god approximation motsvarar reynoldstalet 30. Motsvarande största amplitud är

$$A = \frac{v_c}{\omega_n} = \frac{30\eta}{\rho d}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{30 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-2}}\sqrt{\frac{10^{-2}}{0.5}} = 4 \cdot 10^{-4} = 0.4\,\mathrm{mm}.$$

Dimensionskontroll: $[\frac{\eta}{\rho d}\sqrt{\frac{m}{k}}] = \frac{M}{LT(M/L^3)L}\sqrt{M\frac{TTL}{ML}} = L$.





3. Svängning med krökningsradie R vid fart v kräver friktionskraft $F_f = m_b v^2/R$ på hjulen från vägbanan, som ger kraftmoment $M = h_G m_b v^2/R$ med avseende på bussens masscentrum, riktat enligt figuren. (h_G är bussens masscentrums höjd över vägbanan.) För att bussen inte skall välta måste vanligen kraftmomentsumman vara 0. M kompenseras då av momentet orsakat av att normalkrafterna på hjulen från vägbanan är större på ytterhjulen än innerhjulen i kurvan. Men, om det finns ett gyro i bussen skall kraftmomentsumman inte vara noll, utan lika med tidsderivatan av gyrots rörelsemängdsmoment. Om gyrot sitter som i figuren ser man att denna är riktad som M, och därför minskar normalkrafternas moment. Om svänghjulet har vinkelhastighet ω, massa m_h, tröghetsradie k, tröghetsmoment $I = m_h k^2$, så är rörelsemängdsmomentets tidsderivata $\dot{L} = I\omega\Omega = m_b k^2 \omega v/R$ när bussen går genom kurvan och därigenom vrider sig med vinkelhastigheten $\Omega = v/R$. Exakt kompensation, dvs inget normalkraftsmoment, inträffar när $M = h_G m_b v^2/R = m_b k^2 \omega v/R$. Det

vill säga $\omega = \frac{m_b}{m_s}\frac{h_G v}{k^2}$ (Det är lämpligt och enkelt att dimensionskontrollera detta samband. Man kan också tänka efter och inse att ω ändras i rimlig riktning om en av parametrarna i taget fördubblas.) Exakt kompensation fordrar alltså att svänghjulets fart är propotionell mot bussens. Detta går tyvärr stick i stäv med iden, som nämns i uppiftstexten, att lagra energi i svänghjul vid inbromsning. Än värre ser det ut om man jämför storleken av hjulets rörelseenergi och bussens translationsrörelseenergi $\frac{E_h}{E_b} = \frac{I\omega^2}{m_b v^2} = \frac{m_b}{m_h}\frac{h_G^2}{k^2}$. Man kan inse att denna kvot nödvändigtvis är större än 1 (bussmassan inkluderar hjulmassan). Att minska bussarnas energiförbrukning är nog viktigare än att förbättra deras kurvtagningsförmåga. Kanske kan man klara bäggedera genom att använda tex tre svänghjul, två för bromsenergin och ett för rörelsemängdsmomentet. Men detta handlade uppgiften inte om. Storleksordningsförslag: Bussmassa 10^4 kg hjulmassa 10^3 kg, $h_G = k = 1$m, vinkelhastighet $\omega_n = 50\,\mathrm{s}^{-1}$, motsvarande $v = 5\,\mathrm{m/s}$. Starka metaller tål lätt spänningarna pga centrifugalkrafterna i sådana här hjul, men riskerna om energin frigörs vid trafikolycka bör beaktas.

4. Rymdstationen roterar till att börja med kring sin symmetriaxel med spinn s så att $g = Rs^2$, där $R =$ radien. Jag antar att impulsöverföringen vid rymdfarkostutskjutningen sker snabbt i jämförelse med s, så att den kan betraktas som stöt. Jag inför ett kroppsfixt koordinatsystem xyz så att origo ligger i torusens centrum, z-axeln pekar i spinnriktningen, och stöten träffar i $(R, 0, 0)$. Stötimpulsen kallar jag $-\Pi\hat{z}$. (Jag byter alltså uppgiftstextens symbol I mot Π för att hindra förväxling med tröghetsmoment.) Rymdstationens tröghetsmoment med avseende på z-axeln är $I = mR^2$, och med avseende på däremot vinkelräta riktningar genom origo $I_\perp = I/2$.
   Alldeles efter stöten är stationens rörelsemängdsmoment med avseende på sitt masscentrum $\vec{L} = Is\hat{z} + R\Pi\hat{y} = Is\hat{z} + \frac{1}{2}I\omega_y\hat{y} = L\hat{Z}$. Efter stöten är $\vec{L}$ är konserverad, så att $\hat{Z}$ är en fix riktning i rummet, kring vilken rymdskeppets rotationsvektor $\vec{\omega}$ och symmetriaxel $\hat{z}$ precesserar. För att få precessionshastigheten uttrycker man $\vec{\omega}$ i basvektorerna $\hat{z}$ och $\hat{Z}$:

$$\vec{\omega} = s\hat{z} + \omega_y\hat{y} = s\hat{z} + \frac{R\Pi}{I/2}\frac{L\hat{Z} - Is\hat{z}}{R\Pi} = -s\hat{z} + 2\frac{L}{I}\hat{Z} = -s\hat{z} + \Omega\hat{Z}.$$

   Numeriskt gäller $s = \sqrt{g/R} = 0.22\,\mathrm{s}^{-1}$, $L_y/L_z = R\Pi/(Is) = \Pi/(mRs) = 3.4 \cdot 10^{-4} \equiv \alpha$, säg. (Dimensionskontroll: $[\Pi/(mRs) = FT/(ML/T) = (ML/T^2)T/(ML/T) = 1.)$ $\alpha =$ tangens för vinkeln mellan symmetriaxeln $\hat{z}$ och precessionsaxeln $\hat{Z}$. Men eftersom α är så litet är det en god approximation att försumma termer av ordning α^2. Då är α vinkeln mellan $\hat{z}$ och $\hat{Z}$, och totala impulsmomentet kring masscentrum till beloppet samma som före utskjutningen, $L = Is$. Precessionshastigheten är $\Omega = 2s = 0.44\,\mathrm{s}^{-1}$. Rymdskeppets rotationsrörelse kan alltså beskrivas så att symmetriaxeln och den momentana rotationsaxeln ligger på motsatta sidor om den rumsfixa riktningen $\hat{Z}$, bildar bägge samma vinkel α med den, och precesserar med vinkelhastigheten $\vec{\Omega} = 2s\hat{Z}$ kring den. Och spinnvektorn har ändrat tecken jämfört med före utskjutningen. Figur 7/22 b i läroboken illustrerar rörelsen för en sådan här axelsymmetrisk kropp med $I_\perp < I$.

5. Jag inför koordinater (x, y) så att snörets ändar är i punkterna $(-c, d)$ och (c, d) med $a = 2d$ och $\ell = 2\sqrt{c^2 + d^2}$. Kulans jämviktsläge, på lodlinjen mitt emellan snörets ändpunkter, är då i origo. Kulan kan röra sig utefter en bana i (x, y)-planet som bestäms av att snöret är sträckt och har längden ℓ: $\ell = \sqrt{(d-y)^2 + (c-x)^2} + \sqrt{(d-y)^2 + (c+x)^2}$. Banan är horisontell i origo, men kröker sig uppåt. För att bestämma periodtiden för små svängningar behövs en kvadratisk approximation av banan nära jämviktspunkten, dvs ett samband av formen $y = bx^2$. Konstanten b kan bestämmas genom att utveckla den exakta ekvationen för banan, dvs uttrycket för ℓ ovan, i potensserie i x och y, och försumma termer högre än lineära i y och kvadratiska i x. Gör man detta finner man $b = (\sqrt{1 - a^2/\ell^2})/\ell$.
Så användes energimetoden. Summan av kinetisk och potentiell energi, $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgbx^2$ är konstant i tiden. (Hastigheten i y-led ger försumbar korrektion.) Derivering med avseende på tiden och division med $m\dot{x}$ ger rörelseekvationen $0 = \ddot{x} + 2gbx$, från vilken man avläser svängnngsrörelsens periodtid $T = 2\pi/\omega_n = 2\pi/\sqrt{2gb} = 2\pi/\sqrt{\frac{2g}{\ell}\sqrt{1 - (\frac{a}{\ell})^2}}$.
Som rimlighetskontroll kan man observera att uttrycket för vinkelfrekvensen interpolerar mellan de bekanta uttrycken $\sqrt{\frac{g}{\ell/2}}$ för en pendel med längd $\ell/2$ när $a = 0$, och 0 för horisontell rörelse när $a = \ell$.