Mekanik B

tentakit

F

sidor: 50

pris: ~~15:-~~ 25:-

Tentamen i Mekanik för F, del B
Måndagen 12 januari 2004, 8.45-12.45, V-huset
Examinator och jour: Martin Cederwall, tel. 7723181, 0733-500886

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar, utom på fråga 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Ange vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska! (12 poäng, dvs. 2 poäng för varje korrekt svar utöver 6)

   En viskös dämpkraft är konservativ exakt då dämpningen är kritisk.

   Tidvattenkrafter kan sägas bero på att gravitationsfältet inte är konstant, och att de olika delarna av en (stel) kropp därför inte samtidigt kan vara i fritt fall.

   Rörelsemängden är alltid bevarad, och därför är rörelseekvationen för en kropp vars massa inte är konstant (dm/dt)v+m(dv/dt)=0 ("raketekvationen").

   Energin är alltid bevarad, och närvaron av en "icke-konservativ" kraft är ett uttryck för att energi omvandlas till former som inte kan hanteras i Newtonsk mekanik.

   Rörelsemängdsmomentet är alltid bevarat.

   Om en kropp i något (ortogonalt) koordinatsystem har samtliga deviationsmoment noll gäller detta i alla system.

   Om en kropp i något (ortogonalt) koordinatsystem har samtliga deviationsmoment noll och de tre tröghetsmomenten lika gäller detta i alla system.

   Hela jordens befolkning skulle få plats stående på Gotland.

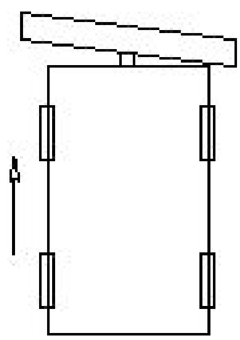
   En leksakssnurra, som utför reguljär precessionsrörelse under inverkan av tyngdkraften, precesserar långsammare på månen än på jorden.

   Alla ekvationer som styr tvådimensionell rotationsrörelse (rörelseekvation, uttryck för energi etc.) är helt analoga med ekvationerna för endimensionell translationsrörelse.

   Om man jämför oscillationsfrekvensen för en massa fäst via en fjäder i en vägg med den för samma situation där den fasta väggen är ersatt med en tung kropp, är den senare högre än den förra.

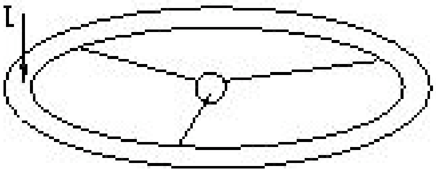
   Om två huvudtröghetsmoment är lika, är också varje axel i det plan som spänns av motsvarande huvudtröghetsaxlar en huvudtröghetsaxel med samma huvudtröghetsmoment.

2. En cylindrisk kropp med densitet lägre än vattens flyter så att axeln är vertikal.
   a. Bestäm jämviktsläget i vertikalled.
   b. Antag att vattenflödet då cylindern rör sig uppåt och nedåt är sådant att vattnets rörelseenergi är försumbar jämfört med cylinderns. Visa att cylindern under dessa förutsättningar utför harmonisk svängningsrörelse i vertikalled och bestäm svängningarnas vinkelfrekvens.
   c. Om det tidigare antagandet inte är riktigt, och man modellerar den dissipativa kraften som en liten konstant b gånger hastigheten, bestäm den typiska tidsskalan för dissipation. Vad exakt menas med att b är "liten"?
   (Alla svar skall uttryckas i termer av kroppens och vattnets densiteter samt kroppens dimensioner.) (16 poäng)



3. En snöplog röjer en väg med nyfallen snö. Snön är 50 cm djup och har en densitet på 150 kg/m^3. Plogbilen ser ut som skissat i figuren till höger och väger 4 ton. Bredden på skoveln framtill är 2.5 m. Snön som lämnar skoveln åt höger kan antas ha samma hastighet som plogen.
   a. Om plogbilen åker med den konstanta farten 10 m/s, vilken effekt behöver motorn utveckla (övriga förluster borträknade)?

b. Om motorn plötsligt slutar driva, hur låt hinner plogbilen innan dess fart har sjunkit till hälften (om man försummar rullfriktion, luftmotstånd etc.)?
c. Anser du att antagandet att andra dissipativa krafter är små i jämförelse är rimligt? (12 poäng)



4. En rymdstation är formad som en smal torus ("doughnut") enligt figuren. Dess radie är 100 m och dess massa 20 kiloton. Massan i öriga delar av rymdstationen är försumbar. Stationen roterar kring sin symmetriaxel så att den upplevda gravitationsaccelerationen vid periferin skall vara 0.75 g. Vid ett tillfälle skjuts en rymdfarkost ut från torusen i en riktning parallell med rotationsaxeln, vilket åstadkommer en impuls i motsatt riktning av storleken 10 kNs. Beskriv rymdstationens rotationsrörelse därefter i termer av spinn och precession! (20 poäng)

Lösningar till tentamen i Mekanik F del B 12 januari 2003

1. FSF SSF SSS SSS

2. Trycket på cylinderns bottenyta är $p = \rho_0 g x$ $[Nm^{-2} = (kgm^{-3})(ms^{-2})m]$, där ρ_0 är vattnets densitet och x avståndet från bottenytan till vattenytan. Lyftkraften är allstå $F_{\text{lyft}} = -\rho_0 g x A$, där A är cylinderns tvärsnittsarea, och minustecknet kommer av att jag väljer samma referensriktning för kraften som för läget x. Tyngdkraften är $F_g = mg = \rho A h g$, där ρ är kroppens densitet och h cylinderns längd. Cylinderns rörelseekvation blir alltså

$$\rho A h \ddot{x} = -\rho_0 A g x + \rho A g h = -\rho_0 A g \left(x - \frac{\rho}{\rho_0} h \right)$$

Jämviktsläget är $x = x_0 = \frac{\rho}{\rho_0} h$ (verkar rimligt—en mycket lätt cylinder sjunker knappt ned alls, medan en som nästan har vattnets densitet är nästan helt nedsänkt). Definiera koordinaten y som är noll i jvktsläget: $y = x - x_0$. Rörelseekvationen blir

$$\ddot{y} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{g}{h} y = 0$$

varur vinkelfrekvensen avläses: $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{g}{h}}$. Dimensionerna är uppenbara.

Om det dessutom finns en dämpkraft blir ekvationen

$$\ddot{y} + 2\gamma \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

där $\gamma = \frac{b}{2\rho A h}$. Den karakteristiska ekvationen, $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$, har lösningar $r = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, och man får svagt dämpade svängningar som avtar exponentiellt på en tidsskala γ^{-1}. Påståendet "b är liten" betyder att $\gamma << \omega_0$.

Dimensionskontroll: $[\gamma^{-1}] = [\rho A h b^{-1}] = kgm^{-3} m^3 (Nsm^{-1})^{-1} = s$.

3. Plogens hastighet: $v = 10 m/s$, snöns densitet $\rho = 150 kg/m^3$, plogens tvärsnittsarea: $A = 2.5 \times .5 = 1.25 m^2$.

Massa snö per tidsenhet som accelereras från vila till hastigheten v: $\dot{m} = \rho A v$. Impulsökning per tidsenhet = kraft: $F = \dot{m} v = \rho A v^2$ (vad som händer med snön efter den har lämnat skoveln spelar ingen roll). Effekten är $P = Fv = \rho A v^3$.

Numeriskt: $P = 150 \times 1.25 \times 1000 \approx .2 MW$.

Dimensionskontroll (enheter): $[\rho A v^3] = kgm^{-3} \times m^2 \times (ms^{-1})^3 = kgm^2 s^{-1} = W$.

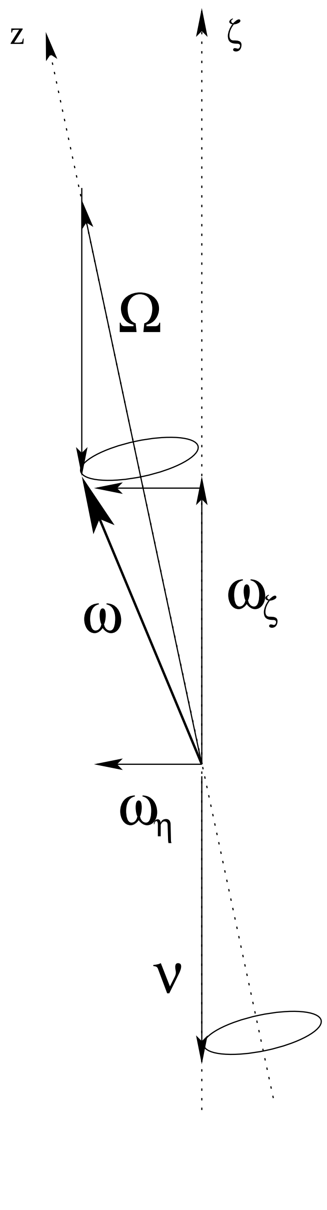
Om motorn slutar driva vid $x = 0$, $v = v_0$, är $ma = mv\frac{dv}{dx} = -\rho A v^2$, med lösningen $v = v_0 e^{-\frac{\rho A}{m}x}$. Hastigheten sjunker till hälften efter sträckan $x = \frac{m}{\rho A}\log 2 \approx 15m$ (rimlighet: efter denna sträcka är massan hos den borttröjda snön jämförbar med bilens massa). En bil som börjar rulla med $10m/s$ tar normalt mycket längre sträcka för att tappa en stor del av sin fart, så det är nog inte helt orimligt att kasta andra motståndskrafter...

4. Beteckna koordinatriktningar anpassade till rymdstationen med ξ, η, ζ, där ζ-axeln ligger längs symmetriaxeln. Rymdstationen har tröghetsmoment $I_\zeta = mR^2$ med avseende på sin symmetriaxel och $I_\perp = \frac{1}{2}mR^2$ med avseende på axlar vinkelräta mot symmetriaxeln. Före stöten har den ett rörelsemängdsmoment $\mathbb{L}_0 = I_\zeta \omega_0$, där ω_0 är rotationshastigheten. Denna bestäms av den effektiva tyngaccelerationen $\tilde{g} = .75g = R\omega_0^2$. Numeriskt är $\omega_0 \approx .27s^{-1}$, $L_0 \approx 5.4 \times 10^{10} kgm^2s^{-1}$.

Impulsen $\mathbb{I}$ verkar enligt figuren i uppgiften. I vårt koordinatsystem är $\mathbb{I} = -I\hat{\zeta}$. Låt ξ-axeln gå genom angreppspunkten. Då fås ändringen i rörelsemängdsmoment $\Delta\mathbb{L} = R\hat{\xi} \times \mathbb{I} = RI\hat{\eta}$. Numeriskt är denna ändring till beloppet mycket mindre än L_0, $\frac{|\Delta\mathbb{L}|}{L_0} \approx 1.8 \times 10^{-5}$. Kalla detta lilla tal för α.

Rörelsemängdsmomentet efter stöten är $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 + \Delta\mathbb{L} = L_0(\hat{\zeta} + \alpha\hat{\eta})$. Eftersom det inte finns några vridande moment kommer $\mathbb{L}$ att förbli konstant. Den definierar en rumsfix riktning $\hat{z}$ som rotationsvektorn kommer att precessera kring. Rotationsvektorn $\vec{\omega}$ omedelbart efter stöten fås från $\mathbb{L} = I_\zeta\omega_\zeta + I_\perp\omega_\eta$, så $\vec{\omega} = \omega_0(\hat{\zeta} + 2\alpha\hat{\eta})$. Om man istället sönderlägger $\vec{\omega}$ i en del längs $\hat{\zeta}$ (spinn) och en längs $\hat{z} = (1+\alpha^2)^{-1/2}(\hat{\zeta} + \alpha\hat{z})$ (precession), så får man $\vec{\omega} = \nu\hat{\zeta} + \Omega\hat{z}$, där $\nu = -\omega_0$ och $\Omega = 2\sqrt{1+\alpha^2}\omega_0 \approx 2\omega_0$.

På nästa sida finns en bild som visar ungefär hur det ser ut, om man förstorar upp vinkeln mellan $\hat{z}$ och $\hat{\zeta}$, som ju är ungefär α mätt i radianer. Spinnvektorn är nästan precis motriktad precessionsvektorn och hälften så lång som den. Spinnvektorn, liksom alltså totala rotationsvektorn, precesserar runt Ω som visat i figuren. Rymdstationens plan är hela tiden vinkelrätt mot spinnvektorn. Effekten är en mycket liten variation hos $\vec{\omega}$, och alltså en mycket liten "wobblande" rörelse hos rymdstationen.



/Martin Cederwall 11 januari 2004

Tentamen i Mekanik för F del B

Kurskod: FFM052
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Tisdagen den 19 augusti 2003 kl 08.45 - 12.45 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Vilken av de två pendlarna har längst svängningstid? (Stängernas massa försummas. Stången och de två massorna i den högra pendeln rör sig tillsammans som en stel kropp.)

   b) Man har tillverkat tre klot med samma massa och radie. Klot Pb består av ett ihåligt sfäriskt skal av bly (densitet $11,3g/cm^3$). Klot Al är ett massivt aluminiumklot (densitet $2,7g/cm^3$). Klot Hg är gjort av en lätt plast (försumbar densitet), men har ett sfäriskt hålrum i mitten som är fyllt med flytande kvicksilver (densitet $13,6g/cm^3$). Rangordna de tre kloten efter hur snabbt de rullar nerför ett lutande plan vid start i vila.

2. Betrakta en plan stel kropp. Dess tröghetsmomentet I_A med avseende på en axel vinkelrät mot kroppen genom en punkt A beror av läget för A. Visa att I_A antar sitt minsta värde då A sammanfaller med kroppens tyngdpunkt G.

3. Kedjan har längden L och massan ρ per längdenhet. Den släpps i vila när längden x av den del som hänger över kanten är försumbart liten. Bestäm kedjans acceleration a och spänning T i kedjan vid hörnet som funktioner av x.

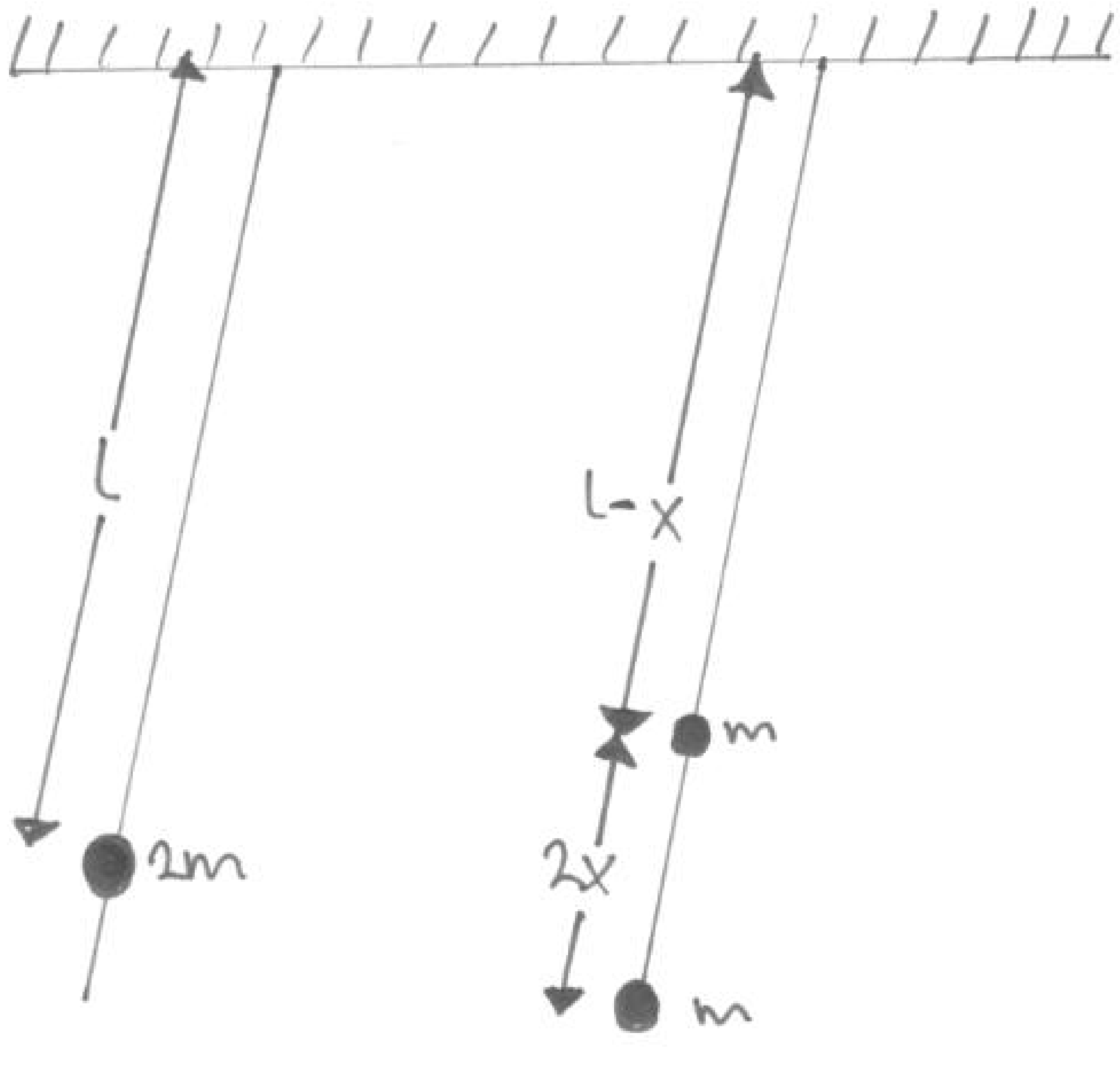
4. Den homogena stången har massan m. Den släpps i vila när den är vertikal. Bestäm den momenta accelerationen för ändpunkten A omedelbart därefter. (Friktionen försummas.)

5. De två homogena stängerna har vardera massan m. De utgör en stel kropp som roterar kring z-axeln med den konstanta vinkelhastigheten ω. Bestäm systemets rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_O$ med avseende på origo O.

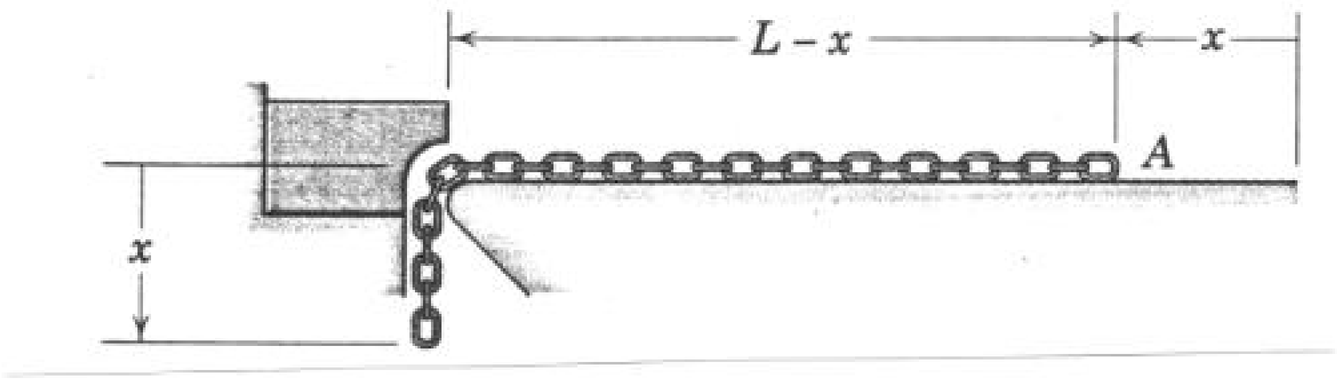
6. En kula med massan $0,70kg$ är upphängd i en lätt tråd med längden $2,3m$ och utför en plan pendelrörelse med liten amplitud. Efter tiden $47s$ har utslagsvinkeln minskat till hälften av den ursprungliga på grund av luftmotståndet. Vi antar att luftmotståndet kan beskrivas med en kraft $\mathbf{F}$ som angriper i kulan och är motriktad kulans hastighet $\mathbf{v}$, samt att $|\mathbf{F}| = c|\mathbf{v}|$, där c är en konstant. Vad får man för värde på c?

Lycka till!

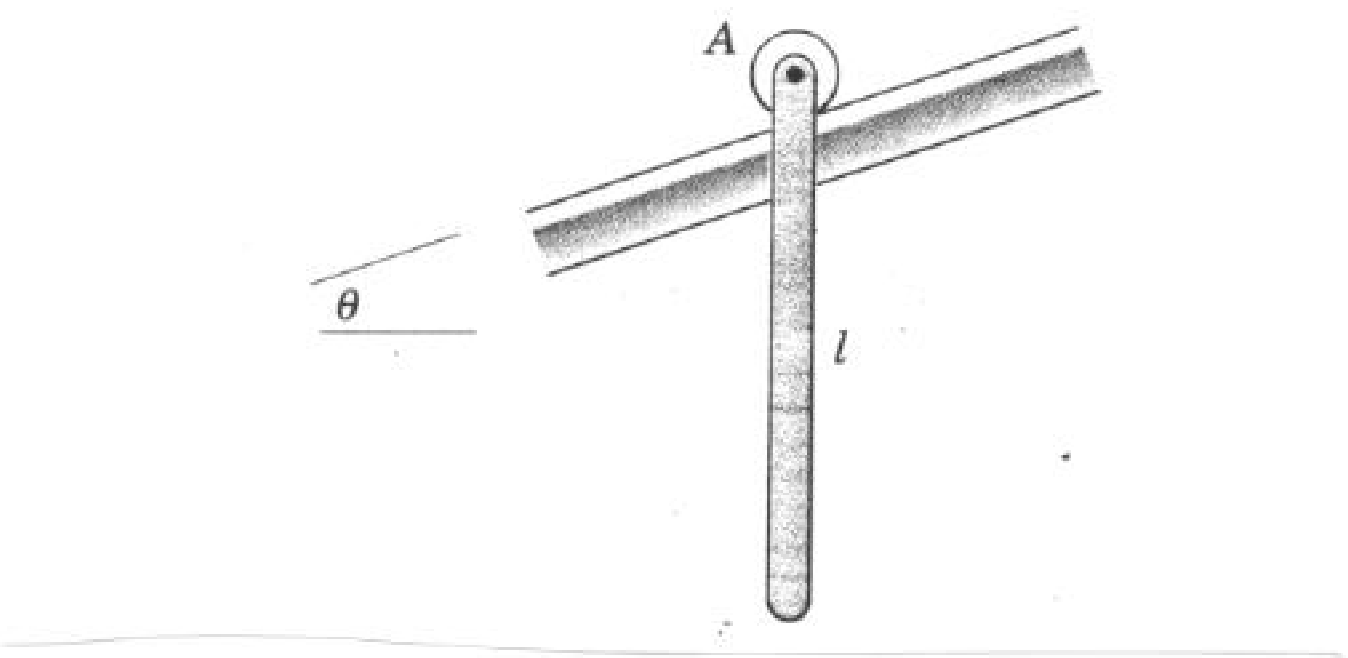
1. a)



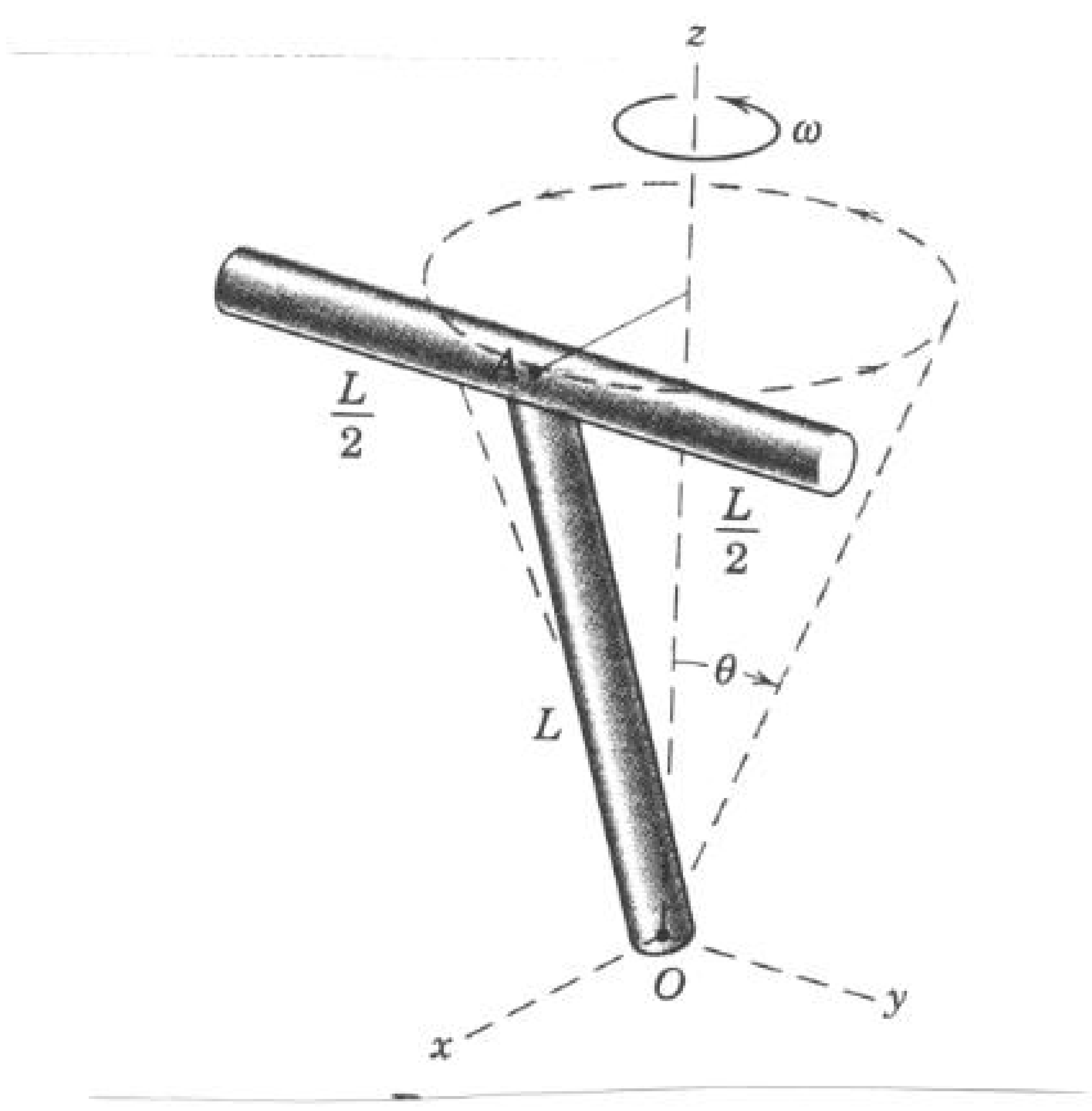
3.



4.



5.



Tentamen i Mekanik för F del B

19 augusti 2003

1a) Systemet med de två massorna har längst svängningstid. Tröghetsmomentet för detta system är $I_{dubbel} = m((l-x)^2 + (l+x)^2) = 2m(l^2 + x^2)$ vilket skall jämföras med det enkla systemet, $I_{enkel} = 2ml^2$. Dvs $I_{dubbel} > I_{enkel}$ vilket medför att svängningstiden är längre för systemet med två massor. Rörelseekvationen för en fysisk pendel ges ju utav

$$I\ddot{\theta} + 2mgl\theta = 0, \quad \text{där} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mgl}}.$$

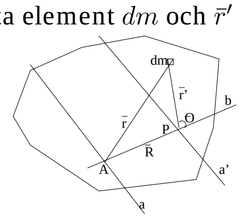
Detta kan också inses om vi låter $x \to l$ vilket gör att längden på pendeln blir dubellt så lång och eftersom svängningstiden $T \sim \sqrt{r/g}$ (där r är längden på pendeln) följer det att T ökar då r ökar.
1b) Kulornas totala kinetiska energi kommer att vara lika stor efter att de rullat lika lång sträcka. Dess storlek ges av

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

dvs ju större tröghetsmoment kulan har desto mer energi går åt att rotera kulan istället för att translatera den. Tröghetsmomentet för det sfäriska skalet är $I_{Pb} = \frac{2}{3}mR^2$, och det massiva aluminiumklotet $I_{Al} = \frac{2}{5}mR^2$. Klotet med ett hålrum fyllt med flytande kvicksilver har försumbart tröghetsmoment ($I_{Hg} \approx 0$). Detta gör att relationerna för hastigheterna blir

$$v_{Hg} > v_{Al} > v_{Pb}.$$

2 Låt en axel a gå genom en godtycklig punkt A och en parallell axel a' genom tyngdpunkten G. Rita ut en vinkelrät linje b från axel a genom axel a'. Punkten där dessa korsas kallar vi P och vektorn mellan P och A, $\bar{R}$. Välj ett godtyckligt masselement dm och låt $\bar{r}$ vara vektorn från A till detta element dm och $\bar{r}'$ vektorn mellan P och dm som bildar vinkel θ med linje b.



Tröghetsmomentet ges utav $I = \int r^2 dm$.

Cosinussatsen ger att $r^2 = R^2 + r'^2 + 2Rr'\cos\theta$, dvs

$$I_A = R^2 \int dm + \int r'^2 dm + 2R \int r' \cos\theta dm$$

Den första termen är mR^2, den andra tröghetsmomentet för tyngpunkten I_G och den sista termen är noll eftersom $r'\cos\theta$ är vinkelrät mot axel a' och börjar där dessa skär varandra. (En summering över alla vinkelräta avstånd till masselementen är ju noll eftersom vi utgår ifrån axeln genom tyngdpunkten.) Vi har alltså att

$$I_A = I_G + mR^2$$

vilket antar sitt minsta värde då $R = 0$, dvs då A sammanfaller med G.
3 Vi tänker oss kedjan som bestående av två delar, en som hänger över kanten med längden x, och en del som rör sig utmed planet med längden $L - x$. Newtons andra lag ger nu

$$\rho x g - T = \rho x \ddot{x} \qquad \text{och} \qquad T = \rho(L-x)\ddot{x}$$

där T är spännkraften i kedjan och ρ massan per längdenhet. Med hjälp av dessa ekvationer finner vi accelerationen $\ddot{x}$ och spännkraften T som funktioner av x:

$$\ddot{x} = \frac{g}{L}x \qquad\qquad T = \rho g x (1 - \frac{x}{L})$$

4 Inför en x-axel riktad nedåt utmed det lutande planet, dvs i acc. riktningen för punkten A. Kraftmomentet kring punkten A ges av

$$\Sigma M_A = I\alpha + \Sigma m\bar{a}d$$

där d är det vinkelräta avståndet mellan acc. riktningen för stångens tyngdpunkt och A. Om vi inför polära koordinater och låter $l = 2r$ så fås att $I = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{3}mr^2$ och $0 = \frac{1}{3}mr^2\alpha + mr\alpha r - mar\cos\theta$, dvs

$$\alpha = \frac{3a\cos\theta}{4r}$$

Vi har också Newtons andra lag i x-led:

$$ma - mr\omega^2\sin\theta - mr\alpha\cos\theta = mg\sin\theta$$

Den momentana accelerationen a för punkten A vid start i vila ($\omega = 0$) fås genom att kombinera de två utrycken så att

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 - \frac{3}{4}\cos^2\theta}$$

Alternativ lösning: Inför koordinatsystem med y-axeln riktad uppåt längs med den homogena stången och x-axeln vinkelrät mot denna. Inför också vinkelhast. ω och vinkelacc. α för stången. Accelerationen för tyngdpunkten G kan nu skrivas som $\bar{a}_G = a_A(-\cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{y}) + \frac{1}{2}l\omega^2\hat{y} + \frac{1}{2}l\alpha\hat{x}$. Newtons andra lag i x- och y-led samt en kraftmomentsekvation kring tyngpunkten G ges av

$$\begin{aligned} -N\sin\theta &= m(-a_A\cos\theta + \frac{1}{2}l\alpha) \\ N\cos\theta - mg &= m(-a_A\sin\theta + \frac{1}{2}l\omega^2) \\ N\sin\theta\frac{l}{2} &= I\alpha \end{aligned}$$

där N är normalkraften och $I = \frac{1}{12}ml^2$. Lösning av detta ekvationssystem ger den momentana accelerationen a_A given ovan.

5 Inför principalaxlar x', y', z' utmed den stela kroppen, med vinkeln θ mellan z'- och z-axeln. Detta leder till att matrisen för tröghetsmomentet endast har nollskilda element i diagonalen (dvs deviationsmomenten är noll)

$$I = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$

där $I_{x'x'} = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{3}mL^2 + mL^2 = \frac{17}{12}mL^2, I_{y'y'} = \frac{1}{3}mL^2, I_{z'z'} = \frac{1}{12}mL^2$. För att relatera våra två koordinatsystem inför vi enhetsvektorer $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ utefter x', y' resp. z'-axlarna.

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{z} & \hat{x} &= \cos\theta\hat{x}' + \sin\theta\hat{z}' \\ \hat{y}' &= \hat{y} & & \\ \hat{z}' &= \sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z} & \hat{z} &= -\sin\theta\hat{x}' + \cos\theta\hat{z}' \end{aligned}$$

Vinkelhastigheten kan nu skrivas som $\bar{\omega} = \omega\hat{z} = \omega(-\sin\theta\hat{x}' + \cos\theta\hat{z}')$ vilket medför att rörelsemängdsmomentet

$$\bar{H} = \bar{\omega}\cdot I = -\omega I_{x'x'}\sin\theta\hat{x}' + \omega I_{z'z'}\cos\theta\hat{z}' = -\frac{4}{3}\omega mL^2\sin\theta\cos\theta\hat{x} + (\frac{1}{12}\omega mL^2 + \frac{4}{3}\omega mL^2\sin^2\theta)\hat{z}$$

Alternativ lösning: Om vi inte inför principalaxlar behöver vi räkna ut I_{zz} och deviationsmomenten I_{yz} och I_{xz} eftersom

$$\bar{H} = -\omega I_{xz}\hat{x} - \omega I_{yz}\hat{y} + \omega I_{zz}\hat{z} \tag{14}$$

där $I_{xz} = \int xzdm = \frac{m}{L}\int_0^L l\sin\theta l\cos\theta dl + \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2} L\sin\theta L\cos\theta dy = \frac{4}{3}mL^2\sin\theta\cos\theta$, $I_{yz} = \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2} yzdy = 0$ och $I_{zz} = \int(x^2+y^2)dm = \frac{m}{L\sin\theta}\int_0^{L\sin\theta} x^2\sin^2\theta dx + \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2}(L^2\sin^2\theta + y^2)dy = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{4}{3}mL^2\sin^2\theta$. Insättning i uttrycket för rörelsemängdsmomentet ger nu samma resultat som ovan.

6 Genom att lösa rörelseekvationen för den dämpade svängningsrörelsen och sedan studera kvoten mellan uttrycken för utslagsvinkeln vid tiden $t = 0$ och $t = 47s$ kan vi ta fram storleken på c. Inför polära koordinater r, θ och sätt upp Newtons andra lag i $\hat{\theta}$-led:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - cl\dot{\theta}$$

För små vinklar ($\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$) fås ekvationen för en dämpad svängningsrörelse

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

där $\gamma = \frac{c}{2m\omega_0}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Lösningen ges utav

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}t + \delta)$$

där δ är en fasfaktor. Kvoten för detta uttryck vid tiden $t = 0$ och $t' = 47s$ är 2 (vinkeln då pendeln är i sitt vändläge är ju halverad efter $47s$) dvs

$$2 = \frac{\theta(0)}{\theta(t')} = \frac{A}{Ae^{-\gamma\omega_0 t'}}$$

Lösning av denna ekvation och insättning av givna värden $m = 0.70kg, t' = 47s$ ger

$$c = \frac{2m\ln 2}{t'} = 0.021kg/s$$

Tentamen i Mekanik för F del B

Kurskod: FFM052
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 13 januari 2003 kl 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) En helikopters rotor roterar motsols sedd ovanifrån. När helikoptern hovrar (d v s står stilla i luften) är rotorn horisontell, men när helikoptern sedan skall börja röra sig framåt låter piloten den tippa kring en horisontell axel så att nosen sänks. Härvid uppstår en gyroskopverkan så att helikoptern även tippar i sidled. Är det helikopterns vänstra eller högra sida som sänks?

   b) En massa m är fäst i en icke-linjär fjäder som påverkar den med kraften $F = kx + \lambda x^3$, där k och λ är konstanter och x är avvikelsen från jämviktsläget. Systemet kan utföra en svängningsrörelse med amplituden $x_{\max}$ och svängningstiden T. Om $\lambda = 0$, blir svängningstiden $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ oberoende av amplituden $x_{\max}$. Om $\lambda > 0$, blir då T en avtagande eller växande funktion av $x_{\max}$?

2. Utgå från Newtons andra lag $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, där $\mathbf{F}$ är den totala yttre kraft som verkar på ett givet materiellt system med rörelsemängden $\mathbf{p}$. Härled därifrån rörelseekvationen för en raket med massan $m(t)$ som påverkas av en yttre kraft $\mathbf{F}(t)$. Raketens hastighet är $\mathbf{v}(t)$, och den massa som lämnar raketen har hastigheten $\mathbf{u}(t)$ relativt raketen. (*Ledning:* Det gäller alltså att ställa upp en differentialekvation från vilken man kan lösa ut $\dot{\mathbf{v}}(t)$ uttryckt i $\mathbf{F}(t)$, $m(t)$, $\dot{m}(t)$ och $\mathbf{u}(t)$.)

3. Hylsan A rör sig med konstant hastighet v. Bestäm vinkelhastigheten ω för stången AB uttryckt i s, v och R.

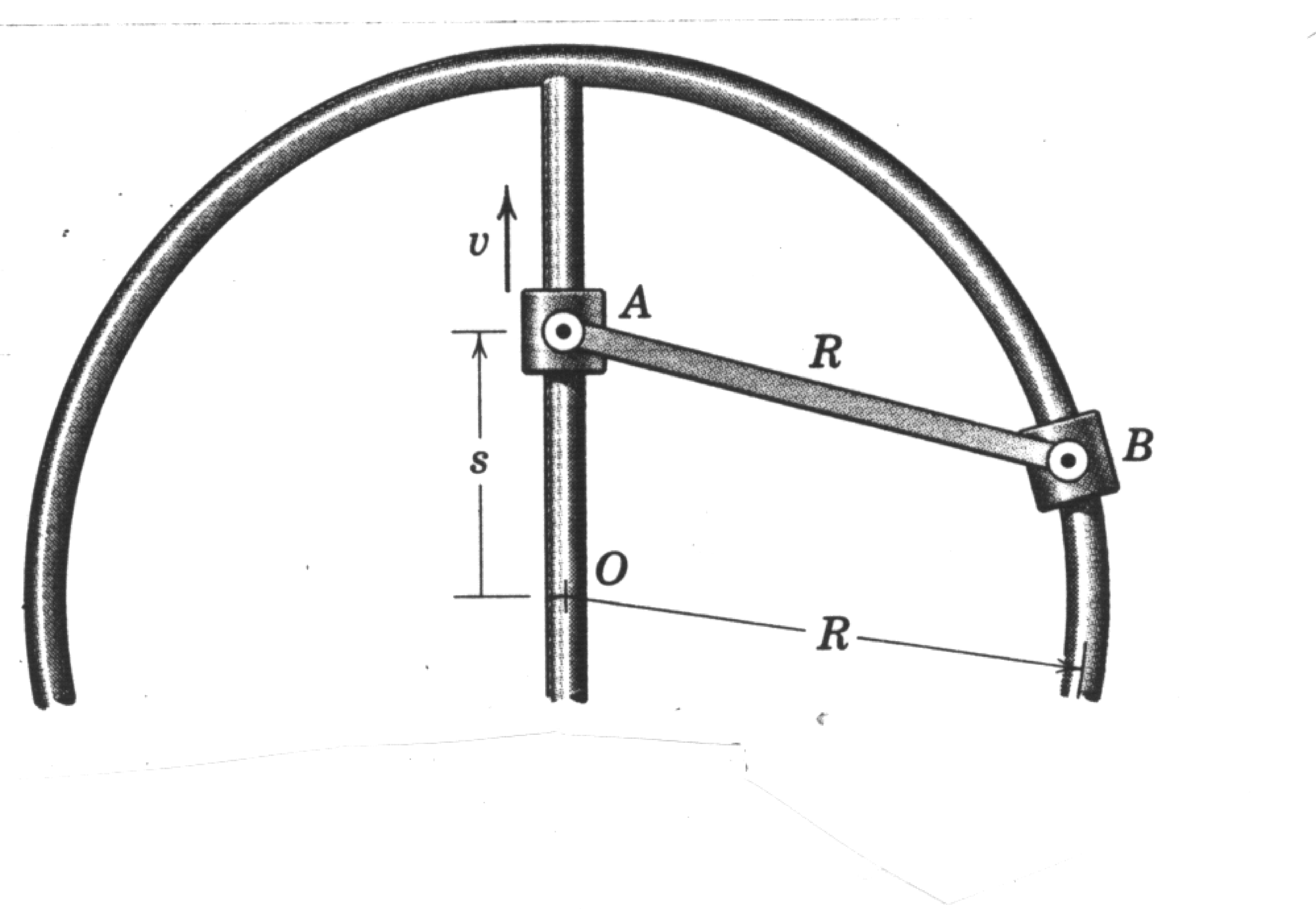
4. Den tunna ringen har massan m och kan fritt rotera i vertikalplanet kring den fixa punkten O. Om den släpps i vila då $\theta = 0$, bestäm n- och t-komponenterna av kraften som påverkar ringen i O som funktioner av θ.

5. Bestäm systemets rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_0$ med avseende på O i det avbildade ögonblicket. Klotens radie samt massan för axeln och stängerna kan försummas.

6. Ställ upp systemets rörelseekvation och bestäm dess naturliga vinkelfrekvens ω_n och dämpfaktor ζ.

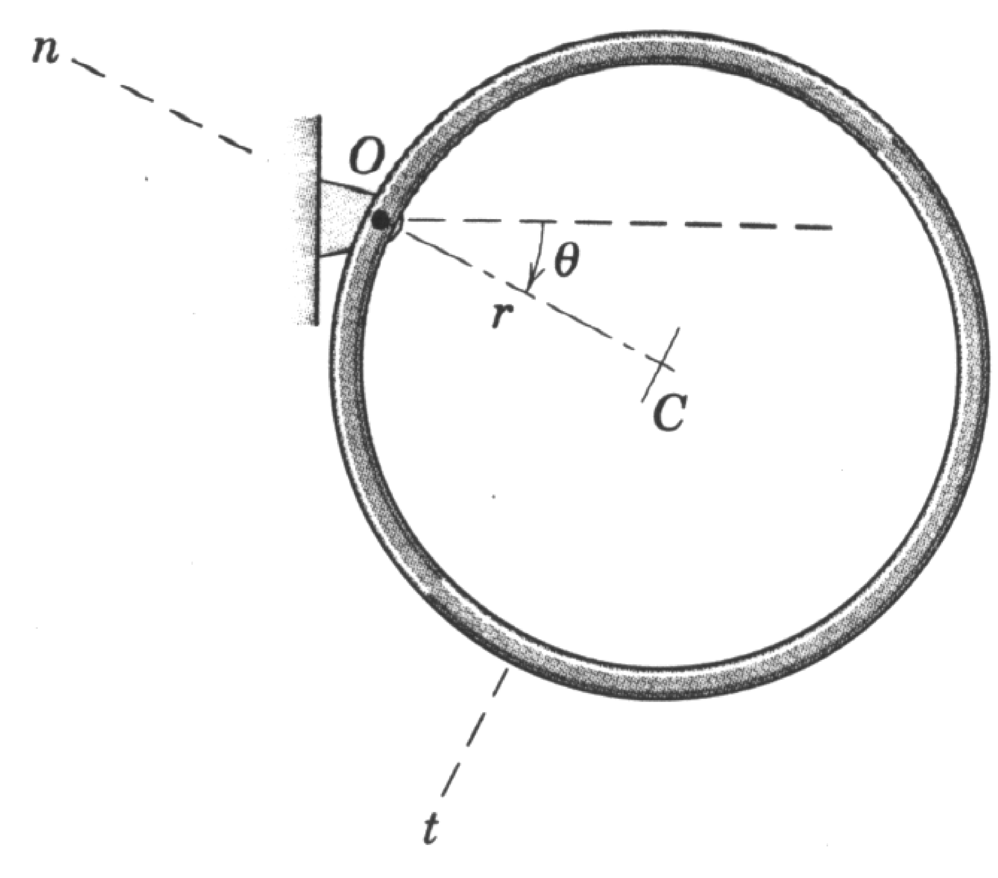
Lycka till!

3.



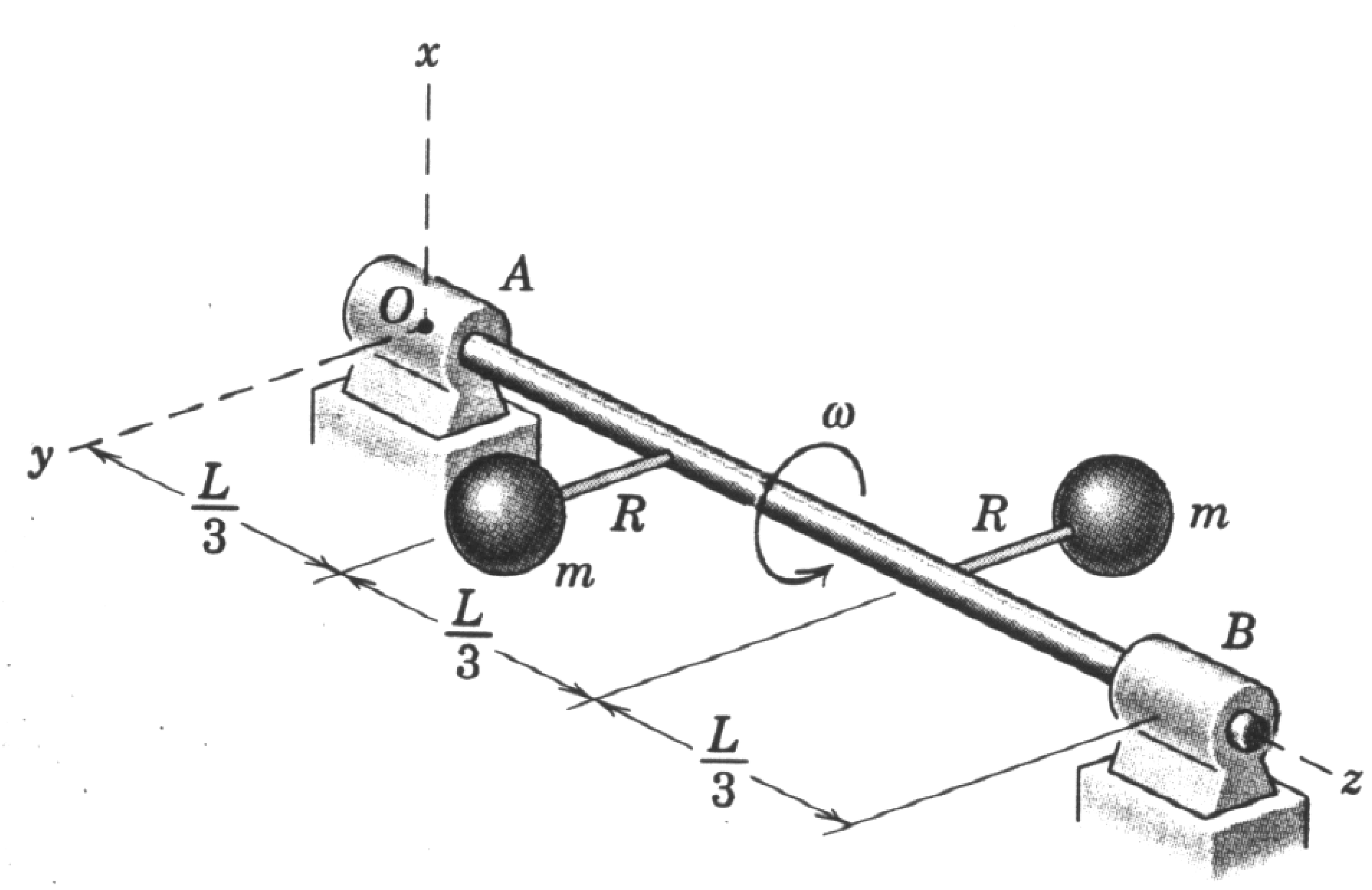
v
A
R
B
s
O
R

4.



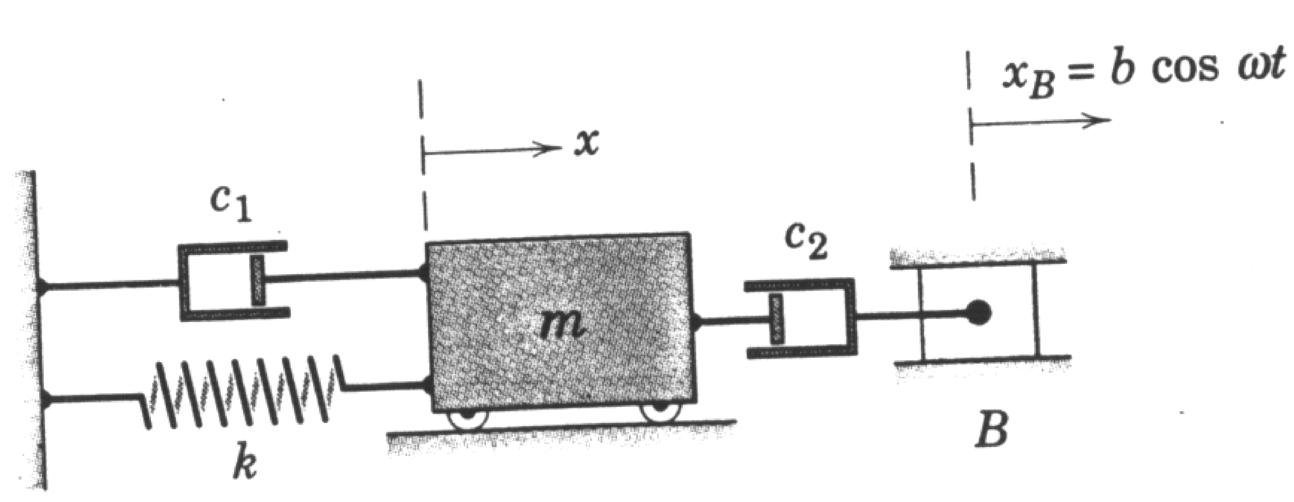
n
O
θ
r
C
t

5.



x
A
O
y
ω
R
R
m
m
L/3
L/3
L/3
B
z

6.



x
$x_B = b \cos \omega t$
c_1
c_2
m
k
B

Tentamen i Mekanik för F del B

13 januari 2003

1a) Helikopterns rotor roterar motsols så att rörelsemängdsmomentet är riktat uppåt och dess tidsderivata framåt. Antag att vi lägger på ett yttre moment så att nosen på helikoptern inte sänks på någon sida, dvs så att nosen pekar rakt fram. För att åstadkomma detta måste ett moment som drar nosen åt höger läggas på. I frånvaro av detta yttre moment kommer alltså helikopterns vänstra sida att sänka sig.
b)Med $\lambda = 0$ har vi en linjär fjäder med $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, där k ges av lutningen i kurvan $F = kx$. Med $\lambda > 0$ fås en brantare lutning på kurvan $F = kx + \lambda x^3$ med ökande x_{max} vilket gör att T kommer att avta som funktion av x_{max}.
2 Skriv upp rörelsemängden före och efter ett tidssteg Δt:

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) &= (M + \Delta m)\bar{v} \\ \bar{p}(t + \Delta t) &= M(\bar{v} + \Delta\bar{v}) + \Delta m(\bar{v} + \bar{u}) \end{aligned}$$

där M,Δm är massan för raketen resp. det förbrukade bränslet under tiden Δt. $\bar{v}$ och $\Delta\bar{v}$ är hast. för raketen resp. dess förändring, $\bar{u}$ är förbränningsgasernas hastighet relativt raketen. Detta medför att

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \lim_{t\to 0}\frac{\bar{p}(t + \Delta t) - \bar{p}(t)}{\Delta t} = \lim_{t\to 0}\frac{M\Delta\bar{v} + \Delta m\bar{u}}{\Delta t} = M\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\bar{u}.$$

Med $\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$ fås att

$$\dot{\bar{v}}(t) = \frac{1}{M}(\bar{F}(t) + \dot{M}(t)\bar{u}(t)).$$

3 Vi har ett tvång på systemet för den rätvinkliga triangeln med sidorna $R, s/2, R\sin\theta$

$$(R\sin\theta)^2 + \frac{s^2}{4} = R^2$$

där θ är en av de två vinklarna som är lika stora i den likbenta triangeln som bildas av sidorna med längderna R, R, S. Derivera båda sidor m.a.p tiden så fås uttrycket ($\dot{s} = v$)

$$\dot{\theta} = \frac{-v}{\sqrt{4R^2 - s^2}}.$$

Vinkelhastigheten för stången kommer nu att bli $\omega = -\dot{\theta} = v(4R^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}}$, medsols rotation.
4 Vi skall räkna ut krafterna O_t, O_n riktad i $-\hat{t}$-led och $\hat{n}$-led, med hjälp av Newtons andra lag. Vi behöver då accelerationens t, n komponenter som ju är $a_t = r\alpha$ och $a_n = r\omega^2$ Då kraftmomentet $M = I\alpha$, där α är vinkelaccelerationen och tröghetsmomentet $I = I_c + mr^2$. Den tunna ringen har tröghetsmomentet $I_c = mr^2$, vilket medför att $I = 2mr^2$. Eftersom kraftmomentet kring pkt O är $M = mgr\cos\theta$ fås att

$$\alpha = \frac{mgr}{I}\cos\theta = \frac{g}{2r}\cos\theta.$$

Nu behöver vi endast ta fram ett uttryck för vinkelhastigheten så kan vi lösa ut våra efterfrågade kraftkomponenter. Genom att använda att $\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \alpha d\theta$ (ringen släpps ju i vila vid $\theta = 0$) fås att $\omega^2 = \frac{g}{r}\sin\theta$, vilket i sin tur leder till Newtons andra lag:

$$\begin{aligned} O_n - mg\sin\theta = mr\omega^2 \qquad &\to \qquad O_n = 2mg\sin\theta \\ -O_t + mg\cos\theta = mr\alpha \qquad &\to \qquad O_t = \frac{1}{2}mg\cos\theta \end{aligned}$$

där O_n är riktad i $\hat{n}$-led och O_t i $-\hat{t}$-led från punkten O.

5 Vinkelhastigheten $\bar{\omega} = \omega\hat{z}$ så att rörelsemängdsmomentet m.a.p O i det avbildade ögonblicket blir

$$\bar{H}_O = -\omega I_{xz}\,\hat{x} - \omega I_{yz}\,\hat{y} + \omega I_{zz}\,\hat{z}$$

där I_{xz}, I_{yz} är deviationsmoment. Vi har att

$$\begin{aligned} I_{zz} &= mR^2 + mR^2 = 2mR^2 \\ I_{yz} &= \frac{1}{3}mRL - \frac{2}{3}mRL = -\frac{1}{3}mRL \\ I_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

och slutligen

$$\bar{H}_O = \frac{1}{3}m\omega RL\hat{y} + 2m\omega R^2\,\hat{z}.$$

6 Vi ställer upp rörelseekvationen och identifierar sedan dämpfaktorn ζ och vinkelfrekvensen ω_n. Ur figuren ser vi att $c_1\dot{x}, kx, c_2\dot{x}$ kommer att motverka rörelsen i x-led medan $c_2\dot{x}_B$ kommer att vara en drivande faktor. Newtons andra lag kommer nu att se ut så här:

$$m\ddot{x} = -c_1\dot{x} - c_2\dot{x} - kx - c_2\omega b\sin\omega t$$

vilket också kan skrivas som

$$\ddot{x} = -\frac{(c_1 + c_2)}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x - \frac{c_2\omega b}{m}\sin\omega t$$

eller på standardformen

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = -\frac{c_2\omega b}{m}\sin\omega t.$$

Identifiera nu den dimensionslösa dämpfaktorn ζ och vinkelfrekvensen ω_n;

$$\zeta = \frac{(c_1 + c_2)}{2m\omega_n}, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Tentamen i Mekanik för F del B

Kurskod: FFM052
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 21 oktober 2002 kl 08.45 - 12.45 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) En konståkerska utför en piruett på isen. Till en början har hon armarna rakt utsträckta, men sedan drar hon in dem mot kroppen. Man kan därvid observera att hennes vinkelhastighet ökar. Förklara detta genom att använda att en viss storhet är konstant i tiden.

   b) Den vänstra och den högra massan är lika, och de två fjädrarna i det högra systemet är av samma typ som fjädern i det vänstra systemet. Det vänstra systemet kan utföra vertikala svängningar med svängningstiden t = 0,5 s. Vad blir svängningstiden för det högra systemet?

2. En stel kropp roterar kring en fix punkt O med vinkelhastighetsvektorn $\overline{\omega}$. Visa att dess kinetiska energi kan skrivas

$$T = \frac{1}{2}\overline{\omega} \cdot \overline{H}_O,$$

   där vektorn $\overline{H}_0$ är kroppens rörelsemängdsmoment med avseende på O.

3. Raketen väger 2,8 ton och bränsleförbrukningen är 120 kg/s. Förbränningsgasernas hastighet relativt raketen är 640 m/s. På den aktuella höjden är tyngdaccelerationen 9,34 m/s^2. Bestäm vertikal och horisontalkomponenterna av raketens acceleration.

Vänd!

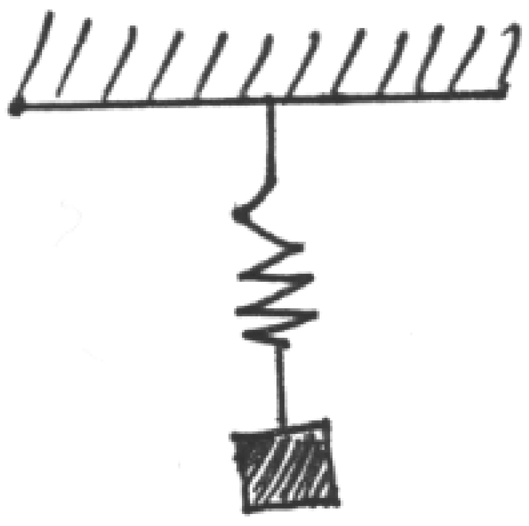
4. Armen OA har tyngdpunkten i G, massan m_{OA} och tröghetsmomentet I_0 med avseende på den fixa punkten O. Kugghjulet B har massan m_B och tröghetsmomentet I_A med avseende på sin mittpunkt A. Kugghjulet C är fixt i vertikalplanet och kan inte rotera. Armen OA är från början horisontell och i vila, och påverkas därefter av ett konstant vridmoment M. Bestäm vinkelhastigheten för armen OA då den är vertikal (så att punkten A sammanfaller med A').

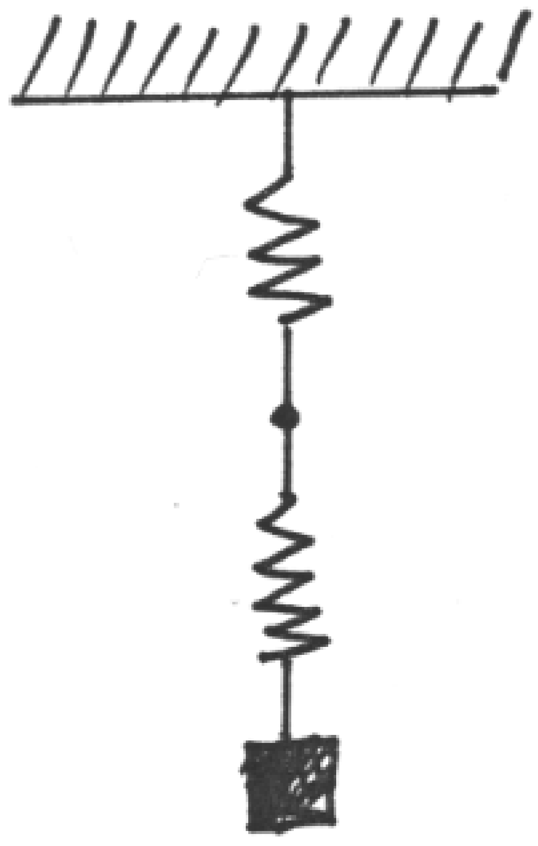
5. Den homogena plattan har massan m och roterar med konstant vinkelhastighet ω kring den vertikala axeln. Bestäm vridmomentsvektorn $\mathbf{M}$ med vilken plattan påverkar axeln. (*Ledning*: Bestäm plattans huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment.)

6. Visa att systemets egenfrekvens är oberoende av vinkeln θ.

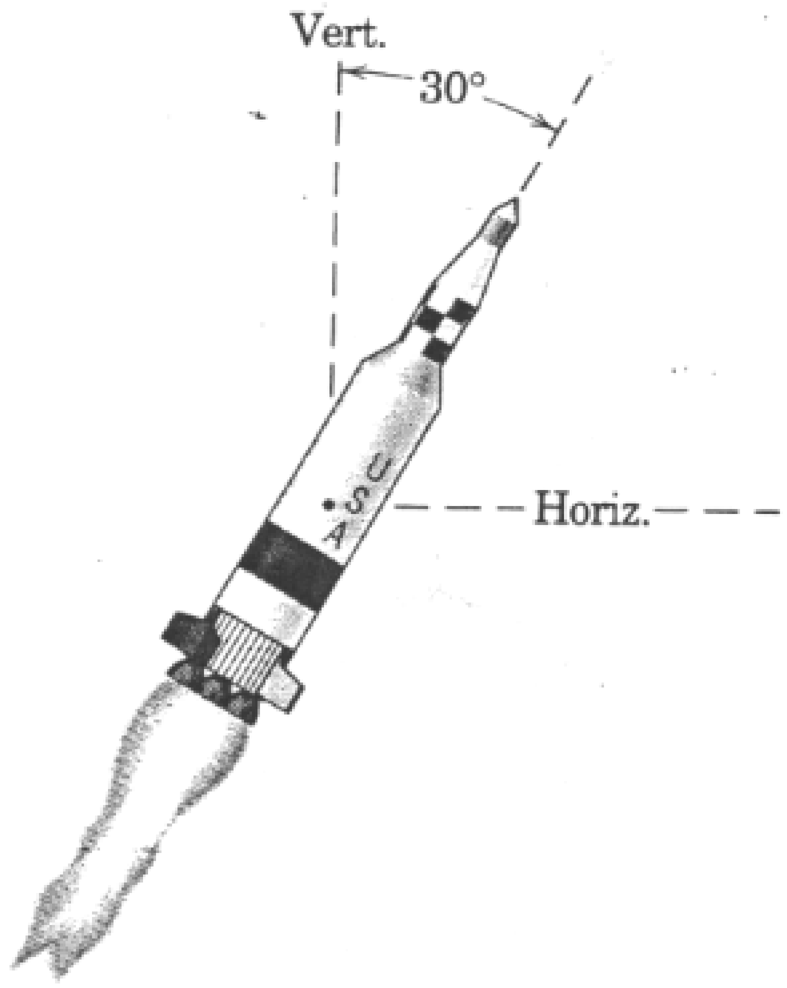
Lycka till!

1.b)

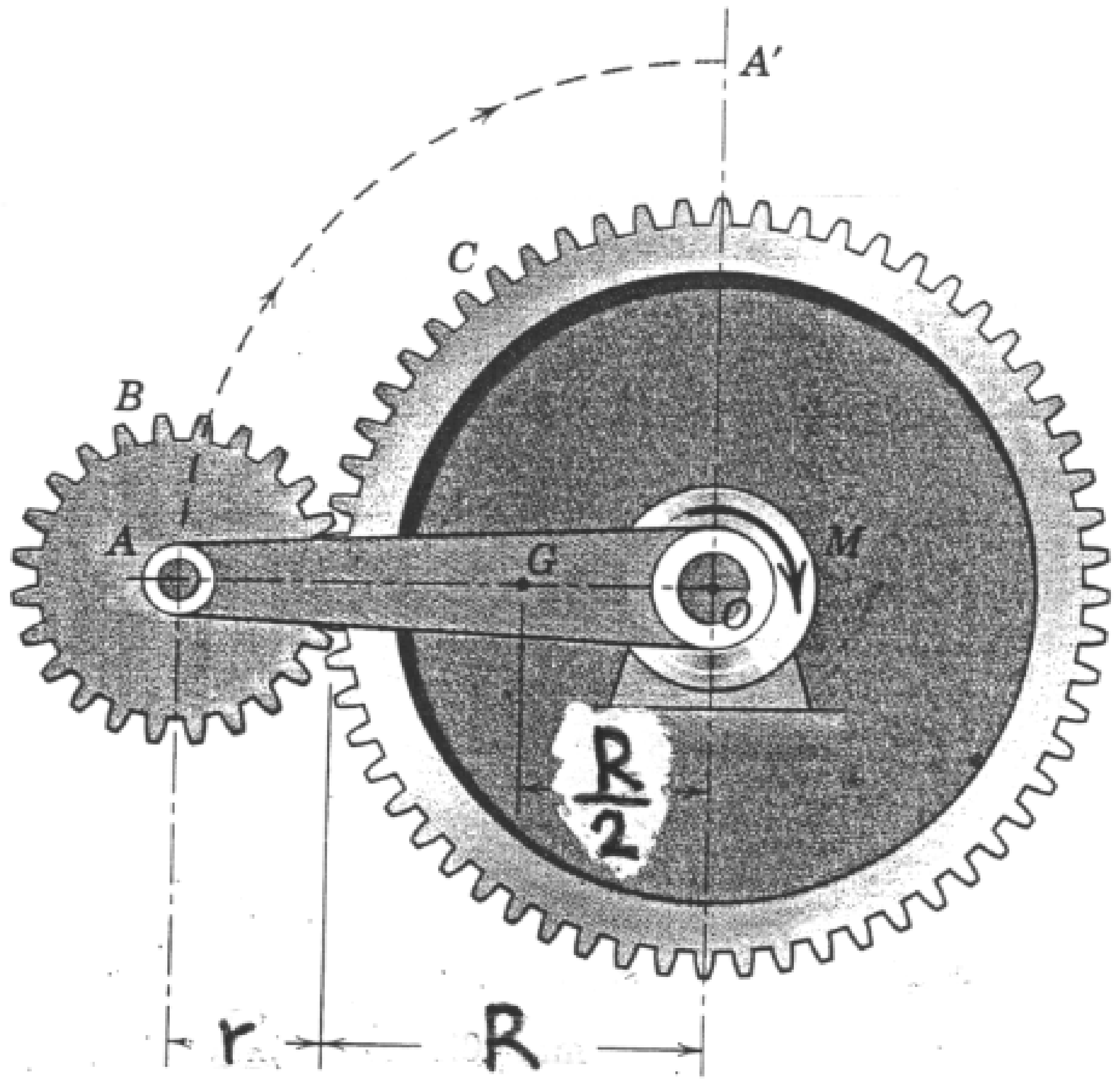




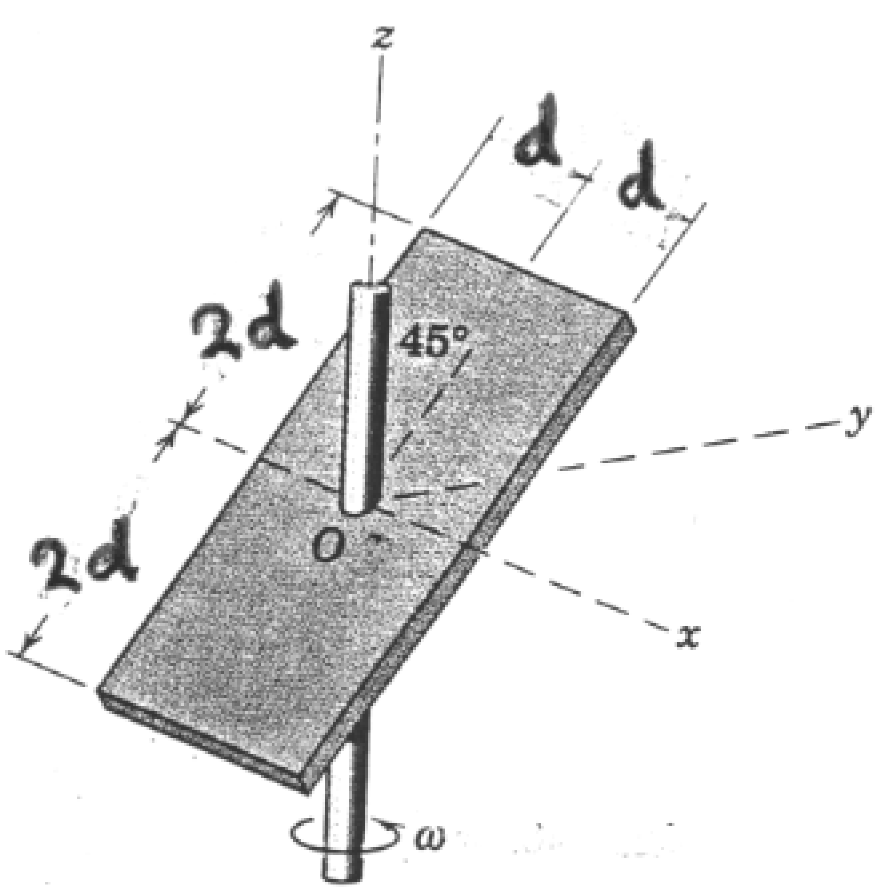
3.



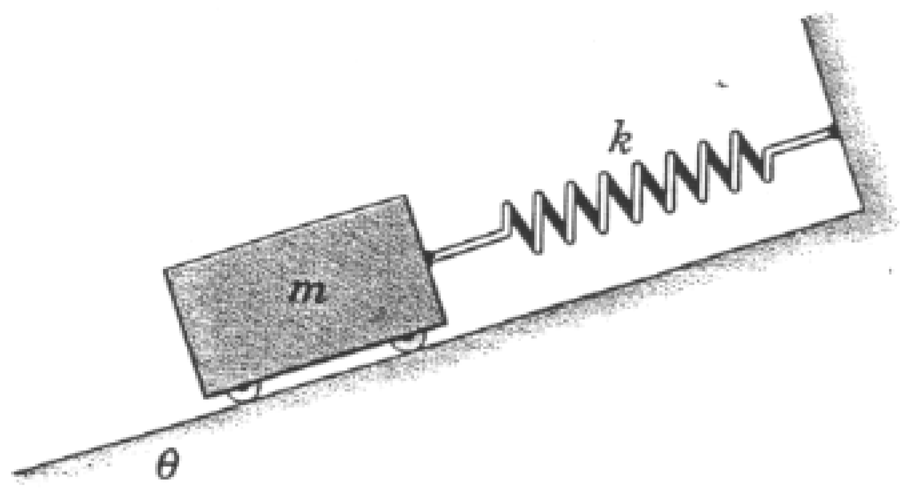
4.



5.



6.



Tentamen i Mekanik för F del B

21 oktober 2002

1a) Eftersom kraften är riktad i $\hat{r}$-led är rörelsemängdsmomentet en konserverad storhet:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{G}) = r\hat{r} \times F\hat{r} = 0$$

Dvs, $I_1 w_1 = I_2 w_2$ och då tröghetsmomentet $I_2 < I_1$ (radien minskar) $\Longrightarrow w_2 > w_1$ (vinkelhastigheten ökar).
b) Det vänstra systemet har frekvensen $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ medan det högra har frekvensen $\omega_2 = \sqrt{k/2m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1$ (i analogi med parallellkopplade motstånd, $1/k_2 = 1/k+1/k$). Då svängningstiden $t_2 = 2\pi/\omega_2 = \sqrt{2}t_1$ och $t_1 = 0.5s \Longrightarrow t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}s$.
2 Uttrycket för kinetiska energin ges av:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{\omega} \cdot \bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{H}_0$$

Här har vi använt $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})$ och att vinkelhastigheten är densamma för varje punkt i den stela kroppen.
3 Skriv upp rörelsemängden före och efter ett tidssteg Δt:

$$\begin{aligned} \bar{G}(t) &= (M + \Delta m)\bar{v} \\ \bar{G}(t + \Delta t) &= M(\bar{v} + \Delta v) + \Delta m(\bar{v} + \bar{u}) \end{aligned}$$

där M,Δm är massan för raketen resp. det förbrukade bränslet under tiden Δt. $\bar{v}$ och $\Delta \bar{v}$ är hast. för raketen resp. dess förändring, $\bar{u}$ är förbränningsgasernas hastighet relativt raketen (motsatt riktning mot raketen). Detta medför att

$$\bar{F} = \frac{d\bar{G}}{dt} = \lim_{t\to 0}\frac{\bar{G}(t+\Delta t) - \bar{G}(t)}{\Delta t} = \lim_{t\to 0}\frac{M\Delta\bar{v} + \Delta m\bar{u}}{\Delta t} = M\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\bar{u}$$

Med $\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$ fås att acceleration

$$\bar{a} = \frac{\bar{u}}{M}\frac{dM}{dt} + \bar{g}$$

Relativa hastigheten i x, y-led (horisontal- resp. vertikalled) $u_x = u\sin\theta, u_y = u\cos\theta$ ($\theta = 30^o$) ger nu vertikal och horisontalkomponenterna av raketens acceleration

$$a_x = \frac{u}{M}\frac{dM}{dt}\sin\theta \qquad a_y = \frac{u}{M}\frac{dM}{dt}\cos\theta - g$$

Med givna värden ($u = -640$m/s, $\frac{dM}{dt} = -120$kg/s, $g = 9.34$m/s^2, $\theta = 30^o$, $M = 2800kg$) blir $a_x = 13.7m/s^2$ och $a_y = 14.4m/s^2$.
4 Använd att det utförda arbetet U är summan av potentiella V och kinetiska energin T, dvs $U = T + V$. Det utförda arbetet $U = \int_0^{\pi/2} M \cdot d\theta = M\frac{\pi}{2}$, pga det konstanta vridmomentet M. Kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}I_A{\omega'}^2 + \frac{1}{2}m_B(r+R)^2\omega^2$$

där kugghjulet B snurrar med vinkelhastigheten ω' och ω är vår sökta vinkelhastighet. Vinkelhastigheterna är relaterade som $\omega' r = \omega(r + R)$. Potentiella energin då punkten A sammanfaller med A' (med nollan i horisontalläget) ges av $V = m_B g(r+R) + m_{OA}g(\frac{R}{2})$. Med $U = T + V$ fås nu att

$$M\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}(1+\frac{R}{r})^2 I_A\omega^2 + \frac{1}{2}m_B(r+R)^2\omega^2 + V$$

Insättning av uttrycket för V ger nu vinkelhastigheten för armen OA då den är vertikal;

$$\omega = \left(\frac{\pi M - g(2m_B(r+R) + m_{OA}R)}{I_O + I_A(1+\frac{R}{r})^2 + m_B(r+R)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Alternativ lösning: Använd en momentekvationen kring O och integrera över $d\theta$ från 0 till $\frac{\pi}{2}$, eftersom $\int \alpha d\theta = \int \omega d\omega$;

$$\int_0^{\pi/2} (M - m_{OA}g\frac{R}{2}\cos\theta - m_B g(r+R)\cos\theta)d\theta = \int_0^{\omega} (I_O + m_B(r+R)^2 + I_A(1+\frac{R}{r})^2)\omega d\omega$$

vilket också ger den erhållna lösningen ovan.

5 Inför principalaxlar x', y', z', där x', y' ligger utmed plattans yta så att $x' = x$ och z' bildar $\theta = 45^o$ vinkel med z. Tröghetsmomentet kring z' ges nu av (deviationsmomenten är ju här noll)

$$I = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$

där $I_{x'x'} = \frac{1}{12}m(4d)^2 = \frac{4}{3}md^2, I_{y'y'} = \frac{1}{12}m(2d)^2 = \frac{1}{3}md^2, I_{z'z'} = \frac{1}{12}m((2d)^2+(4d)^2) = \frac{5}{3}md^2$. För att relatera våra två koordinatsystem inför enhetsvektorer $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ utefter x', y' resp. z'-axlarna.

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \hat{x} & & \\ \hat{y}' &= \cos\theta\hat{y} + \sin\theta\hat{z} & \qquad \hat{y} &= \cos\theta\hat{y}' - \sin\theta\hat{z}' \\ \hat{z}' &= -\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z} & \qquad \hat{z} &= \sin\theta\hat{y}' + \cos\theta\hat{z}' \end{aligned}$$

Vinkelhastigheten kan nu skrivas som $\bar{\omega} = \omega\hat{z} = \omega(\sin\theta\hat{y}' + \cos\theta\hat{z}')$ vilket medför att rörelsemängdsmomentet

$$\bar{H} = \omega I_{y'y'}\sin\theta\hat{y}' + \omega I_{z'z'}\cos\theta\hat{z}'$$

och vridmomentet, med vilken plattan påverkar axeln;

$$\bar{M} = -\bar{\omega}\times\bar{H} = -\omega^2(I_{z'z'} - I_{y'y'})\cos\theta\sin\theta\hat{x}' = -\frac{2}{3}m\omega^2 d^2\hat{x}$$

Vinkelhastigheten för koordinatsystemet x', y', z' är ju även den $\omega\hat{z}$.

Alternativ lösning: Om vi inte inför principalaxlar behöver vi räkna ut deviationsmomenten I_{yz} och I_{xz} eftersom

$$\bar{M} = -\bar{\omega}\times\bar{H} = -\omega^2 I_{yz}\hat{x} + \omega^2 I_{xz}\hat{y} \qquad (1)$$

där $I_{xz} = 0$ och $I_{yz} = \frac{2}{3}md^2$ så att $\bar{M} = -\frac{2}{3}md^2\omega^2\hat{x}$.

6 Inför x-axel utmed det lutande planet från jämviktsläget som ligger avståndet δ ifrån fjäderns ospända läge. Rörelseekvationen ges då utav

$$m\ddot{x} = -k(x+\delta) + mg\sin\theta$$

I jämviktsläget $x = 0$ gäller att:

$$k\delta = mg\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

med lösning

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

där konstanterna A, B bestäms av begynnelsevärden. Vi ser att ω är oberoende av θ. θ bestämmer enbart jämviktsläget δ varifrån svägningarna utföres.

Tentamen i Mekanik F del B

Tid och plats: Tisdagen den 20 augusti 2002 kl 09.15 - 13.15 i V.
Jourhavande assistent: Niclas Jacobson, ankn 8425.
Hjälpmedel: Valfria tabellsamlingar, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Gränsen för godkänt är 30 p.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. a) En bil färdas rakt österut på en väg i Göteborgstrakten. På grund av jordrotationen påverkas den av en Corioliskraft, som kan uppdelas i en vertikalkomponent och en horisontalkomponent. Åt vilket väderstrack är horisontalkomponenten riktad? (5 p)

   b) En ström av masslösa neutrinopartiklar färdas med ljushastigheten $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s från solen mot jorden. Deras bana korsas i rät vinkel av ett rymdskepp, som färdas med hastigheten $v = 2,0 \cdot 10^8$ m/s (relativt jorden och solen). Hur stor hastighet har neutrinopartiklarna relativt rymdskeppet? (5 p)

2. Ett mekaniskt system beskrivs med en generaliserad koordinat q och Lagrangefunktionen $L = K - V$. De kinetiska och potentiella energierna är av formen $K = f(q)\dot{q}^2$ respektive $V = V(q)$, där f och V är vissa givna funktioner av q. Visa att Lagranges ekvation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ medför att den totala mekaniska energin $E = K + V$ är konstant, det vill säga att $\frac{d}{dt}E = 0$.

3. En vagn med massan M kan röra sig friktionslöst längs ett horisontellt spår och är förbunden med en fix punkt på spåret med en fjäder med fjäderkonstanten k. Från vagnen hänger en kula med massan m (och tyngden mg) i ett snöre med längden l. Kulan pendlar i ett vertikalplan genom spåret som vagnen rör sig på. Skriv upp Lagranges ekvationer för detta system och bestäm vinkelfrekvenserna för små svängningar omkring jämviktsläget.

4. En homogen stång med längden l och massan m är i sin mittpunkt fäst på en axel som bildar vinkeln α med stången. Axeln är friktionslöst lagrad i två kullager på avståndet d från varandra, och roterar med vinkelhastigheten ω. Beräkna kraften från axeln på vardera lagret. (Tyngdkraften får försummas.)

Vänd!

5. Emil står först stilla på en karusell som roterar med vinkelhastigheten Ω och börjar sedan plötsligt gå i riktning mot centrum med hastigheten v. Framför sig håller han en matematisk pendel som bara kan göra utslag i ett vertikalplan vinkelrätt mot hans gångriktning.

   Bestäm pendelns utslagsvinkel när den har kommit i jämvikt (5 p).

   Bestäm även dess maximala utslagsvinkel om den hängde stilla rakt ned när Emil började gå (5 p).

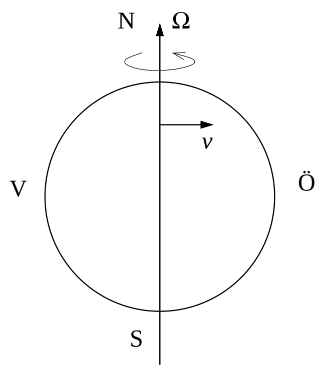
6. En foton med energin E kolliderar med en elektron i vila (vilomassa m_0). Efter kollisionen består systemet av elektronen samt en foton som rör sig i 90^o vinkel relativt den inkommande fotonen. Bestäm den utgående fotonens energi.

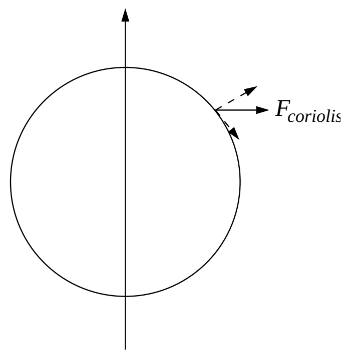
Lycka till!

Lösningar till Tentamen i Mekanik F del B 2002-08-20

Uppgift 1.

a)



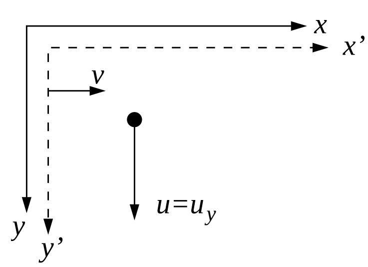


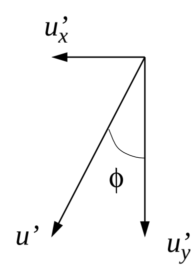
Om $\mathbf{\Omega}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}$ är bilens hastighet (relativt jorden) ges corioliskraften av

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}. \tag{1}$$

Corioliskraften är riktad utåt vinkelrätt mot $\mathbf{\Omega}$ och $\mathbf{v}$ och horisontalkomponenten är riktad söderut (se fig.).

b)





Betrakta ett koordinatsystem, (x', y'), där rymdskeppet är i vila, dvs systemet rör sig med hastighet $v = 2.0 \cdot 10^8$ m/s längs x-axeln i system (x, y) (fixt relativt jorden och solen). Neutrinopartiklarnas hastighet i system (x, y) är $u = u_y = c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s och beskrivs i (x', y')-systemet av

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} = \{u_x = 0\} = -v \tag{2}$$

och

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma[1 - vu_x/c^2]} = \{u_y = c\} = c/\gamma = c\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{c^2 - v^2}, \tag{3}$$

dvs

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = c. \tag{4}$$

Neutrinopartiklarna rör sig med ljusets hastighet relativt rymdskeppet, men i en annan riktning än relativt jorden och solen. Om ϕ är vinkeln mellan u och u' har vi (se fig.)

$$\tan\phi = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 42°. \tag{5}$$

Uppgift 2.
Kinetisk energi: $K = f(q)\dot{q}^2$
potentiell energi: $V = V(q)$
Lagrangefunktionen: $L = K - V = f(q)\dot{q}^2 - V(q)$
Visa att Lagranges ekvation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ medför att den totala mekaniska energin $E = K + V$ är konstant, dvs $\frac{d}{dt}E = 0$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}(2f(q)\dot{q}) = 2\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 - \frac{dV}{dq} \tag{7}$$

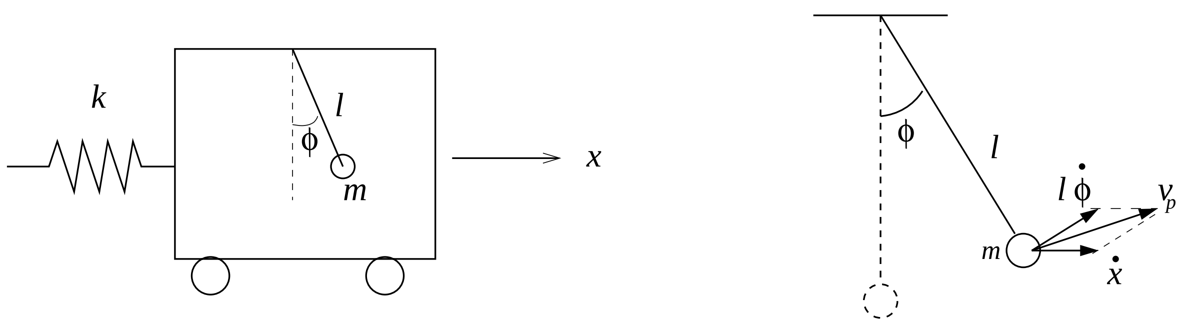
Lagranges ekv. blir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq} = 0 \tag{8}$$

Energin ges av $E = f(q)\dot{q}^2 + V(q)$, så

$$\frac{d}{dt}E = \frac{df}{dq}\dot{q}\dot{q}^2 + 2f(q)\dot{q}\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\dot{q} = \dot{q}\underbrace{\left(\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\right)}_{=0 \text{ enl. Lagranges ekv.}} = 0 \tag{9}$$

V.S.V
Uppgift 3.



Generaliserade koordinater: x och ϕ
Vagnens kinetiska energi: $K_v = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$
Vagnens potentiella energi: $V_v = \frac{1}{2}kx^2$

Pendelns kula har hastigheten v_p (se fig.)

$$v_p^2 = l^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + (l\dot{\phi}\cos\phi + \dot{x})^2 = l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi \tag{10}$$

Pendelns kinetiska energi: $K_p = \frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi)$
Pendelns potentiella energi: $V_p = -mgl\cos\phi$

Lagrangefunktionen kan nu skrivas $L = K_v + K_p - V_v - V_p$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\phi \tag{11}$$

Sök Lagranges ekvationer $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ för x och ϕ.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\phi}\cos\phi$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\phi}\cos\phi - ml\dot{\phi}^2\sin\phi$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\dot{\phi} + l\dot{x}\cos\phi)$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\ddot{\phi} + l\ddot{x}\cos\phi - l\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi)$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -ml\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi - mgl\sin\phi$

Vi kan nu skriva upp Lagranges ekv. för x och ϕ

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi}\cos\phi - \frac{ml}{M+m}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{12}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\phi + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \tag{13}$$

För små svängningar omkring jämviktsläget reduceras ekvationerna ovan till

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi} + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\ddot{x}}{l} + \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0 \tag{15}$$

där vi har använt $\cos\phi \approx 1$, $\sin\phi \approx \phi$ och $\dot{\phi}^2 \approx 0$. Ekvationerna kan skrivas på matrisform $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0$, där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \phi \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ml}{M+m} \\ \frac{1}{l} & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \frac{k}{M+m} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{pmatrix} \tag{16}$$

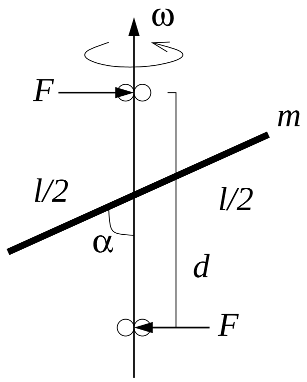
Ansats av typen $\mathbf{x} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$, där $\mathbf{a}$ är en kolumnvektor innehållande amplituder, ger

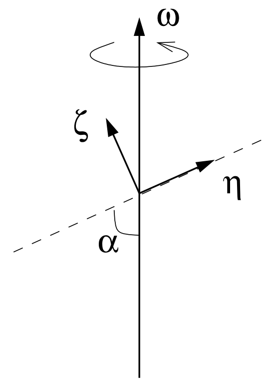
$$(-M\omega^2 + K)\mathbf{a} = 0. \tag{17}$$

Nollskilld lösning för $\mathbf{a}$ fås endast då determinanten av $(-M\omega^2 + K)$ är lika med noll. Detta leder till en andragradsekvation i ω^2 med lösningarna

$$\omega^2 = \frac{g(M+m)+kl}{2Ml} \pm \frac{1}{2Ml}\sqrt{g^2(M+m)^2 + (kl)^2 - 2gkl(M-m)} \tag{18}$$

Uppgift 4.





Placera ett koordinatsystem (ξ, η, ζ) längs stångens huvudtröghetsaxlar. I detta system är tröghetstensorn diagonal,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

där

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{12} m l^2, \;\; I_{\eta\eta} = 0, \;\; I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{12} m l^2. \tag{20}$$

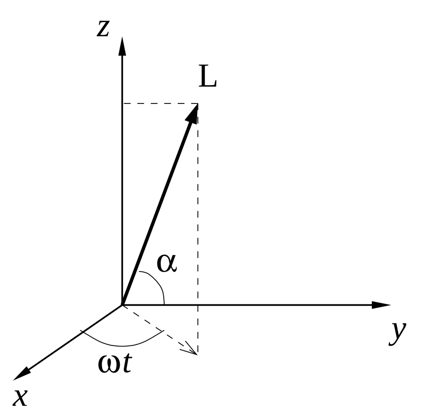
Rotationsvektorn beskrivs i (ξ, η, ζ)-systemet av

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos\alpha\hat{\eta} + \sin\alpha\hat{\zeta}). \tag{21}$$

Stångens rörelsemängdsmoment är $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{12} m l^2 \omega \sin\alpha\hat{\zeta} = L\hat{\zeta}, \tag{22}$$

dvs $\mathbf{L}$ roterar kring $\boldsymbol{\omega}$ vinkelrätt mot stången.



För att beräkna kraftmomentet på stången, $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$, beskriver vi $\mathbf{L}$ i ett fixt koordinatsystem (x, y, z) där rotationsaxeln ligger i z-riktningen (se fig.),

$$\mathbf{L} = L\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{y}} + L\sin\alpha\hat{\mathbf{z}}. \tag{23}$$

Kraftmomentet ges av

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -L\omega\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\omega\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{y}} = L\omega\cos\alpha(-\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + \cos\omega t\hat{\mathbf{y}}), \tag{24}$$

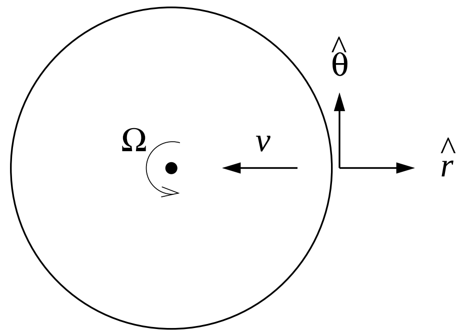
vilket ger

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = L\omega\cos\alpha = \frac{1}{12}ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{25}$$

Vi kan nu beräkna kraften F från axeln på vardera lagren mha $\tau = Fd$,

$$F = \frac{1}{12}m\frac{l^2}{d}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{26}$$

Uppgift 5.



Betrakta ett system som roterar med karusellen. Emils pendel påverkas i detta system, utöver tygngdkraften $W = mg$, av fiktiva krafter. De fiktiva krafterna i roterande system ges av

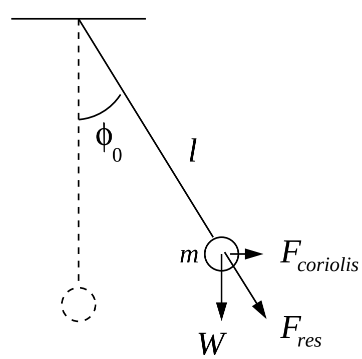
$$\mathbf{F}_{fict} = \mathbf{F}_{coriolis} + \mathbf{F}_{centrifugal} = -2m\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_{rot} - m\boldsymbol{\Omega}\times(\ \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}), \tag{27}$$

där $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}_{rot} = v(-\hat{\mathbf{r}})$ är Emils hastighet i det roterande systemet. Centrifugalkraften är riktad utåt från rotationsaxeln och påverkar därför inte pendelns rörelse.

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_{rot} = -2m\Omega\hat{\mathbf{z}}\times v(-\hat{\mathbf{r}}) = 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{28}$$

Totala kraften i pendelns rörelseplan ges av

$$\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}} + 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{29}$$

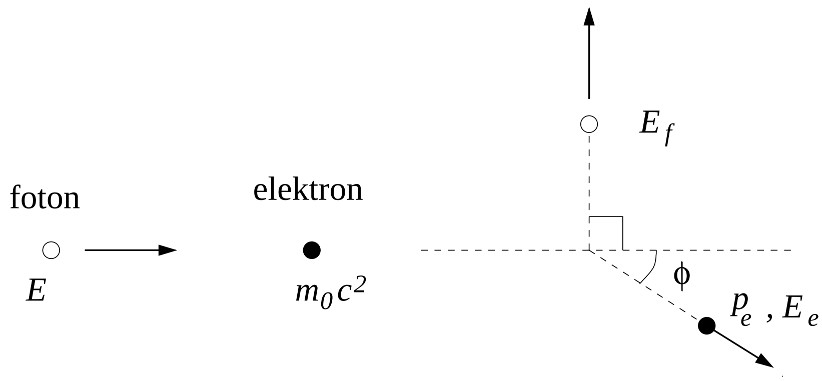


Pendelns utslagsvinkel i jämvikt, ϕ_0, ges av

$$\tan\phi_0 = \frac{F_{coriolis}}{W} = \frac{2m\Omega v}{mg} \Longrightarrow \phi_0 = \arctan(\frac{2\Omega v}{g}). \tag{30}$$

Om pendeln var stilla när Emil började gå kommer den att pendla med amplitud ϕ_0 omkring jämviktsläget. Maximal utsalagsvinkel blir därför $\phi_{max} = 2\phi_0$.

Uppgift 6.



Energikonservering ger

$$E + m_0 c^2 = E_f + E_e, \tag{31}$$

där E_f och E_e är fotonens resp. elektronens energi efter stöten.

Rörelsemängdskonservering ger

$\rightarrow$: $E/c = p_e \cos\phi \Rightarrow E^2 = (p_e c)^2 \cos^2\phi$

$\uparrow$: $0 = E_f/c - p_e \sin\phi \Rightarrow E_f^2 = (p_e c)^2 \sin^2\phi$

där p_e är elektronens rörelsemängd efter stöten, E/c och E_f/c är fotonens rörelsemängd före resp efter stöten. Addition av ekvationerna ovan ger

$$E^2 + E_f^2 = (p_e c)^2. \tag{32}$$

Sätter vi in enregi-rörelsemängdsrelationen $(p_e c)^2 = E_e^2 - (m_0 c^2)^2$ i ekv. (32) får vi

$$E^2 + E_f^2 = E_e^2 - (m_0 c^2)^2 \tag{33}$$

Använd energikonservering (ekv. (31)) och ekv. (33) för att eliminera elektronens energi E_e. Från ekv. (31) har vi

$$E_e = E + m_0 c^2 - E_f. \tag{34}$$

Insättning i ekv. (33) ger

$$E^2 + E_f^2 = (E + m_0 c^2 - E_f)^2 - (m_0 c^2)^2, \tag{35}$$

vilket leder till ett uttryck för fotonens energi efter stöten

$$E_f = \frac{E}{E/m_0 c^2 + 1}. \tag{36}$$

Tentamen i Mekanik F del B FFM052

Tid och plats: Måndagen den 14 januari 2002 kl 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Valfria tabellsamlingar, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Gränsen för godkänt är 30 p.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. a) Är det möjligt för en satellit att röra sig på en cirkulär bana kring jorden så att omloppstiden blir kortare än ett dygn? (Satelliten påverkas bara av gravitationskraften från jorden.) (5 p)

   b) Emilia skickar en morgon klockan 08.15.13 ett email från Göteborg till Osqar i Stockholm, som får det klockan 08.15.19. Truls beskriver dessa båda händelser relativt sitt vilosystem, som rör sig med en likformig hastighet $\mathbf{v}$ relativt jorden. Är det möjligt att detta email enligt Truls kommer fram *innan* det skickades? (5 p)

2. Bevisa, utgående från Lorentztransformationen, den relativistiska formeln för transformering av hastigheter
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}.$$
(Här är u_x och u'_x x-komponenterna av hastigheter relativt två inertialsystem S och S' som rör sig relativt varandra med hastigheten v längs med x-axeln.)

3. En fjäder med fjäderkonstanten k_1 har sin ena ände fix och i den andra änden hänger en massa m_1. I denna massa är fäst ena änden av en annan fjäder med fjäderkonstanten k_2, och i den andra änden av denna fjäder hänger en annan massa m_2. De två massorna kan bara röra sig i vertikalled. Inför lämpliga generaliserade koordinater och ställ upp Lagranges ekvationer för detta system. Bestäm sedan vinkelfrekvenserna för svängningar kring jämviktsläget.

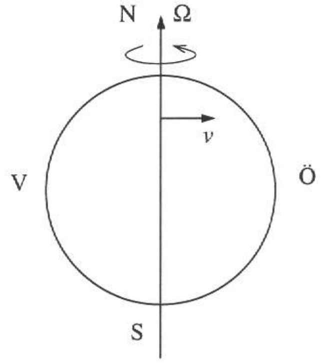
4. På grund av jordrotationen är inte jordklotet sfäriskt utan något avplattat vid polerna. För att analysera detta kan man anta att jorden är flytande, vilket betyder att den totala potentiella energin (från gravitationskraften och centripetalkraften) för en hypotetisk partikel med massan m skall vara konstant över hela jordytan. Givet att jordradien vid ekvatorn är 6378 km, uppskatta med denna metod jordradien vid polerna.

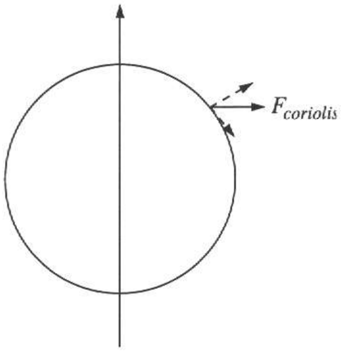
Vänd!

Lösningar till Tentamen i Mekanik F del B 2002-08-20

Uppgift 1.

a)



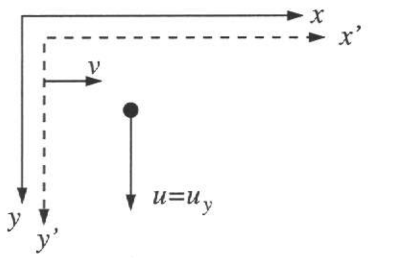


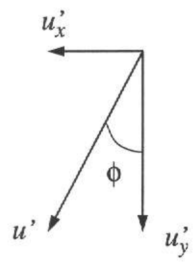
Om $\boldsymbol{\Omega}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}$ är bilens hastighet (relativt jorden) ges corioliskraften av

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}. \tag{1}$$

Corioliskraften är riktad utåt vinkelrätt mot $\boldsymbol{\Omega}$ och $\mathbf{v}$ och horisontalkomponenten är riktad söderut (se fig.).

b)





Betrakta ett koordinatsystem, (x', y'), där rymdskeppet är i vila, dvs systemet rör sig med hastighet $v = 2.0 \cdot 10^8$ m/s längs x-axeln i system (x, y) (fixt relativt jorden och solen). Neutrinopartiklarnas hastighet i system (x, y) är $u = u_y = c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s och beskrivs i (x', y')-systemet av

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} = \{u_x = 0\} = -v \tag{2}$$

och

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma[1 - vu_x/c^2]} = \{u_y = c\} = c/\gamma = c\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{c^2 - v^2}, \tag{3}$$

dvs

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = c. \tag{4}$$

Neutrinopartiklarna rör sig med ljusets hastighet relativt rymdskeppet, men i en annan riktning än relativt jorden och solen. Om ϕ är vinkeln mellan u och u' har vi (se fig.)

$$\tan\phi = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 42°. \tag{5}$$

Uppgift 2.
Kinetisk energi: $K = f(q)\dot{q}^2$
potentiell energi: $V = V(q)$
Lagrangefunktionen: $L = K - V = f(q)\dot{q}^2 - V(q)$
Visa att Lagranges ekvation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ medför att den totala mekaniska energin $E = K + V$ är konstant, dvs $\frac{d}{dt}E = 0$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}(2f(q)\dot{q}) = 2\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 - \frac{dV}{dq} \tag{7}$$

Lagranges ekv. blir

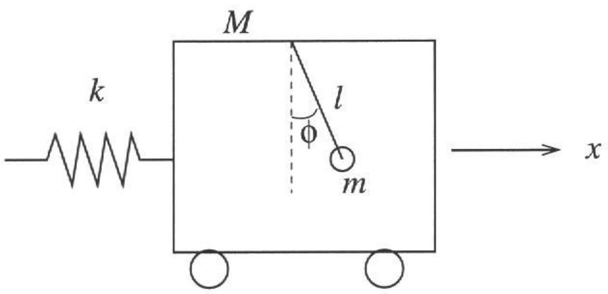
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq} = 0 \tag{8}$$

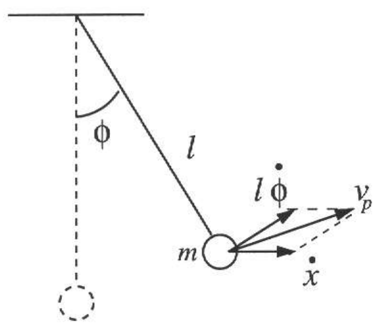
Energin ges av $E = f(q)\dot{q}^2 + V(q)$, så

$$\frac{d}{dt}E = \frac{df}{dq}\dot{q}\dot{q}^2 + 2f(q)\dot{q}\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\dot{q} = \dot{q}\underbrace{\left(\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\right)}_{=0 \text{ enl. Lagranges ekv.}} = 0 \tag{9}$$

V.S.V

Uppgift 3.





Generaliserade koordinater: x och ϕ
Vagnens kinetiska energi: $K_v = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$
Vagnens potentiella energi: $V_v = \frac{1}{2}kx^2$

Pendelns kula har hastigheten v_p (se fig.)

$$v_p^2 = l^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + (l\dot{\phi}\cos\phi + \dot{x})^2 = l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi \tag{10}$$

Pendelns kinetiska energi: $K_p = \frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi)$
Pendelns potentiella energi: $V_p = -mgl\cos\phi$

Lagrangefunktionen kan nu skrivas $L = K_v + K_p - V_v - V_p$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\phi \tag{11}$$

Sök Lagranges ekvationer $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ för x och ϕ.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\phi}\cos\phi$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\phi}\cos\phi - ml\dot{\phi}^2\sin\phi$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\dot{\phi} + l\dot{x}\cos\phi)$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\ddot{\phi} + l\ddot{x}\cos\phi - l\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi)$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -ml\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi - mgl\sin\phi$

Vi kan nu skriva upp Lagranges ekv. för x och ϕ

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi}\cos\phi - \frac{ml}{M+m}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{12}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\phi + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \tag{13}$$

För små svängningar omkring jämviktsläget reduceras ekvationerna ovan till

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi} + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\ddot{x}}{l} + \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0 \tag{15}$$

där vi har använt $\cos\phi \approx 1$, $\sin\phi \approx \phi$ och $\dot{\phi}^2 \approx 0$. Ekvationerna kan skrivas på matrisform $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0$, där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \phi \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ml}{M+m} \\ \frac{1}{l} & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \frac{k}{M+m} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{pmatrix} \tag{16}$$

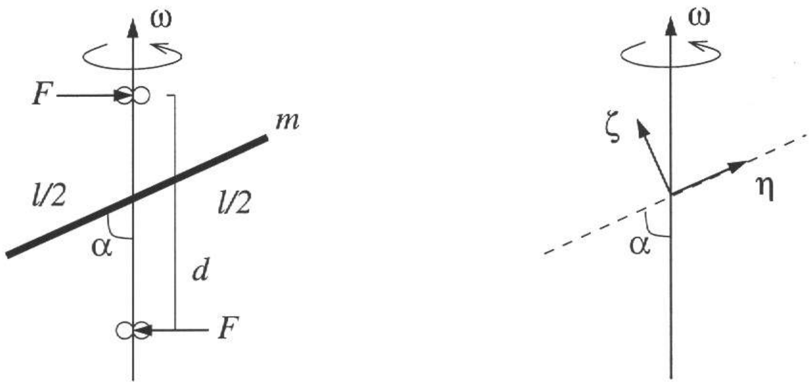
Ansats av typen $\mathbf{x} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$, där $\mathbf{a}$ är en kolumnvektor innehållande amplituder, ger

$$(-M\omega^2 + K)\mathbf{a} = 0. \tag{17}$$

Nollskilld lösning för $\mathbf{a}$ fås endast då determinanten av $(-M\omega^2 + K)$ är lika med noll. Detta leder till en andragradsekvation i ω^2 med lösningarna

$$\omega^2 = \frac{g(M+m)+kl}{2Ml} \pm \frac{1}{2Ml}\sqrt{g^2(M+m)^2 + (kl)^2 - 2gkl(M-m)} \tag{18}$$

Uppgift 4.



Placera ett koordinatsystem (ξ, η, ζ) längs stångens huvudtröghetsaxlar. I detta system är tröghetstensorn diagonal,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

där

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{12}ml^2, \; I_{\eta\eta} = 0, \; I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{12}ml^2. \tag{20}$$

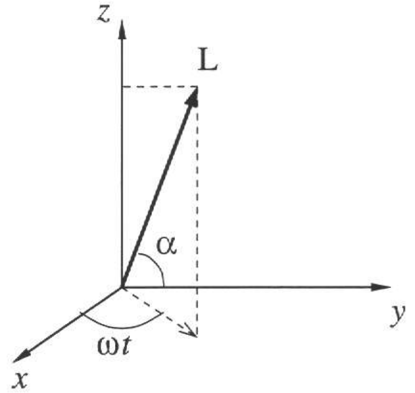
Rotationsvektorn beskrivs i (ξ, η, ζ)-systemet av

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos\alpha\hat{\eta} + \sin\alpha\hat{\zeta}). \tag{21}$$

Stångens rörelsemängdsmoment är $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{12}ml^2\omega\sin\alpha\hat{\zeta} = L\hat{\zeta}, \tag{22}$$

dvs $\mathbf{L}$ roterar kring $\boldsymbol{\omega}$ vinkelrätt mot stången.



För att beräkna kraftmomentet på stången, $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$, beskriver vi $\mathbf{L}$ i ett fixt koordinatsystem (x, y, z) där rotationsaxeln ligger i z-riktningen (se fig.),

$$\mathbf{L} = L\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{y}} + L\sin\alpha\hat{\mathbf{z}}. \tag{23}$$

Kraftmomentet ges av

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -L\omega\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\omega\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{y}} = L\omega\cos\alpha(-\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + \cos\omega t\hat{\mathbf{y}}), \tag{24}$$

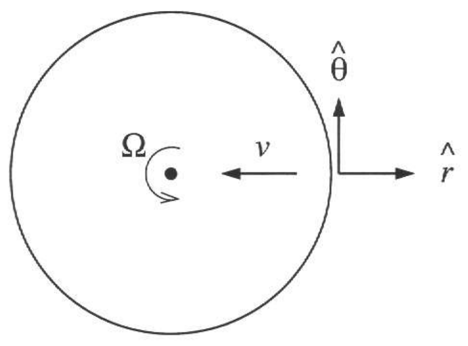
vilket ger

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = L\omega\cos\alpha = \frac{1}{12}ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{25}$$

Vi kan nu beräkna kraften F från axeln på vardera lagret mha $\tau = Fd$,

$$F = \frac{1}{12}m\frac{l^2}{d}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{26}$$

Uppgift 5.



Betrakta ett system som roterar med karusellen. Emils pendel påverkas i detta system, utöver tygngdkraften $W = mg$, av fiktiva krafter. De fiktiva krafterna i roterande system ges av

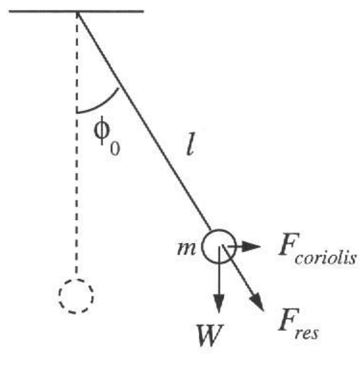
$$\mathbf{F}_{fict} = \mathbf{F}_{coriolis} + \mathbf{F}_{centrifugal} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{rot} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \tag{27}$$

där $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}_{rot} = v(-\hat{\mathbf{r}})$ är Emils hastighet i det roterande systemet. Centrifugalkraften är riktad utåt från rotationsaxeln och påverkar därför inte pendelns rörelse.

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{rot} = -2m\Omega\hat{\mathbf{z}} \times v(-\hat{\mathbf{r}}) = 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{28}$$

Totala kraften i pendelns rörelseplan ges av

$$\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}} + 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{29}$$

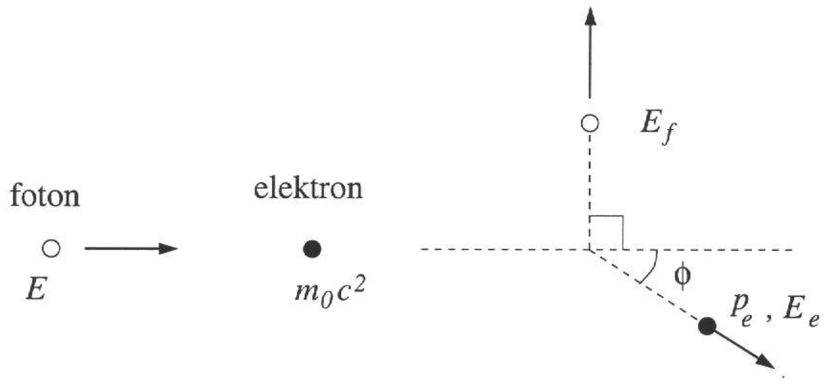


Pendelns utslagsvinkel i jämvikt, ϕ_0, ges av

$$\tan\phi_0 = \frac{F_{coriolis}}{W} = \frac{2m\Omega v}{mg} \Longrightarrow \phi_0 = \arctan(\frac{2\Omega v}{g}). \tag{30}$$

Om pendeln var stilla när Emil började gå kommer den att pendla med amplitud ϕ_0 omkring jämviktsläget. Maximal utsalagsvinkel blir därför $\phi_{max} = 2\phi_0$.

Uppgift 6.



Energikonservering ger

$$E + m_0c^2 = E_f + E_e, \tag{31}$$

där E_f och E_e är fotonens resp. elektronens energi efter stöten.

Rörelsemängdskonservering ger

$\rightarrow$: $E/c = p_e \cos\phi \Rightarrow E^2 = (p_ec)^2 \cos^2\phi$

$\uparrow$: $0 = E_f/c - p_e \sin\phi \Rightarrow E_f^2 = (p_ec)^2 \sin^2\phi$

där p_e är elektronens rörelsemängd efter stöten, E/c och E_f/c är fotonens rörelsemängd före resp efter stöten. Addition av ekvationerna ovan ger

$$E^2 + E_f^2 = (p_ec)^2. \tag{32}$$

Sätter vi in enregi-rörelsemängdsrelationen $(p_ec)^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2$ i ekv. (32) får vi

$$E^2 + E_f^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2 \tag{33}$$

Använd energikonservering (ekv. (31)) och ekv. (33) för att eliminera elektronens energi E_e. Från ekv. (31) har vi

$$E_e = E + m_0c^2 - E_f. \tag{34}$$

Insättning i ekv. (33) ger

$$E^2 + E_f^2 = (E + m_0c^2 - E_f)^2 - (m_0c^2)^2, \tag{35}$$

vilket leder till ett uttryck för fotonens energi efter stöten

$$E_f = \frac{E}{E/m_0c^2 + 1}. \tag{36}$$

Tentamen i Mekanik F del B

Tid och plats: Tisdagen den 11 januari 2000 kl 14.15 - 18.15 i vv.
Jourhavande assistent: Peter Samuelsson, ankn 3237.
Hjälpmedel: TEFYMA, Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 15 poäng. Till detta får läggas poäng från inlämningsuppgifterna. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. Jorden är inte sfäriskt symmetrisk, utan (p.g.a. sin rotation) något "tillplattad". Med kännedom om detta, samt att vinkeln mellan jordens spinn- och precessionsvektorer är mycket liten (vilket man kan se från marken—hur?), vilka slutsatser kan dras beträffande förhållandet mellan spinnet och precessionen till storlek och riktning?

2. En partikel kan glida friktionslöst längs en horisontell stång, som roterar kring en fix punkt (på stången) med en konstant vinkelhastighet. Partikeln påverkas av en kraft som är proportionell mot avståndet till den fixa punkten. Finn rörelseekvationen för partikeln! Beskriv, och diskutera, typiska rörelser för olika värden på de ingående parametrarna, speciellt m.a.p. jämviktslägen och deras stabilitet! Kan man *a priori*, t.ex. m.h.a. dimensionsanalys + "sunt förnuft", avgöra huruvida systemet har en "fasövergång", dvs. beter sig kvalitativt olika i olika regioner av parametervärden? Isåfall, kan man på detta sätt uppskatta ungefär för vilka parametervärden fasövergången sker?

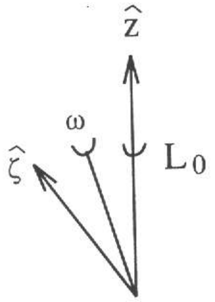
3. Jämför dopplereffekten för elektromagnetisk strålning med den för ljudvågor (den senare för de två fall då ljudkälla resp. observatör är i vila i förhållande till luften)! Finns det någon speciell anledning att förvänta sig att det relativistiska resultatet skall ligga mellan de två resultaten för ljud? *(Jag vill inte bara ha de färdiga uttrycken, utan härledningar. Uttrycket för tidsdilatationen kan dock anses känt, om man vill.)*

4. Två lika massor m glider friktionsfritt på ett horisontellt underlag. De är fästade i varsin vägg med likadana fjädrar med fjäderkonstant k. Dessutom sitter mellan fjädrarna en mycket svagare fjäder, vars fjäderkonstant kan skrivas αk, där alltså α är ett mycket litet tal. Använd Lagranges formalism för att skriva ned rörelseekvationerna för systemet! Diskutera lösningarnas beteende, inte bara egensvängningarna utan även superpositioner av dem! Undersök speciellt följande: om till en början endast den ena massan svänger fram och tillbaka medan den andra är stilla, hur lång tid tar det tills förhållandet är det motsatta?

Lycka till!

Lösningar till Tentamen i Mekanik F del B
den 11 januari 2000

1. Vi antar att jorden är en rotationssymmetrisk stel kropp som inte påverkas av något yttre kraftmoment ($\mathbf{M}_0 = 0$). Detta innebär att jordens rörelsemängd är konstant,
$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{M}_0.$$
Om vi inför ett kroppsfixt koordinatsystem med $\hat{\zeta}$ längs symmetriaxeln (pekandes från jordens centrum mot "nordpolen") kan vi skriva rörelsemängdsmomentet
$$\mathbf{L}_0 = I_\xi \omega_\xi \hat{\xi} + I_\eta \omega \eta \hat{\eta} + I_\zeta \omega_\zeta \hat{\zeta}.$$
där $\omega_\xi, \omega\eta$ och ω_ζ är rotationsvektorns komponenter i det kroppsfixa systemet. Deviationsmomenten är noll då jorden är symmetrisk vid spegling $\xi \to -\xi, \eta \to -\eta$ samt $\zeta \to -\zeta$. Utifrån vårt antagande om jordens form kan vi sätta $I_\xi = I_\eta = I_1$. Då vi har $\boldsymbol{\omega} = \omega_\xi \hat{\xi} + \omega_\eta \hat{\eta} + \omega_\zeta \hat{\zeta}$ kan vi skriva
$$\mathbf{L}_0 = I_1 \boldsymbol{\omega} + (I_\zeta - I_1)\omega_\zeta \hat{\zeta}$$
Vi kan åskådliggöra de olika vektorerna



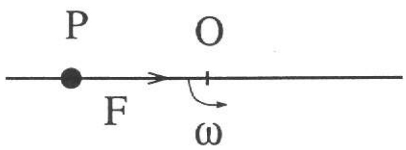
med det totala rörelsemängdsmomentet riktat i $\hat{z}$ riktningen. Då $\mathbf{L}_0$ är konstant kan vi skriva $\mathbf{L}_0 = L_o \hat{z}$ och lösa ut $\boldsymbol{\omega}$ ur ovanstående ekvation,
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_P \hat{z} + \nu \hat{\zeta},$$
med $\omega_P = L_0/I_1$ och $\nu = (1 - I_\zeta/I_1)\omega_\zeta$. Jorden precesserar alltsåkring z-axeln med vinkelhastigheten ω_p samtidigt som den spinner kring ζ-axeln med vinkelfrekvensen ν. Vinkeln θ mellan z- och ζ-axeln ges av
$$\cos\theta = \hat{\zeta} \cdot \hat{z} = \hat{\zeta} \cdot \mathbf{L}_0 / L_0 = I_\zeta \omega_\zeta / L_0$$
och vi kan då relatera $\cos\theta$ till ω_P och ν genom
$$\nu = \left(1 - \frac{I_\zeta}{I_1}\right)\omega_\zeta = \left(\frac{I_1}{I_\zeta} - 1\right)\omega_P \cos\theta$$
För jorden kan vi enligt uppgiften anta att $\theta << 1$ och att därför $\cos\theta = 1$. För att besvara uppgiften behöver vi nu bara information om tröghetsmomenten. Eftersom jorden är något tillplattad vid polerna (enl. uppgift) kan vi sluta

oss till att I_1 är något mindre än I_ζ. (Jmf t.ex ellipsen på sid. 137 i Physics Handbook.) Vi kan då skriva $I_\zeta = I_1 + \delta I$ ($\delta I << I_1, I_\zeta$) och får

$$\nu = -\delta I / I_\zeta$$

Vi ser att spinnet har en mycket lägre vinkelfrevens än precessionen. Minustecknet innebär att ζ-axeln är i stort sett riktad i $-z$-axelns riktning. Spinnet och precessionen går därför åt olika håll.

2. Vi har partikeln fritt glidande längs stången



Partikeln kan bara röra sig i radiell riktning p.g.a tvång och då stången är horisontell behöver vi inte bry oss om gravitationen. Kraft som påverkar kroppen är då

$$F = -kr$$

vilket ger oss med Newtons andra lag samt uttrycket för den radiella accelerationen $a_r = \ddot{r} - r\omega^2$ rörelseekvationen

$$m\ddot{r} = r(m\omega^2 - k).$$

Denna rörelseekvation har den karaktäristiska ekvationen

$$\lambda^2 = \omega^2 - k/m$$

Vi studerar lösningarna för tre olika parameterintervall

1) $\omega^2 - k/m > 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\omega^2 - k/m}$ med den allmänna lösningen

$$r = A\cosh(\lambda_1 t) + B\sinh(\lambda_1 t).$$

Om vi startar i punkten $r(0) = r_0$ med hastigheten$v(0) = v_0$ får vi lösningen

$$r = r_0 \cosh(\sqrt{\omega^2 - k/m}t) + \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k/m}} + \sinh(\sqrt{\omega^2 - k/m}t)$$

Vi får då en rörelse där partikeln accelererar utåt från den fixa punkten O, beskrivandes en spiralrörelse i det horisontella planet. Om vi startar med $v_0 < 0$, d.v.s skickar partikeln in mot fixpunkten, kommer partikeln bromsas in, vända, och sedan accelerera ut.

2) $\omega^2 - k/m < 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = i\sqrt{k/m - \omega^2} = i\kappa$ med den allmänna lösningen

$$r = A\cos(\kappa t) + B\sin(\kappa t) = C\sin(\kappa t + \phi).$$

Om vi startar i r_0 med hastighetenv_0 får vi lösningen $C = \sqrt{r_0^2 + v_0^2/\kappa^2}, \phi =$ $\arctan(r_0\kappa/v_0)$ vilket ger rörelseekvationen

$$r = \sqrt{r_0^2 + \frac{v_0^2}{(k/m - \omega^2)}} \sin(\sqrt{k/m - \omega^2}t + \arctan(r_0(k/m - \omega^2)/v_0)).$$

Vi får nu en oscillerande lösning kring punkten O (vi antar att partikeln kan röra sig genom O) med frekvensen $\sqrt{k/m - \omega^2}$ och amplituden $\sqrt{r_0^2 + \frac{v_0^2}{(k/m - \omega^2)}}$.

3) $\omega^2 - k/m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ med den allmänna lösningen

$$r = A + Bt.$$

Om vi startar i r_0 med hastighetenv_0 får vi lösningen

$$r = r_0 + v_0 t,$$

d.v.s en vanlig rtlinjig rörelse som fortsätter i den riktning och med den hastighet man givit partikeln från början, oberoende av var den börjar.

Vi kan studera jämvikten för de olika fallen

1) Partikeln kan endast vara i vila i punkten $r = 0$ med hastigheten $v = 0$. Om vi flyttar partikeln en liten bit δr ut från O börjar den accelerera utåt. Jämviktsläget är inte stabilt.

2) Partikeln kan även i detta fall endast vara i vila i punkten $r = 0$ med hastigheten $v = 0$. Om vi flyttar partikeln en liten bit δr ut från O kommer den att börja röra sig inåt igen, vilket fås genom att sätta in $v_0 = 0$ i rörelseekvationen ovan. Jämviktsläget är stabilt.

3) Alla punkter på hela stången är jämviktslägen och därmed är de indifferenta.

Vad kan vi komma fram till med "sunt förnuft" och dimensionsanaly?. Om vi betraktar en sten i ett snöre som vi snurrar runt kroppen kan vi konstatera att det krävs en större kraft att hålla stenen på konstant avstånd om den är tyngre, snöret längre eller om vi snurrar fortare. Om vi inte håller emot ordentligt sticker stenen iväg (en fas), drar vi för hårt börjar vi dra stenen till oss (en andra fas). Fasövergången kan då sägas vara när vi håller stenen stilla. Vi kan uppskatta att kraften som krävs kan skrivas

$$F = m^\alpha \omega^\beta r^\gamma$$

där vi enligt vårt resonemang vet att $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Vi vet att $1N = 1kgm/s^2$ vilket bara fås genom $\alpha = 1, \beta = 2$ samt $\gamma = 1$. Då detta sedan skall vara lika med den givna kraften $F = -kr$ ser vi att fasövergången sker vid $k = m\omega^2$

3. Antag först att vi har en observatör O, som är i vila i förhållande till luften och en sändare som rör sig rakt emot honom med hasigheten $v_s < c_0$, där c_0 är ljudhastigheten i luft. Sändaren sänder ut en signal med frekvensen ν. Antag att signalen har maximal amplitud vid tiden t_0. Efter T sekunder, där $T = 1/\nu$ är periodtiden, har det första amplitudmaximat flyttat sig sträckan

$$l_m = c_0/T = c_0\nu$$

Sändaren har samtidigt flyttat sig sträckan

$$l_s = v_s/T = v_s\nu$$

När sändarens signal nu vid tiden $t_0 + T$ har maximal amplitud igen, blir då avståndet mellan amplitudmaximumen $\lambda = l_m - l_s = \nu(c_0 - v_s)$. Detta blir den våglängd som observatören uppfattar, vilket innebär frekvensen

$$\nu' = c_0/\lambda = \frac{\nu}{1 - v_s/c_0}$$

Studera nu istället fallet då sändaren är i vila i förhållande till luften och observatören rör sig i rakt mot sändaren med hastigheten v_o. Vid tiden t_0 stöter observatören på ett amplitudmaxima. Efter ytterligare en tid t' stöter observatören på nästa amplitudmaxima. Eftersom observatören rör sig mot källan måste denna tid vara mindre än periodtiden $t' < T$. Avståndet mellan amplitudmaximumen är $\lambda = c_0/\nu$ och den relativa hastigheten mellan observatören och ljudvågorna är $c_0 + v_o$. Detta ger tiden

$$t' = \lambda/(c_0 + v_o) = \frac{1}{\nu(1 + v_o/c_0)}$$

som är periodtiden som observatören uppfattar att signalen har, och följdaktligen frekvensen

$$\nu' = 1/t' = \nu(1 + v_o/c_0),$$

en mindre frekvens än i fallet då observatören var stilla. I det relativistiska fallet vet vi att enligt relativitetsprincipen blir resultatet det samma oberoende av om observatören rör sig och sändaren är stilla eller vice versa. Detta beror på att vi inte har något "medium" (jmf luft) som står stilla och som ljusvågorna bärs fram av. Låt oss därför anta att observatören, i vila i sitt inertialsystem, observerar en sändare som rör sig rakt mot honom med hastigheten v_s och sänder ut en signal med frekvensen ν, uppfattat från sändarens inertialsystem (där sändaren är i vila) . Vid tiden t_0 har signalamplituden ett maxima och vid tiden t_1 nästa naxima (uppfattat i sändarens inertialsystem). Detta ger periodtiden

$$T = t_1 - t_0 = 1/\nu$$

Observatören uppfattar att signalen har sitt första amplitudmaxima vid tiden t'_0, då sändaren befinner sig i punkten x'_0 i observatörens inertialsystem. Vid tiden t'_1, då signalen har sitt andra amplitudmaxima, har sändaren kommit till punkten x'_1, där

$$x'_1 - x'_0 = v_s(t'_1 - t'_0)$$

Under denna tid har det första amplitudmaximat färdats $c * (t_1' - t_0')$ och avståndet mellan amplitudmaximumen, alltså den av observatören uppfattade våglängden, blir

$$\lambda = (c - v_s)(t_1' - t_0')$$

Den av observatören uppfattade frekvensen blir då

$$\nu' = c/\lambda = 1/[(t_1' - t_0')(1 - v_s/c)]$$

Den av observatören uppfattade tidsskillnaden $t_1' - t_0'$ uppfattas i sändarens inertialsystem till $t_1 - t_0$. Dessa tidsskillnader är relaterade, enligt det kända uttrycket (tidsdilatationen)

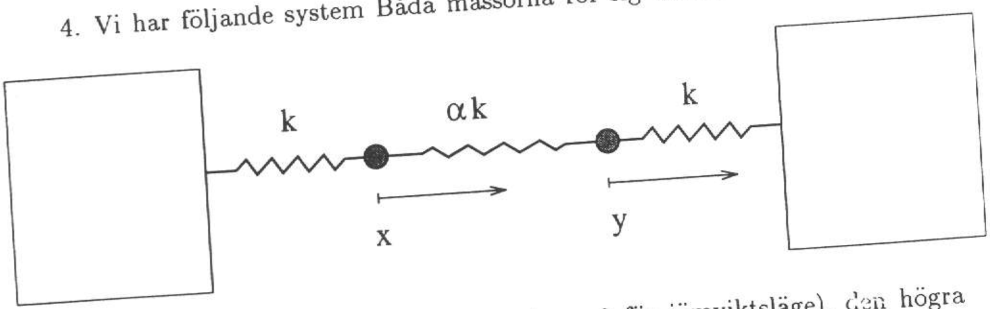
$$t_1' - t_0' = (t_1 - t_0)/\sqrt{1 - v_s^2/c^2}$$

vilket ger uttrycket för den av observatören uppfattade frekvensen

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - v_s^2/c^2}}{(1 - v_s/c)} = \nu \sqrt{\frac{1 + v_s/c}{1 - v_s/c}}$$

Detta uttryck ligger mellan de båda tidigare härledda för fallet då sändaren och observatören rörde sig en en "stillastående" luft som definierade inertialsystemet.

4. Vi har följande system Båda massorna rör sig utefter samma linje, den



vänstra i figuren har koordinat x ($x = 0$ för jämviktsläge), den högra koordinat y ($y = 0$ för jämviktsläge). Vi vill använda Lagranges formalism till att skriva ner systemets rörelseekvationer. Lagrangefunktionen är $L = E_k - E_p$, differensen av systemets kinetiska (E_k) och potentiella (E_p) energi. I detta fall blir L en funktion av $x, \dot{x}, y$ och $\dot{y}$. Det generella uttrycket för rörelseekvationerna fås av

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}.$$

Den kinetiska energin hos massorna ges av

$$E_k = m\dot{x}^2/2 + m\dot{y}^2/2.$$

Det allmänna uttrycket för den potentialla energin hos en fjäder ges av $E_p = k(\delta l)^2/2$, där δl är fjäderns längdförändring. Vi får då

$$E_p = kx^2/2 + ky^2/2 + \alpha k(y-x)^2.$$

Ur detta kan vi sedan härleda rörelseekvationerna till

$$m\ddot{x} = -kx + \alpha k(y-x),$$

$$m\ddot{y} = -ky - \alpha k(y-x).$$

Detta är två kopplade andra ordningens differentialekvationer. Vi kan genom att derivera den första ekvationen två gånger till och eliminera y-kordinaten och dess andraderivata, komma fram till en fjärde ordningens differentialekvation

$$\frac{m^2}{k^2}x^{(4)} + 2\frac{m}{k}(1+\alpha/2)\ddot{x} + (1+\alpha)x = 0$$

Denna har den karaktäristiska ekvationen

$$\frac{m^2}{k^2}\lambda^4 + 2\frac{m}{k}(1+\alpha/2)\lambda^2 + (1+\alpha) = 0$$

Vi sätter $\beta = (m/k)\lambda^2$ och får

$$\beta^2 + 2(1+\alpha/2)\beta + (1+\alpha) = 0$$

Denna ekvation har lösningarna $\beta_1 = -1$ samt $\beta_2 = -1-\alpha$, vilket ger oss de fyra lösningarna till den fullständiga karaktäristiska ekvationen

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k/m} = \pm i\omega_1$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{k/m(1+\alpha)} = \pm i\omega_2$$

och därifrån den allmänna lösningen

$$x = A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

och genom insättning i rörelseekvationerna

$$y = A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Vi har alltså en lösning för båda massorna som består av en superposition av två harmoniska svängningar med mycket lika frekvenser. Eftersom mittfjädern har den lilla fjäderkonstanten αk, kan vi anta att den orsakar en liten förändring i rörelsen för de två annars nästan okopplade massorna. Låt oss studera specialfallet då den högra massan startar $(t = 0)$i vila ($\dot{y} = 0$) i jämviktspunkten $y = 0$ medans den vänstra startar med hastigheten $\dot{x} = v_0$ i jämviktspunkten $x = 0$. Detta der oss fyra begynnelsevillkor att bestämma de fyra okända parametrarna A_1, A_2, ϕ_1 samt ϕ_2,

$$y(0) = A_1\sin\phi_1 - A_2\sin\phi_2 = 0$$

$$\dot{y}(0) = A_1\omega_1\cos\phi_1 - A_2\omega_2\cos\phi_2 = 0$$

$$x(0) = A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2 = 0$$

$$\dot{x}(0) = A_1\omega_1 \cos\phi_1 - A_2\omega_2 \cos\phi_2 = v_0$$

vilket ger efter lite algebra

$$\phi_1 = \phi_2 = 0$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} A_1 = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

De båda amplituderna skiljer sig lite åt och vi kan för enkelhetens skull sätta de lika, vilket ger oss de två rörelseekvationerna

$$x = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t),$$

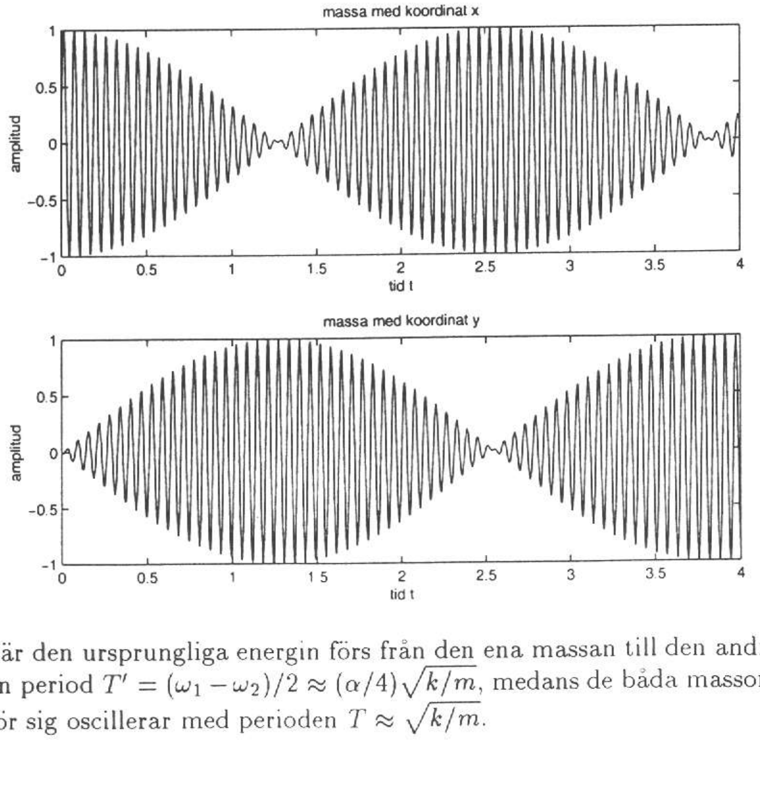
$$y = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}(\sin(\omega_1 t) - \sin(\omega_2 t).$$

detta kan skrivas om med trigonometriska formler till

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t),$$

$$y = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t).$$

Dessa båda funktioner är plottade nedan för $\alpha = 1/20$. Vi får ett system



där den ursprungliga energin förs från den ena massan till den andra med en period $T' = (\omega_1 - \omega_2)/2 \approx (\alpha/4)\sqrt{k/m}$, medans de båda massorna var för sig oscillerar med perioden $T \approx \sqrt{k/m}$.

Tentamen i Mekanik F del B FFM051

Tid och plats: Tisdagen den 24 augusti 1999 kl 09.15 - 13.15 i mg.
Jourhavande lärare: Måns Henningson, ankn 3245.
Hjälpmedel: TEFYMA, Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 15 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Motivera gjorda approximationer. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. En kropp med massan m_1 är upphängd i en fjäder med fjäderkonstanten k_1. Den övre änden av denna fjäder är fäst i en kropp med massan m_2, som är upphängd i en fjäder med fjäderkonstanten k_2. Den övre änden av denna fjäder är fix. All rörelse sker i vertikalled. Ställ upp rörelseekvationerna för detta system, och bestäm vinkelfrekvenserna för svängningar runt jämviktsläget.

2. Ett flygplan har en propeller med tröghetsmomentet I (med avseende på rotationsaxeln) som roterar med vinkelhastigheten Ω. Landningsstället består av ett noshjul samt ett hjul under vardera vingen. Avståndet mellan hjulaxlarna är l. Flygplanet kör på marken med hastigheten v och utför först en högersväng och sedan en vänstersväng, båda med kurvradien R. Bestäm skillnaden i normalkraften från marken på noshjulet i de två fallen.

3. På grund av jordrotationen är den tyngdacceleration som uppmäts i ett med jorden roterande koordinatsystem inte riktad exakt mot jordens medelpunkt. Hur stor är avvikelsen (i grader) i Göteborg (latitud cirka 57^o)? Jordklotet får approximeras med en homogen sfär. Erfordeliga data tas från tabellsamling.

4. En foton med energin E kolliderar med en elektron i vila (vilomassa m_0). Efter kollisionen består systemet av elektronen samt en foton som rör sig i 90^o vinkel relativt den inkommande fotonen. Bestäm den utgående fotonens energi.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Mekanik F del B den 24 augusti 1999

1. Som generaliserade koordinater väljer vi förlängningarna x_1 och x_2 av de två fjädrarna relativt jämviktsläget. Lagrangefunktionen är $L = K - V$, där de kinetiska och potentiella energierna är

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2{}^2 \\
V &= \frac{k_1}{2}x_1^2 + \frac{k_2}{2}x_2^2.
\end{aligned}
$$

Lagranges ekvationer lyder

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} \\
&= m_1\ddot{x}_1 + m_1\ddot{x}_2 + k_1x_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} \\
&= m_1\ddot{x}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{x}_2 + k_2x_2.
\end{aligned}
$$

Detta kan skrivas på matrisform som $M\ddot{X} + KX = 0$, där

$$
M = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 + m_2 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.
$$

Vi ansätter en lösning på formen $X = Ae^{i\omega t}$, där

$$
A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}
$$

och ω är den sökta vinkelfrekvensen, och får då ekvationssystemet $(-\omega^2 M + K)A = 0$. Vilkoret för att vi skall kunna ha lösningar med $A \neq 0$ är att

$$
\begin{aligned}
0 &= \det(-\omega^2 M + K) \\
&= \omega^4 m_1m_2 - \omega^2(m_1k_2 + m_1k_1 + m_2k_1) + k_1k_2.
\end{aligned}
$$

Denna andragradsekvation i ω^2 har lösningarna $\omega^2 = \omega_+^2$ och $\omega^2 = \omega_-^2$ där

$$
\begin{aligned}
\omega_+^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}} \\
\omega_-^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}}.
\end{aligned}
$$

2. Beloppet av tidsderivatan av propellerns rörelsemängdsmoment är

$$|\dot{\mathbf{L}}| = \omega\Omega I,$$

där

$$\omega = \frac{v}{R}$$

är flygplanets vinkelhastighet runt kurvan. Skillnaden i det vridmoment som marken utövar på flygplanet i de två fallen är

$$\Delta\tau = 2|\dot{\mathbf{L}}|.$$

Betecknas den sökta kraftskillnaden med ΔF så har vi även

$$\Delta\tau = l\Delta F.$$

Sammantaget finner vi att

$$\Delta F = \frac{2v\Omega I}{lR}.$$

3. Den upplevda accelerationen g består av tyngdaccelerationen med storleken $g_0 \simeq 9,8\,\mathrm{ms}^{-2}$ riktad mot jordens medelpunkt och centripetalaccelerationen med storleken

$$g_c = \omega^2 r \cos\lambda$$

riktad ut från jordaxeln. Här är vinkelaccelerationen $\omega = 2\pi/86400\,\mathrm{s} \simeq 7,3 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$, jordradien $r \simeq 6,4 \times 10^6\,\mathrm{m}$ och latituden $\lambda \simeq 57^\circ$. Enligt cosinusteoremet har vi

$$g^2 = g_0^2 + g_c^2 - 2g_0 g_c \cos\lambda,$$

och enligt sinusteoremet så uppfyller vinkeln ϕ mellan den upplevda accelerationen och tyngdaccelerationen

$$\frac{\sin\phi}{g_c} = \frac{\sin\lambda}{g}.$$

Från dessa samband följer att

$$\phi = \arcsin\frac{\cos\lambda\sin\lambda}{\sqrt{\left(\frac{g_0}{\omega^2 r}\right)^2 + \cos^2\lambda\left(1 - 2\frac{g_0}{\omega^2 r}\right)}}.$$

Insättning av de numeriska värdena ger

$$\frac{g_0}{\omega^2 r} \simeq 287$$

och den sökta vinkeln

$$\phi \simeq 0,1^\circ.$$

FFM051

Tentamen i Mekanik F del B

Tid och plats: Torsdagen den 27 maj 1999 kl 14.15 - 18.15 i mn.
Jourhavande assistent: Martin Nilsson, ankn 3171.
Hjälpmedel: TEFYMA, Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 15 poäng. Till detta får läggas poäng från inlämningsuppgifterna. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. En vagn med massan M kan röra sig friktionslöst längs ett horisontellt spår och är förbunden med en fix punkt med en fjäder med fjäderkonstanten k. Från vagnen hänger en kula med massan m (och tyngden mg) i ett snöre med längden l. Kulan pendlar i ett vertikalplan genom spåret som vagnen rör sig på. Skriv upp Lagranges ekvationer för detta system och bestäm vinkelfrekvenserna för små svängningar omkring jämviktsläget.

2. Ett gyroskop består av en tunn cirkulär homogen skiva med radien R som är fäst i sin mittpunkt i änden på en lätt stång med längden l vinkelrätt mot skivan. Den andra änden av stången kan vrida sig friktionsfritt kring en kulled. Bestäm vinkelfrekvensen för precessionsrörelsen när stången är horisontell och skivan roterar med vinkelfrekvensen ω. Tyngdaccelerationen är g.

3. En vagn kan röra sig friktionsfritt längs ett radiellt spår på en karusell som roterar med vinkelfrekvensen Ω. På vagnen ligger en isbit som kan glida friktionsfritt längs en linje vinkelrätt mot vagnens körriktning. Vid tiden $t = 0$ står vagnen stilla på karusellen på avståndet r_0 från centrum och isbiten ligger stilla mitt på vagnen.

   a) Visa att vid tiden t befinner sig vagnen på avståndet
   $$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}\right).$$

   b) Hur långt har isbiten glidit vid tiden t? (Glidsträckan får antas vara mycket mindre än r.)

4. Hur hög hastighet (i m/s) måste man ge en elektron för att det vid en kollision med en proton i vila skall kunna skapas en neutron? (Vid reaktionen skapas även en neutrino vars energi och rörelsemängd vi försummar.)

Lycka till!