Tentamen i Mekanik för F del B

Kurskod: FFM052
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 21 oktober 2002 kl 08.45 - 12.45 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) En konståkerska utför en piruett på isen. Till en början har hon armarna rakt utsträckta, men sedan drar hon in dem mot kroppen. Man kan därvid observera att hennes vinkelhastighet ökar. Förklara detta genom att använda att en viss storhet är konstant i tiden.

   b) Den vänstra och den högra massan är lika, och de två fjädrarna i det högra systemet är av samma typ som fjädern i det vänstra systemet. Det vänstra systemet kan utföra vertikala svängningar med svängningstiden t = 0,5 s. Vad blir svängningstiden för det högra systemet?

2. En stel kropp roterar kring en fix punkt O med vinkelhastighetsvektorn $\overline{\omega}$. Visa att dess kinetiska energi kan skrivas

$$T = \frac{1}{2}\overline{\omega} \cdot \overline{H}_O,$$

   där vektorn $\overline{H}_0$ är kroppens rörelsemängdsmoment med avseende på O.

3. Raketen väger 2,8 ton och bränsleförbrukningen är 120 kg/s. Förbränningsgasernas hastighet relativt raketen är 640 m/s. På den aktuella höjden är tyngdaccelerationen 9,34 m/s^2. Bestäm vertikal och horisontalkomponenterna av raketens acceleration.

Vänd!

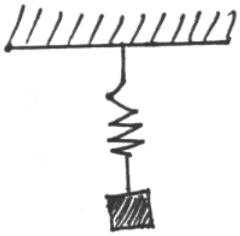
4. Armen OA har tyngdpunkten i G, massan m_{OA} och tröghetsmomentet I_0 med avseende på den fixa punkten O. Kugghjulet B har massan m_B och tröghetsmomentet I_A med avseende på sin mittpunkt A. Kugghjulet C är fixt i vertikalplanet och kan inte rotera. Armen OA är från början horisontell och i vila, och påverkas därefter av ett konstant vridmoment M. Bestäm vinkelhastigheten för armen OA då den är vertikal (så att punkten A sammanfaller med A').

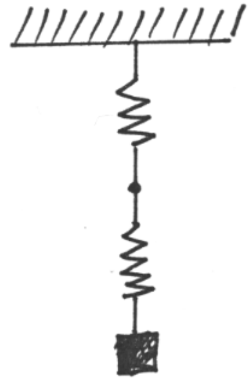
5. Den homogena plattan har massan m och roterar med konstant vinkelhastighet ω kring den vertikala axeln. Bestäm vridmomentsvektorn $\mathbf{M}$ med vilken plattan påverkar axeln. (*Ledning*: Bestäm plattans huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment.)

6. Visa att systemets egenfrekvens är oberoende av vinkeln θ.

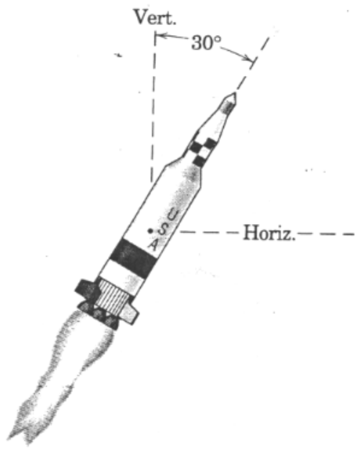
Lycka till!

1.b)

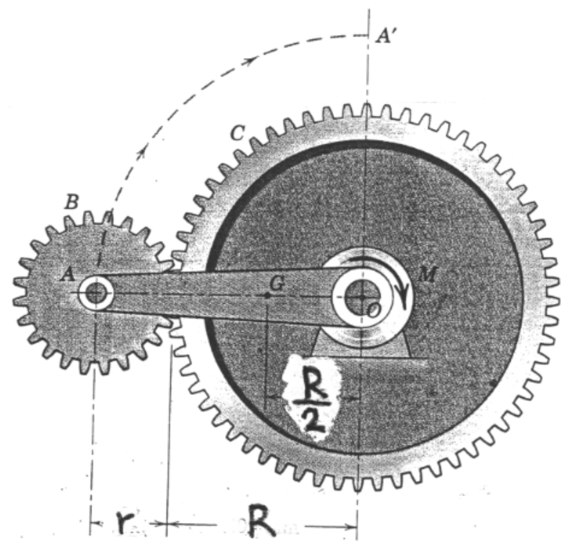




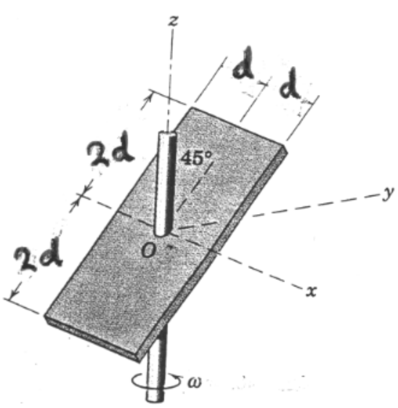
3.



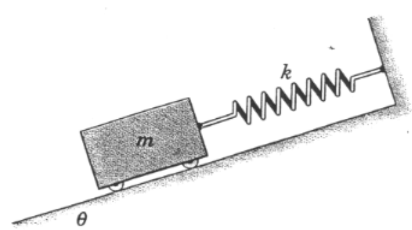
4.



5.



6.



Tentamen i Mekanik för F del B

21 oktober 2002

1a) Eftersom kraften är riktad i $\hat{r}$-led är rörelsemängdsmomentet en konserverad storhet:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{G}) = r\hat{r} \times F\hat{r} = 0$$

Dvs, $I_1 w_1 = I_2 w_2$ och då tröghetsmomentet $I_2 < I_1$ (radien minskar) $\Longrightarrow w_2 > w_1$ (vinkelhastigheten ökar).

b) Det vänstra systemet har frekvensen $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ medan det högra har frekvensen $\omega_2 = \sqrt{k/2m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1$ (i analogi med parallellkopplade motstånd, $1/k_2 = 1/k + 1/k$). Då svängningstiden $t_2 = 2\pi/\omega_2 = \sqrt{2}t_1$ och $t_1 = 0.5s \Longrightarrow t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}s$.

2 Uttrycket för kinetiska energin ges av:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{\omega} \cdot \bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{H}_0$$

Här har vi använt $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})$ och att vinkelhastigheten är densamma för varje punkt i den stela kroppen.

3 Skriv upp rörelsemängden före och efter ett tidssteg Δt:

$$\begin{aligned} \bar{G}(t) &= (M + \Delta m)\bar{v} \\ \bar{G}(t + \Delta t) &= M(\bar{v} + \Delta v) + \Delta m(\bar{v} + \bar{u}) \end{aligned}$$

där M,Δm är massan för raketen resp. det förbrukade bränslet under tiden Δt. $\bar{v}$ och $\Delta\bar{v}$ är hast. för raketen resp. dess förändring, $\bar{u}$ är förbränningsgasernas hastighet relativt raketen (motsatt riktning mot raketen). Detta medför att

$$\bar{F} = \frac{d\bar{G}}{dt} = \lim_{t \to 0}\frac{\bar{G}(t+\Delta t) - \bar{G}(t)}{\Delta t} = \lim_{t \to 0}\frac{M\Delta\bar{v} + \Delta m\bar{u}}{\Delta t} = M\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\bar{u}$$

Med $\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$ fås att acceleration

$$\bar{a} = \frac{\bar{u}}{M}\frac{dM}{dt} + \bar{g}$$

Relativa hastigheten i x, y-led (horisontal- resp. vertikalled) $u_x = u\sin\theta, u_y = u\cos\theta$ ($\theta = 30^o$) ger nu vertikal och horisontalkomponenterna av raketens acceleration

$$a_x = \frac{u}{M}\frac{dM}{dt}\sin\theta \qquad\qquad a_y = \frac{u}{M}\frac{dM}{dt}\cos\theta - g$$

Med givna värden ($u = -640$m/s, $\frac{dM}{dt} = -120$kg/s, $g = 9.34\text{m}/s^2$, $\theta = 30^o$, $M = 2800kg$) blir $a_x = 13.7m/s^2$ och $a_y = 14.4m/s^2$.

4 Använd att det utförda arbetet U är summan av potentiella V och kinetiska energin T, dvs $U = T + V$. Det utförda arbetet $U = \int_0^{\pi/2} M \cdot d\theta = M\frac{\pi}{2}$, pga det konstanta vridmomentet M. Kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}I_A\omega'^2 + \frac{1}{2}m_B(r+R)^2\omega^2$$

där kugghjulet B snurrar med vinkelhastigheten ω' och ω är vår sökta vinkelhastighet. Vinkelhastigheterna är relaterade som $\omega' r = \omega(r + R)$. Potentiella energin då punkten A sammanfaller med A' (med nollan i horisontalläget) ges av $V = m_B g(r + R) + m_{OA} g(\frac{R}{2})$. Med $U = T + V$ fås nu att

$$M\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}(1 + \frac{R}{r})^2 I_A\omega^2 + \frac{1}{2}m_B(r+R)^2\omega^2 + V$$

Insättning av uttrycket för V ger nu vinkelhastigheten för armen OA då den är vertikal;

$$\omega = \left(\frac{\pi M - g(2m_B(r+R) + m_{OA}R)}{I_O + I_A(1+\frac{R}{r})^2 + m_B(r+R)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alternativ lösning: Använd en momentekvationen kring O och integrera över $d\theta$ från 0 till $\frac{\pi}{2}$, eftersom $\int \alpha d\theta = \int \omega d\omega$;

$$\int_0^{\pi/2} (M - m_{OA} g \frac{R}{2} \cos\theta - m_B g(r+R)\cos\theta) d\theta = \int_0^{\omega} (I_O + m_B(r+R)^2 + I_A(1+\frac{R}{r})^2)\omega d\omega$$

vilket också ger den erhållna lösningen ovan.

5 Inför principalaxlar x', y', z', där x', y' ligger utmed plattans yta så att $x' = x$ och z' bildar $\theta = 45^o$ vinkel med z. Tröghetsmomentet kring z' ges nu av (deviationsmomenten är ju här noll)

$$I = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$

där $I_{x'x'} = \frac{1}{12}m(4d)^2 = \frac{4}{3}md^2, I_{y'y'} = \frac{1}{12}m(2d)^2 = \frac{1}{3}md^2, I_{z'z'} = \frac{1}{12}m((2d)^2+(4d)^2) = \frac{5}{3}md^2$. För att relatera våra två koordinatsystem inför enhetsvektorer $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ utefter x', y' resp. z'-axlarna.

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \hat{x} \\ \hat{y}' &= \cos\theta\hat{y} + \sin\theta\hat{z} \qquad \hat{y} = \cos\theta\hat{y}' - \sin\theta\hat{z}' \\ \hat{z}' &= -\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z} \qquad \hat{z} = \sin\theta\hat{y}' + \cos\theta\hat{z}' \end{aligned}$$

Vinkelhastigheten kan nu skrivas som $\bar{\omega} = \omega\hat{z} = \omega(\sin\theta\hat{y}' + \cos\theta\hat{z}')$ vilket medför att rörelsemängdsmomentet

$$\bar{H} = \omega I_{y'y'} \sin\theta\hat{y}' + \omega I_{z'z'} \cos\theta\hat{z}'$$

och vridmomentet, med vilken plattan påverkar axeln;

$$\bar{M} = -\bar{\omega} \times \bar{H} = -\omega^2(I_{z'z'} - I_{y'y'})\cos\theta\sin\theta\hat{x}' = -\frac{2}{3}m\omega^2 d^2\hat{x}$$

Vinkelhastigheten för koordinatsystemet x', y', z' är ju även den $\omega\hat{z}$.

Alternativ lösning: Om vi inte inför principalaxlar behöver vi räkna ut deviationsmomenten I_{yz} och I_{xz} eftersom

$$\bar{M} = -\bar{\omega} \times \bar{H} = -\omega^2 I_{yz}\hat{x} + \omega^2 I_{xz}\hat{y} \tag{1}$$

där $I_{xz} = 0$ och $I_{yz} = \frac{2}{3}md^2$ så att $\bar{M} = -\frac{2}{3}md^2\omega^2\hat{x}$.

6 Inför x-axel utmed det lutande planet från jämviktsläget som ligger avståndet δ ifrån fjäderns ospända läge. Rörelseekvationen ges då utav

$$m\ddot{x} = -k(x+\delta) + mg\sin\theta$$

I jämviktsläget $x = 0$ gäller att:

$$k\delta = mg\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

med lösning

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

där konstanterna A, B bestäms av begynnelsevärden. Vi ser att ω är oberoende av θ. θ bestämmer enbart jämviktsläget δ varifrån svägningarna utföres.