Tentamen i Mekanik för F, del B
Måndagen 20 oktober 2003, 14.15-18.15, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jourhavande assistent: Erik Flink, tel. 7723685

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar, utom på fråga 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Ange vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska! (12 poäng, dvs. 2 poäng för varje korrekt svar utöver 6)
   - Om man vill att en raket som skjuts upp vertikalt skall uppnå så stor maximal hastighet som möjligt är det bäst att bränna bränslet snabbt (luftmotståndet kan försummas).
   - Corioliskraften på en stadsbuss under normal körning överstiger aldrig 1 N.
   - Rörelsemängdsmomentet m.a.p. en godtycklig punkt bevaras alltid av inre krafter i ett partikelsystem.
   - Ett svagt dämpat/underdämpat system karaktäriseras av att tidsskalan för dissipation, dvs. energiförlust, är mindre än tidsskalan för den oscillatoriska rörelsen.
   - En stel kropps rörelse kan delas upp i translationsrörelsen för en punkt på kroppen och rotation kring denna punkt endast då punkten väljs som masscentrums läge.
   - Reguljär precessionsrörelse (dvs. med vinkeln theta konstant) är den mest allmänna typen av rörelse för en rotationssymmetrisk kropp utan påverkan av vridande moment.
   - En homogen sfär och en homogen kub med samma densitet har båda tröghetsmatriser som är proportionella mot enhetsmatrisen, och reagerar därför exakt likadant på ett yttre vridande moment, om relationen mellan sfärens radie och kubens sida väljs på ett lämpligt sätt.
   - Om en kropp i ett visst ögonblick roterar med en viss rotationsvektor och rörelsemängdsmomentet momentant är parallellt med rotationsvektorn kan man sluta sig till att de pekar längs en huvudtröghetsaxel.
   - Centrifugalkraften är den kraft som åstadkommer centripetalaccelerationen.
   - En luftmotståndskraft vid tredimensionell rörelse som är linjär i hastigheten kan skrivas **F**=-b|**v**|.
   - Om en kraft verkar på en stel kropp men inte angriper i masscentrum eller längs en linje genom masscentrum blir kroppens acceleration mindre än F/m eftersom en del energi går åt till att sätta igång rotationsrörelse.
   - Kinetisk energi för en stel kropp kan delas upp i translationsenergi och rotationsenergi, men endast om man betraktar translation av och rotation kring masscentrum.
2. En tunn rak homogen pinne med massan m och längden l är fritt upphängd i sin ena ände. Förutom tyngdkraften och krafterna i upphängningspunkten påverkas den av en luftmotståndskraft, som per längdenhet är proportionell mot hastigheten med proportionalitetskonstant c. För vilket värde på c är små svängningar kring jämviktsläget kritiskt dämpade? Betrakta endast plan rörelse. Glöm inte dimensionskontroll! (16 poäng)
3. a. En liten lastbil väger 2 ton utan last, och kan ta lika mycket i last. Den lastas med sand i farten, så att sanden kommer lodrätt ned ur ett rör med 200 kg/s medan lastbilen kör förbi med farten 1 m/s. Lastbilens flak är 7.5 m långt. Sanden förutsätts följa med lastbilens hastighet så snart den landat. Vilken effekt måste lastbilens motor utföra, förluster i transmission och friktion borträknade, om lastbilen skall hålla konstant hastighet under lastningen?
   b. Samma lastbil lastar av sin last, under i övrigt identiska förhållanden, men lasten sugs upp i ett rör. Vilken effekt behövs då? (16 poäng)
4. När man svänger med en cykel måste man "kompensera för centrifugalkraften" genom att luta sig inåt i kurvan. Om man

dessutom tar hänsyn till att rotationsvektorn för cykelns hjul ändrar riktning, leder detta till att man måste luta sig mer eller mindre inåt än om bara centrifugalkraften funnits? Resonera först bara med riktningar hos rotationsvektorer, rörelsemängdsmoment och vridande moment. Gör sedan en grov uppskattning av storleksförhållandet mellan de två effekterna. (16 poäng)

Lösningar till tentamen i Mekanik för F del B

20 oktober 2003

1. Rätt rad är

   - Om man vill att en raket... S
   - Corioliskraften på en stadsbuss... F
   - Rörelsemängdsmomentet m.a.p. en godtycklig punkt... S
   - Ett svagt dämpat/underdämpat system... F
   - En stel kropps rörelse... F
   - Reguljär precessionsrörelse... S
   - En homogen sfär och en homogen kub... S
   - Om en kropp i ett visst ögonblick roterar... S
   - Centrifugalkraften är den kraft som åstadkommer centripetalaccelerationen... F
   - En luftmotståndskraft vid tredimensionell rörelse... F
   - Om en kraft verkar på en stel kropp... F
   - Kinetisk energi för en stel kropp... S

2. Kalla upphängningspunkten O och ställ upp momentekvationen kring denna. Både tyngdkraften och luftmotståndet ger upphov till vridande moment kring O:

$$-mg\frac{l}{2}\sin(\theta) - M_{\text{luft}} = I_O\ddot{\theta}, \tag{1}$$

där θ är vinkeln som pinnen bildar med vertikalen. För små θ så gäller att $\sin(\theta) \approx \theta$. Vi har även att $I_O = \frac{1}{3}ml^2$. Kraften per längdenhet på en viss del av pinnen, som ligger en sträcka s från O är $f = cs\dot{\theta}$. Det vridande momentet som luftmotståndet ger upphov till integreras fram enligt

$$M_{\text{luft}} = \int_0^l fsds = \int_0^l cs^2\dot{\theta}ds = \frac{1}{3}cl^3\dot{\theta}. \tag{2}$$

Momentekvationen kan nu skrivas som

$$\ddot{\theta} + \frac{cl}{m}\dot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0, \tag{3}$$

vilket ger följande karaktäristiska ekvation

$$r^2 + \frac{cl}{m}r + \frac{3g}{2l} = 0, \tag{4}$$

som har lösningarna

$$r = -\frac{cl}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2l^2}{4m^2} - \frac{3g}{2l}}. \tag{5}$$

Kritisk dämpning fås då vi har en dubbelrot, dvs då rotuttrycket försvinner, detta sker då

$$\frac{c^2l^2}{4m^2} - \frac{3g}{2l} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{\frac{6gm^2}{l^3}}, \tag{6}$$

där vi har förkastat den negativa lösningen av rimlighetsskäl. Vi noterar att c har dimensionen $\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$.

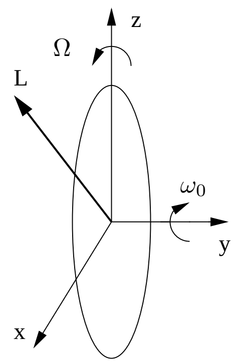
3. (a) Kalla massan av lastbil med last för $m(t)$ och dess fart för $v = 1\text{m/s}$. Massflödet är $m' = 200\text{kg/s}$ och vi inser att $\dot{m}(t) = m'$. Kalla drivkraften från motorn för F och ställ upp Newtons andra lag i lastbilens körriktning:

$$F = m\dot{v} + \dot{m}u, \tag{7}$$

men $\dot{v} = 0$, $\dot{m} = m'$ och den relativa hastigheten mellan lastbil och lasten i luften är $u = v$. Vi får alltså att $F = m'v$. Motoreffekten är $P = Fv = m'v^2 = 200\text{W}$.

(b) När lasten sugs upp från lastbilen bibehåller den sin fart i lastbilens körriktning tills den träffar uppsugningsröret. Därför är den relativa hastigheten $u = 0$, så $F = 0$ och därför är även motoreffekten $P = 0$.

4. För att rörelsemängdsmomentet kring tyngdpunkten för ett av cykelhjulen $\mathbf{L}$ ska ändra riktning behövs det ett vridande moment i den riktningen. Om man lägger ett koordinatsystem enligt figuren (där cykeln färdas i negativ x-led) och svänger åt vänster så kommer $\mathbf{L}$ att vrida sig kring z-azeln så att $\Delta\mathbf{L}$ pekar utmed positiva x-axeln. För att få ett vridande moment i positiv x-led kring hjulets tyngdpunkt måste man luta sig mer inåt kurvan. (Samma resultat fås om man svänger åt höger.)



För att göra en uppskattning av storleksförhållandet mellan gyroeffekten och centrifugalkraften ställer vi upp momentekvationen kring ett av hjulens mittpunkt.

$$\mathbf{M}_{\text{gyro}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}, \tag{8}$$

där $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{z}$ beskriver hur ett koordinatsystem bundet till hjulets huvudtröghetsaxlar roterar (precession). Den totala vinkelhastighetsvektorn för hjulet är summan av spinn och precession, dvs $\omega = \omega_0 + \boldsymbol{\Omega} = -\omega_0\hat{y} + \Omega\hat{z}$. Detta ger att hjulets rörelsemängdsmoment kring upphängningspunkten är $\mathbf{L} = I_{yy}\omega_0 + I_{zz}\boldsymbol{\Omega}$. Vi antar att både spinn och precession är konstanta till storlek så att tidsderivatan av rörelsemängdsmomentet relativt det roterande koordinatsystemet är noll. Momentekvationen ger då

$$\mathbf{M}_{\text{gyro}} = \boldsymbol{\Omega} \times (I_{yy}\omega_0 + I_{zz}\boldsymbol{\Omega}) = I_{yy}\boldsymbol{\Omega} \times \omega_0 = I_{yy}\Omega\omega_0\hat{x}. \tag{9}$$

En skaplig uppskattning av tröghetsmomentet för ett cykelhjul är $I_{yy} = mr^2$, där m är hjulets massa och r dess radie. Eftersom en cykel vanligtvis har två likadana hjul blir den totala gyroeffekten $\mathbf{M}_{\text{gyro tot}} = 2mr^2\Omega\omega_0\hat{x}$.

För att uppskatta effekten från centrifugalkraften antar vi att cyklisten svänger med svängningsradien R. Vi noterar att cyklistens fart kan tecknas på två sätt, $v = r\omega_0 = R\Omega$. Centrifugalkraften blir då

$$F_{\text{centrifugal}} = MR\Omega^2 = Mr\omega_0\Omega. \tag{10}$$

Denna kraft angriper i den gemensamma tyngdpunkten för cykel och cyklist, vi antar att denna ligger en sträcka h över marken. Om cyklisten lutar sig inåt kurvan med vinkeln θ relativt vertikalen finner vi att centrifugalkraften ger upphov till ett vridmoment

$$\mathbf{M}_{\text{centrifugal}} = -Mr\omega_0\Omega h\cos(\theta)\hat{x} \tag{11}$$

kring en axel som går genom de båda hjulens kontaktpunkter med marken. Vi finner således att

$$\frac{M_{\text{gyro tot}}}{M_{\text{centrifugal}}} = \frac{2rm}{Mh\cos(\theta)} \approx \frac{m}{M} \approx \frac{2\text{kg}}{80\text{kg}} = \frac{1}{40}, \tag{12}$$

där vi har antagit att $2r = h\cos(\theta)$, vilket borde stämma ganska bra. Vi ser att svaret är oberoende av hur fort man cyklar samt hur tvär kurva man tar. Dessutom finner vi att gyroeffekten är relativt liten i jämförelse med den fiktiva centrifugalkraften.