Mekanik F del 2 - F1

FFM 520

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
2002-01-14	x	x	
2002-08-20	x	x	
2002-10-21	x	x	
2003-01-13	x	x	
2003-08-19	x	x	
2003-10-20	x	x	
2004-01-12	x	x	
2004-08-17	x	x	
2004-10-18	x		
2005-01-10	x	x	
2005-05-24	x	x	
2005-08-16	x	x	
2005-08-26	x	x	
2006-01-11	x	x	

7 maj 2006

Tentamen i Mekanik F del B FFM052

Tid och plats: Måndagen den 14 januari 2002 kl 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Valfria tabellsamlingar, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Gränsen för godkänt är 30 p.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. a) Är det möjligt för en satellit att röra sig på en cirkulär bana kring jorden så att omloppstiden blir kortare än ett dygn? (Satelliten påverkas bara av gravitationskraften från jorden.) (5 p)

   b) Emilia skickar en morgon klockan 08.15.13 ett email från Göteborg till Osqar i Stockholm, som får det klockan 08.15.19. Truls beskriver dessa båda händelser relativt sitt vilosystem, som rör sig med en likformig hastighet **v** relativt jorden. Är det möjligt att detta email enligt Truls kommer fram *innan* det skickades? (5 p)

2. Bevisa, utgående från Lorentztransformationen, den relativistiska formeln för transformering av hastigheter
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}.$$
(Här är u_x och u'_x x-komponenterna av hastigheter relativt två inertialsystem S och S' som rör sig relativt varandra med hastigheten v längs med x-axeln.)

3. En fjäder med fjäderkonstanten k_1 har sin ena ände fix och i den andra änden hänger en massa m_1. I denna massa är fäst ena änden av en annan fjäder med fjäderkonstanten k_2, och i den andra änden av denna fjäder hänger en annan massa m_2. De två massorna kan bara röra sig i vertikalled. Inför lämpliga generaliserade koordinater och ställ upp Lagranges ekvationer för detta system. Bestäm sedan vinkelfrekvenserna för svängningar kring jämviktsläget.

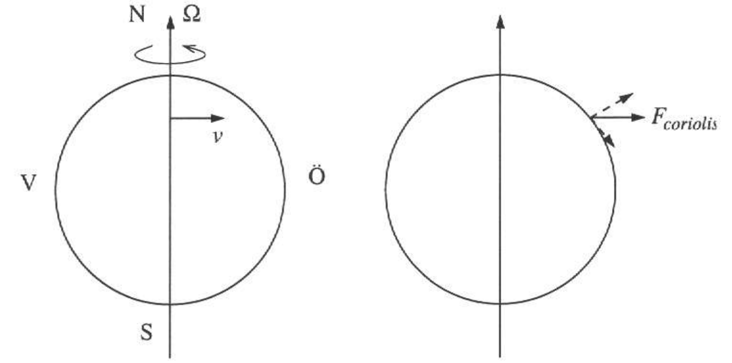
4. På grund av jordrotationen är inte jordklotet sfäriskt utan något avplattat vid polerna. För att analysera detta kan man anta att jorden är flytande, vilket betyder att den totala potentiella energin (från gravitationskraften och centripetalkraften) för en hypotetisk partikel med massan m skall vara konstant över hela jordytan. Givet att jordradien vid ekvatorn är 6378 km, uppskatta med denna metod jordradien vid polerna.

Vänd!

Lösningar till Tentamen i Mekanik F del B 2002-08-20

Uppgift 1.

a)

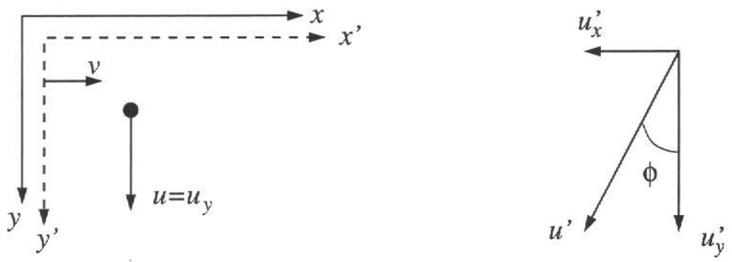


Om $\mathbf{\Omega}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}$ är bilens hastighet (relativt jorden) ges corioliskraften av

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}. \tag{1}$$

Corioliskraften är riktad utåt vinkelrätt mot $\mathbf{\Omega}$ och $\mathbf{v}$ och horisontalkomponenten är riktad söderut (se fig.).

b)



Betrakta ett koordinatsystem, (x', y'), där rymdskeppet är i vila, dvs systemet rör sig med hastighet $v = 2.0 \cdot 10^8$ m/s längs x-axeln i system (x, y) (fixt relativt jorden och solen). Neutrinopartiklarnas hastighet i system (x, y) är $u = u_y = c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s och beskrivs i (x', y')-systemet av

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} = \{u_x = 0\} = -v \tag{2}$$

och

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma[1 - vu_x/c^2]} = \{u_y = c\} = c/\gamma = c\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{c^2 - v^2}, \tag{3}$$

dvs

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = c. \tag{4}$$

Neutrinopartiklarna rör sig med ljusets hastighet relativt rymdskeppet, men i en annan riktning än relativt jorden och solen. Om ϕ är vinkeln mellan u och u' har vi (se fig.)

$$\tan\phi = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 42°. \tag{5}$$

Uppgift 2.
Kinetisk energi: $K = f(q)\dot{q}^2$
potentiell energi: $V = V(q)$
Lagrangefunktionen: $L = K - V = f(q)\dot{q}^2 - V(q)$
Visa att Lagranges ekvation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ medför att den totala mekaniska energin $E = K + V$ är konstant, dvs $\frac{d}{dt}E = 0$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}(2f(q)\dot{q}) = 2\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 - \frac{dV}{dq} \tag{7}$$

Lagranges ekv. blir

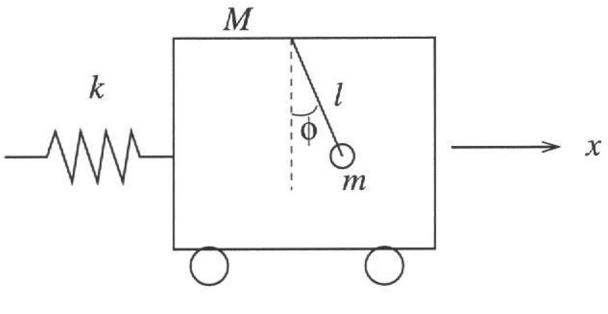
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq} = 0 \tag{8}$$

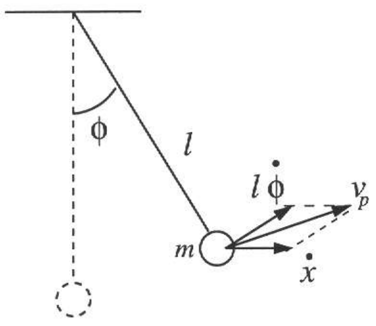
Energin ges av $E = f(q)\dot{q}^2 + V(q)$, så

$$\frac{d}{dt}E = \frac{df}{dq}\dot{q}\dot{q}^2 + 2f(q)\dot{q}\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\dot{q} = \dot{q}\underbrace{\left(\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\right)}_{=0 \text{ enl. Lagranges ekv.}} = 0 \tag{9}$$

V.S.V

Uppgift 3.





Generaliserade koordinater: x och ϕ
Vagnens kinetiska energi: $K_v = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$
Vagnens potentiella energi: $V_v = \frac{1}{2}kx^2$

Pendelns kula har hastigheten v_p (se fig.)

$$v_p^2 = l^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + (l\dot{\phi}\cos\phi + \dot{x})^2 = l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi \tag{10}$$

Pendelns kinetiska energi: $K_p = \frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi)$
Pendelns potentiella energi: $V_p = -mgl\cos\phi$

Lagrangefunktionen kan nu skrivas $L = K_v + K_p - V_v - V_p$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\phi \tag{11}$$

Sök Lagranges ekvationer $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ för x och ϕ.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\phi}\cos\phi$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\phi}\cos\phi - ml\dot{\phi}^2\sin\phi$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\dot{\phi} + l\dot{x}\cos\phi)$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\ddot{\phi} + l\ddot{x}\cos\phi - l\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi)$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -ml\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi - mgl\sin\phi$

Vi kan nu skriva upp Lagranges ekv. för x och ϕ

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi}\cos\phi - \frac{ml}{M+m}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{12}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\phi + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \tag{13}$$

För små svängningar omkring jämviktsläget reduceras ekvationerna ovan till

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi} + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\ddot{x}}{l} + \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0 \tag{15}$$

där vi har använt $\cos\phi \approx 1$, $\sin\phi \approx \phi$ och $\dot{\phi}^2 \approx 0$. Ekvationerna kan skrivas på matrisform $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0$, där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \phi \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ml}{M+m} \\ \frac{1}{l} & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \frac{k}{M+m} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{pmatrix} \tag{16}$$

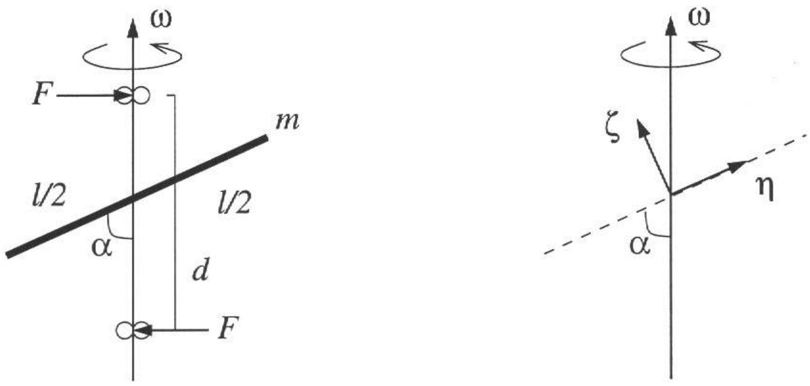
Ansats av typen $\mathbf{x} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$, där $\mathbf{a}$ är en kolumnvektor innehållande amplituder, ger

$$(-M\omega^2 + K)\mathbf{a} = 0. \tag{17}$$

Nollskilld lösning för $\mathbf{a}$ fås endast då determinanten av $(-M\omega^2 + K)$ är lika med noll. Detta leder till en andragradsekvation i ω^2 med lösningarna

$$\omega^2 = \frac{g(M+m)+kl}{2Ml} \pm \frac{1}{2Ml}\sqrt{g^2(M+m)^2 + (kl)^2 - 2gkl(M-m)} \tag{18}$$

Uppgift 4.



Placera ett koordinatsystem (ξ, η, ζ) längs stångens huvudtröghetsaxlar. I detta system är tröghetstensorn diagonal,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

där

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{12}ml^2, \ I_{\eta\eta} = 0, \ I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{12}ml^2. \tag{20}$$

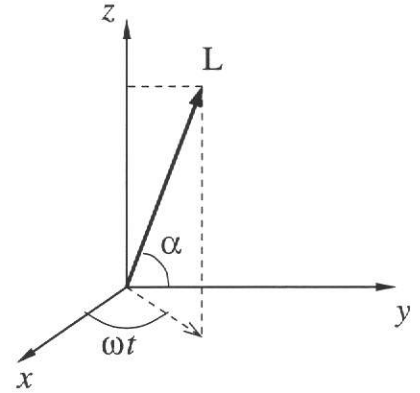
Rotationsvektorn beskrivs i (ξ, η, ζ)-systemet av

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos\alpha\hat{\eta} + \sin\alpha\hat{\zeta}). \tag{21}$$

Stångens rörelsemängdsmoment är $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{12}ml^2\omega\sin\alpha\hat{\zeta} = L\hat{\zeta}, \tag{22}$$

dvs $\mathbf{L}$ roterar kring $\boldsymbol{\omega}$ vinkelrätt mot stången.



För att beräkna kraftmomentet på stången, $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$, beskriver vi $\mathbf{L}$ i ett fixt koordinatsystem (x, y, z) där rotationsaxeln ligger i z-riktningen (se fig.),

$$\mathbf{L} = L\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{y}} + L\sin\alpha\hat{\mathbf{z}}. \tag{23}$$

Kraftmomentet ges av

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -L\omega\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\omega\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{y}} = L\omega\cos\alpha(-\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + \cos\omega t\hat{\mathbf{y}}), \tag{24}$$

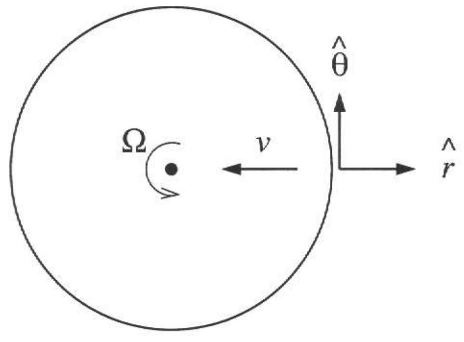
vilket ger

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = L\omega\cos\alpha = \frac{1}{12}ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{25}$$

Vi kan nu beräkna kraften F från axeln på vardera lagret mha $\tau = Fd$,

$$F = \frac{1}{12}m\frac{l^2}{d}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{26}$$

Uppgift 5.



Betrakta ett system som roterar med karusellen. Emils pendel påverkas i detta system, utöver tygngdkraften $W = mg$, av fiktiva krafter. De fiktiva krafterna i roterande system ges av

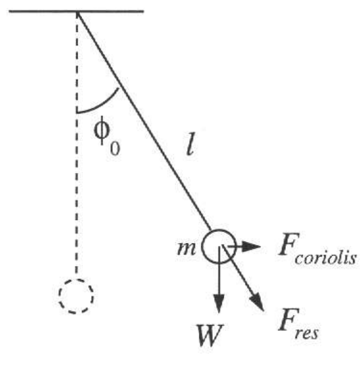
$$\mathbf{F}_{fict} = \mathbf{F}_{coriolis} + \mathbf{F}_{centrifugal} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{rot} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \tag{27}$$

där $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}_{rot} = v(-\hat{\mathbf{r}})$ är Emils hastighet i det roterande systemet. Centrifugalkraften är riktad utåt från rotationsaxeln och påverkar därför inte pendelns rörelse.

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{rot} = -2m\Omega\hat{\mathbf{z}} \times v(-\hat{\mathbf{r}}) = 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{28}$$

Totala kraften i pendelns rörelseplan ges av

$$\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}} + 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{29}$$

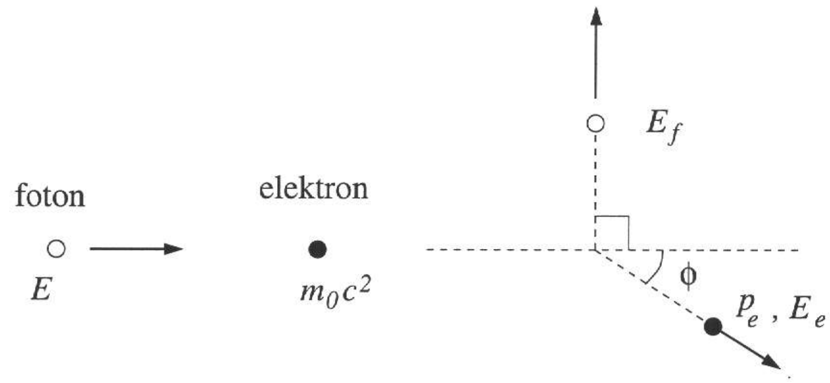


Pendelns utslagsvinkel i jämvikt, ϕ_0, ges av

$$\tan\phi_0 = \frac{F_{coriolis}}{W} = \frac{2m\Omega v}{mg} \Longrightarrow \phi_0 = \arctan(\frac{2\Omega v}{g}). \tag{30}$$

Om pendeln var stilla när Emil började gå kommer den att pendla med amplitud ϕ_0 omkring jämviktsläget. Maximal utsalagsvinkel blir därför $\phi_{max} = 2\phi_0$.

Uppgift 6.



Energikonservering ger

$$E + m_0c^2 = E_f + E_e, \tag{31}$$

där E_f och E_e är fotonens resp. elektronens energi efter stöten.

Rörelsemängdskonservering ger

$\rightarrow$: $E/c = p_e \cos\phi \Rightarrow E^2 = (p_ec)^2 \cos^2\phi$

$\uparrow$: $0 = E_f/c - p_e \sin\phi \Rightarrow E_f^2 = (p_ec)^2 \sin^2\phi$

där p_e är elektronens rörelsemängd efter stöten, E/c och E_f/c är fotonens rörelsemängd före resp efter stöten. Addition av ekvationerna ovan ger

$$E^2 + E_f^2 = (p_ec)^2. \tag{32}$$

Sätter vi in enregi-rörelsemängdsrelationen $(p_ec)^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2$ i ekv. (32) får vi

$$E^2 + E_f^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2 \tag{33}$$

Använd energikonservering (ekv. (31)) och ekv. (33) för att eliminera elektronens energi E_e. Från ekv. (31) har vi

$$E_e = E + m_0c^2 - E_f. \tag{34}$$

Insättning i ekv. (33) ger

$$E^2 + E_f^2 = (E + m_0c^2 - E_f)^2 - (m_0c^2)^2, \tag{35}$$

vilket leder till ett uttryck för fotonens energi efter stöten

$$E_f = \frac{E}{E/m_0c^2 + 1}. \tag{36}$$

Tentamen i Mekanik F del B

Tid och plats: Tisdagen den 20 augusti 2002 kl 09.15 - 13.15 i V.
Jourhavande assistent: Niclas Jacobson, ankn 8425.
Hjälpmedel: Valfria tabellsamlingar, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Gränsen för godkänt är 30 p.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. a) En bil färdas rakt österut på en väg i Göteborgstrakten. På grund av jordrotationen påverkas den av en Corioliskraft, som kan uppdelas i en vertikalkomponent och en horisontalkomponent. Åt vilket vädersträck är horisontalkomponenten riktad? (5 p)

   b) En ström av masslösa neutrinopartiklar färdas med ljushastigheten $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s från solen mot jorden. Deras bana korsas i rät vinkel av ett rymdskepp, som färdas med hastigheten $v = 2,0 \cdot 10^8$ m/s (relativt jorden och solen). Hur stor hastighet har neutrinopartiklarna relativt rymdskeppet? (5 p)

2. Ett mekaniskt system beskrivs med en generaliserad koordinat q och Lagrangefunktionen $L = K - V$. De kinetiska och potentiella energierna är av formen $K = f(q)\dot{q}^2$ respektive $V = V(q)$, där f och V är vissa givna funktioner av q. Visa att Lagranges ekvation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ medför att den totala mekaniska energin $E = K + V$ är konstant, det vill säga att $\frac{d}{dt}E = 0$.

3. En vagn med massan M kan röra sig friktionslöst längs ett horisontellt spår och är förbunden med en fix punkt på spåret med en fjäder med fjäderkonstanten k. Från vagnen hänger en kula med massan m (och tyngden mg) i ett snöre med längden l. Kulan pendlar i ett vertikalplan genom spåret som vagnen rör sig på. Skriv upp Lagranges ekvationer för detta system och bestäm vinkelfrekvenserna för små svängningar omkring jämviktsläget.

4. En homogen stång med längden l och massan m är i sin mittpunkt fäst på en axel som bildar vinkeln α med stången. Axeln är friktionslöst lagrad i två kullager på avståndet d från varandra, och roterar med vinkelhastigheten ω. Beräkna kraften från axeln på vardera lagret. (Tyngdkraften får försummas.)

Vänd!

5. Emil står först stilla på en karusell som roterar med vinkelhastigheten Ω och börjar sedan plötsligt gå i riktning mot centrum med hastigheten v. Framför sig håller han en matematisk pendel som bara kan göra utslag i ett vertikalplan vinkelrätt mot hans gångriktning.

   Bestäm pendelns utslagsvinkel när den har kommit i jämvikt (5 p).

   Bestäm även dess maximala utslagsvinkel om den hängde stilla rakt ned när Emil började gå (5 p).

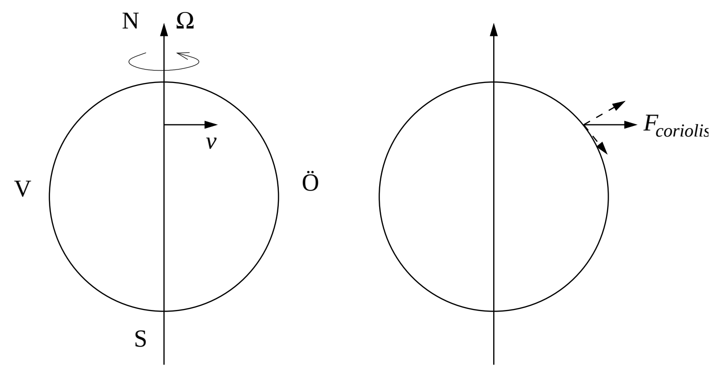
6. En foton med energin E kolliderar med en elektron i vila (vilomassa m_0). Efter kollisionen består systemet av elektronen samt en foton som rör sig i 90^o vinkel relativt den inkommande fotonen. Bestäm den utgående fotonens energi.

Lycka till!

Lösningar till Tentamen i Mekanik F del B 2002-08-20

Uppgift 1.

a)

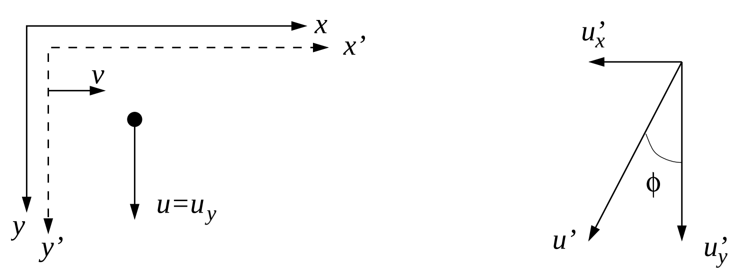


Om $\mathbf{\Omega}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}$ är bilens hastighet (relativt jorden) ges corioliskraften av

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}. \tag{1}$$

Corioliskraften är riktad utåt vinkelrätt mot $\mathbf{\Omega}$ och $\mathbf{v}$ och horisontalkomponenten är riktad söderut (se fig.).

b)



Betrakta ett koordinatsystem, (x', y'), där rymdskeppet är i vila, dvs systemet rör sig med hastighet $v = 2.0 \cdot 10^8$ m/s längs x-axeln i system (x, y) (fixt relativt jorden och solen). Neutrinopartiklarnas hastighet i system (x, y) är $u = u_y = c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s och beskrivs i (x', y')-systemet av

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} = \{u_x = 0\} = -v \tag{2}$$

och

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma[1 - vu_x/c^2]} = \{u_y = c\} = c/\gamma = c\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{c^2 - v^2}, \tag{3}$$

dvs

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = c. \tag{4}$$

Neutrinopartiklarna rör sig med ljusets hastighet relativt rymdskeppet, men i en annan riktning än relativt jorden och solen. Om ϕ är vinkeln mellan u och u' har vi (se fig.)

$$\tan\phi = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 42°. \tag{5}$$

Uppgift 2.
Kinetisk energi: $K = f(q)\dot{q}^2$
potentiell energi: $V = V(q)$
Lagrangefunktionen: $L = K - V = f(q)\dot{q}^2 - V(q)$
Visa att Lagranges ekvation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ medför att den totala mekaniska energin $E = K + V$ är konstant, dvs $\frac{d}{dt}E = 0$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}(2f(q)\dot{q}) = 2\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 - \frac{dV}{dq} \tag{7}$$

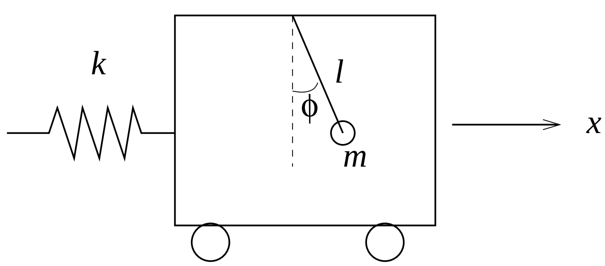
Lagranges ekv. blir

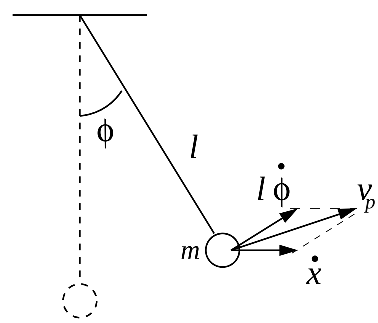
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq} = 0 \tag{8}$$

Energin ges av $E = f(q)\dot{q}^2 + V(q)$, så

$$\frac{d}{dt}E = \frac{df}{dq}\dot{q}\dot{q}^2 + 2f(q)\dot{q}\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\dot{q} = \dot{q}\underbrace{\left(\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\right)}_{=0 \text{ enl. Lagranges ekv.}} = 0 \tag{9}$$

V.S.V
Uppgift 3.





Generaliserade koordinater: x och ϕ
Vagnens kinetiska energi: $K_v = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$
Vagnens potentiella energi: $V_v = \frac{1}{2}kx^2$

Pendelns kula har hastigheten v_p (se fig.)

$$v_p^2 = l^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + (l\dot{\phi}\cos\phi + \dot{x})^2 = l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi \tag{10}$$

Pendelns kinetiska energi: $K_p = \frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi)$
Pendelns potentiella energi: $V_p = -mgl\cos\phi$

Lagrangefunktionen kan nu skrivas $L = K_v + K_p - V_v - V_p$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\phi \tag{11}$$

Sök Lagranges ekvationer $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ för x och ϕ.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\phi}\cos\phi$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\phi}\cos\phi - ml\dot{\phi}^2\sin\phi$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\dot{\phi} + l\dot{x}\cos\phi)$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\ddot{\phi} + l\ddot{x}\cos\phi - l\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi)$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -ml\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi - mgl\sin\phi$

Vi kan nu skriva upp Lagranges ekv. för x och ϕ

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi}\cos\phi - \frac{ml}{M+m}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{12}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\phi + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \tag{13}$$

För små svängningar omkring jämviktsläget reduceras ekvationerna ovan till

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi} + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\ddot{x}}{l} + \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0 \tag{15}$$

där vi har använt $\cos\phi \approx 1$, $\sin\phi \approx \phi$ och $\dot{\phi}^2 \approx 0$. Ekvationerna kan skrivas på matrisform $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0$, där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \phi \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ml}{M+m} \\ \frac{1}{l} & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \frac{k}{M+m} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{pmatrix} \tag{16}$$

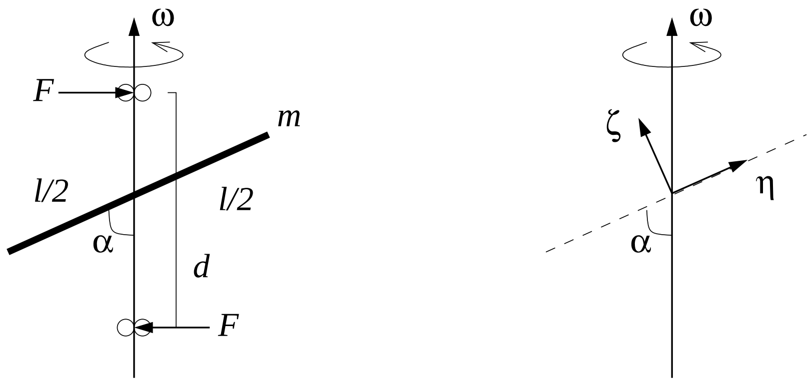
Ansats av typen $\mathbf{x} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$, där $\mathbf{a}$ är en kolumnvektor innehållande amplituder, ger

$$(-M\omega^2 + K)\mathbf{a} = 0. \tag{17}$$

Nollskilld lösning för $\mathbf{a}$ fås endast då determinanten av $(-M\omega^2 + K)$ är lika med noll. Detta leder till en andragradsekvation i ω^2 med lösningarna

$$\omega^2 = \frac{g(M+m)+kl}{2Ml} \pm \frac{1}{2Ml}\sqrt{g^2(M+m)^2 + (kl)^2 - 2gkl(M-m)} \tag{18}$$

Uppgift 4.



Placera ett koordinatsystem (ξ, η, ζ) längs stångens huvudtröghetsaxlar. I detta system är tröghetstensorn diagonal,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

där

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{12}ml^2, \;\; I_{\eta\eta} = 0, \;\; I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{12}ml^2. \tag{20}$$

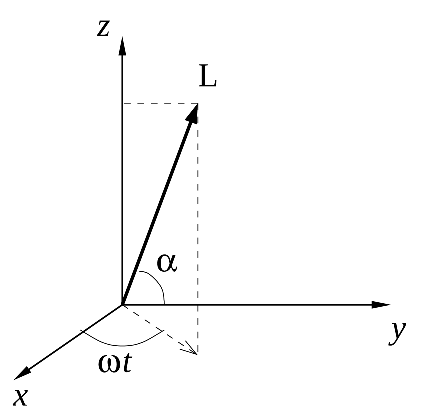
Rotationsvektorn beskrivs i (ξ, η, ζ)-systemet av

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos\alpha\hat{\eta} + \sin\alpha\hat{\zeta}). \tag{21}$$

Stångens rörelsemängdsmoment är $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{12}ml^2\omega\sin\alpha\hat{\zeta} = L\hat{\zeta}, \tag{22}$$

dvs $\mathbf{L}$ roterar kring $\boldsymbol{\omega}$ vinkelrätt mot stången.



För att beräkna kraftmomentet på stången, $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$, beskriver vi $\mathbf{L}$ i ett fixt koordinatsystem (x, y, z) där rotationsaxeln ligger i z-riktningen (se fig.),

$$\mathbf{L} = L\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{y}} + L\sin\alpha\hat{\mathbf{z}}. \tag{23}$$

Kraftmomentet ges av

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -L\omega\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\omega\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{y}} = L\omega\cos\alpha(-\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + \cos\omega t\hat{\mathbf{y}}), \tag{24}$$

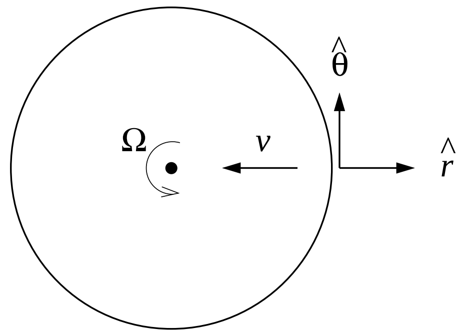
vilket ger

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = L\omega\cos\alpha = \frac{1}{12}ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{25}$$

Vi kan nu beräkna kraften F från axeln på vardera lagren mha $\tau = Fd$,

$$F = \frac{1}{12}m\frac{l^2}{d}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{26}$$

Uppgift 5.



Betrakta ett system som roterar med karusellen. Emils pendel påverkas i detta system, utöver tygngdkraften $W = mg$, av fiktiva krafter. De fiktiva krafterna i roterande system ges av

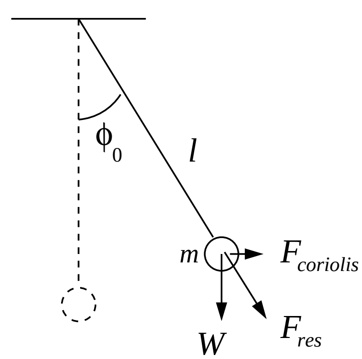
$$\mathbf{F}_{fict} = \mathbf{F}_{coriolis} + \mathbf{F}_{centrifugal} = -2m\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_{rot} - m\boldsymbol{\Omega}\times(\ \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}), \tag{27}$$

där $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}_{rot} = v(-\hat{\mathbf{r}})$ är Emils hastighet i det roterande systemet. Centrifugalkraften är riktad utåt från rotationsaxeln och påverkar därför inte pendelns rörelse.

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_{rot} = -2m\Omega\hat{\mathbf{z}}\times v(-\hat{\mathbf{r}}) = 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{28}$$

Totala kraften i pendelns rörelseplan ges av

$$\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}} + 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{29}$$

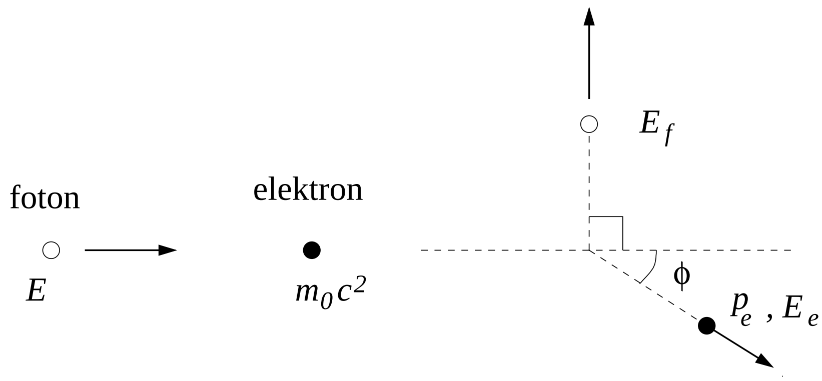


Pendelns utslagsvinkel i jämvikt, ϕ_0, ges av

$$\tan\phi_0 = \frac{F_{coriolis}}{W} = \frac{2m\Omega v}{mg} \Longrightarrow \phi_0 = \arctan(\frac{2\Omega v}{g}). \tag{30}$$

Om pendeln var stilla när Emil började gå kommer den att pendla med amplitud ϕ_0 omkring jämviktsläget. Maximal utsalagsvinkel blir därför $\phi_{max} = 2\phi_0$.

Uppgift 6.



Energikonservering ger

$$E + m_0c^2 = E_f + E_e, \tag{31}$$

där E_f och E_e är fotonens resp. elektronens energi efter stöten.

Rörelsemängdskonservering ger

$\rightarrow$: $E/c = p_e \cos\phi \Rightarrow E^2 = (p_ec)^2 \cos^2\phi$

$\uparrow$: $0 = E_f/c - p_e \sin\phi \Rightarrow E_f^2 = (p_ec)^2 \sin^2\phi$

där p_e är elektronens rörelsemängd efter stöten, E/c och E_f/c är fotonens rörelsemängd före resp efter stöten. Addition av ekvationerna ovan ger

$$E^2 + E_f^2 = (p_ec)^2. \tag{32}$$

Sätter vi in enregi-rörelsemängdsrelationen $(p_ec)^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2$ i ekv. (32) får vi

$$E^2 + E_f^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2 \tag{33}$$

Använd energikonservering (ekv. (31)) och ekv. (33) för att eliminera elektronens energi E_e. Från ekv. (31) har vi

$$E_e = E + m_0c^2 - E_f. \tag{34}$$

Insättning i ekv. (33) ger

$$E^2 + E_f^2 = (E + m_0c^2 - E_f)^2 - (m_0c^2)^2, \tag{35}$$

vilket leder till ett uttryck för fotonens energi efter stöten

$$E_f = \frac{E}{E/m_0c^2 + 1}. \tag{36}$$

Tentamen i Mekanik för F del B

Kurskod: FFM052
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 21 oktober 2002 kl 08.45 - 12.45 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) En konståkerska utför en piruett på isen. Till en början har hon armarna rakt utsträckta, men sedan drar hon in dem mot kroppen. Man kan därvid observera att hennes vinkelhastighet ökar. Förklara detta genom att använda att en viss storhet är konstant i tiden.

   b) Den vänstra och den högra massan är lika, och de två fjädrarna i det högra systemet är av samma typ som fjädern i det vänstra systemet. Det vänstra systemet kan utföra vertikala svängningar med svängningstiden t = 0,5 s. Vad blir svängningstiden för det högra systemet?

2. En stel kropp roterar kring en fix punkt O med vinkelhastighetsvektorn $\overline{\omega}$. Visa att dess kinetiska energi kan skrivas

$$T = \frac{1}{2}\overline{\omega} \cdot \overline{H}_O,$$

   där vektorn $\overline{H}_0$ är kroppens rörelsemängdsmoment med avseende på O.

3. Raketen väger 2,8 ton och bränsleförbrukningen är 120 kg/s. Förbränningsgasernas hastighet relativt raketen är 640 m/s. På den aktuella höjden är tyngdaccelerationen 9,34 m/s^2. Bestäm vertikal och horisontalkomponenterna av raketens acceleration.

Vänd!

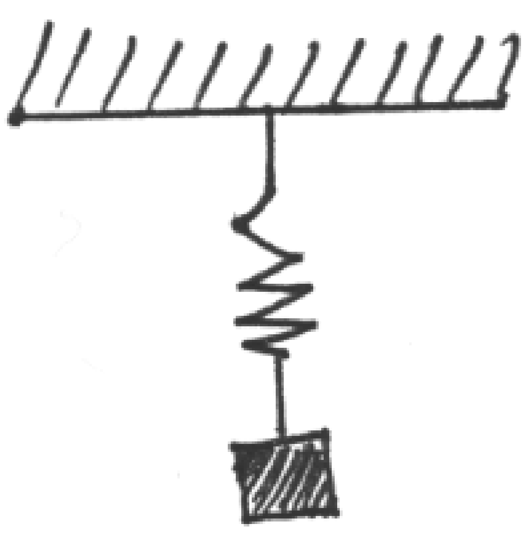
4. Armen OA har tyngdpunkten i G, massan m_{OA} och tröghetsmomentet I_0 med avseende på den fixa punkten O. Kugghjulet B har massan m_B och tröghetsmomentet I_A med avseende på sin mittpunkt A. Kugghjulet C är fixt i vertikalplanet och kan inte rotera. Armen OA är från början horisontell och i vila, och påverkas därefter av ett konstant vridmoment M. Bestäm vinkelhastigheten för armen OA då den är vertikal (så att punkten A sammanfaller med A').

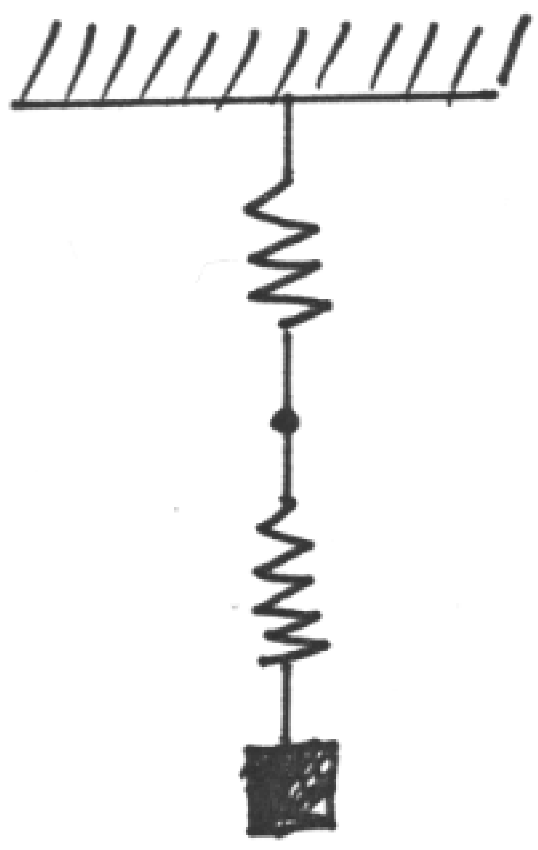
5. Den homogena plattan har massan m och roterar med konstant vinkelhastighet ω kring den vertikala axeln. Bestäm vridmomentsvektorn $\mathbf{M}$ med vilken plattan påverkar axeln. (*Ledning*: Bestäm plattans huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment.)

6. Visa att systemets egenfrekvens är oberoende av vinkeln θ.

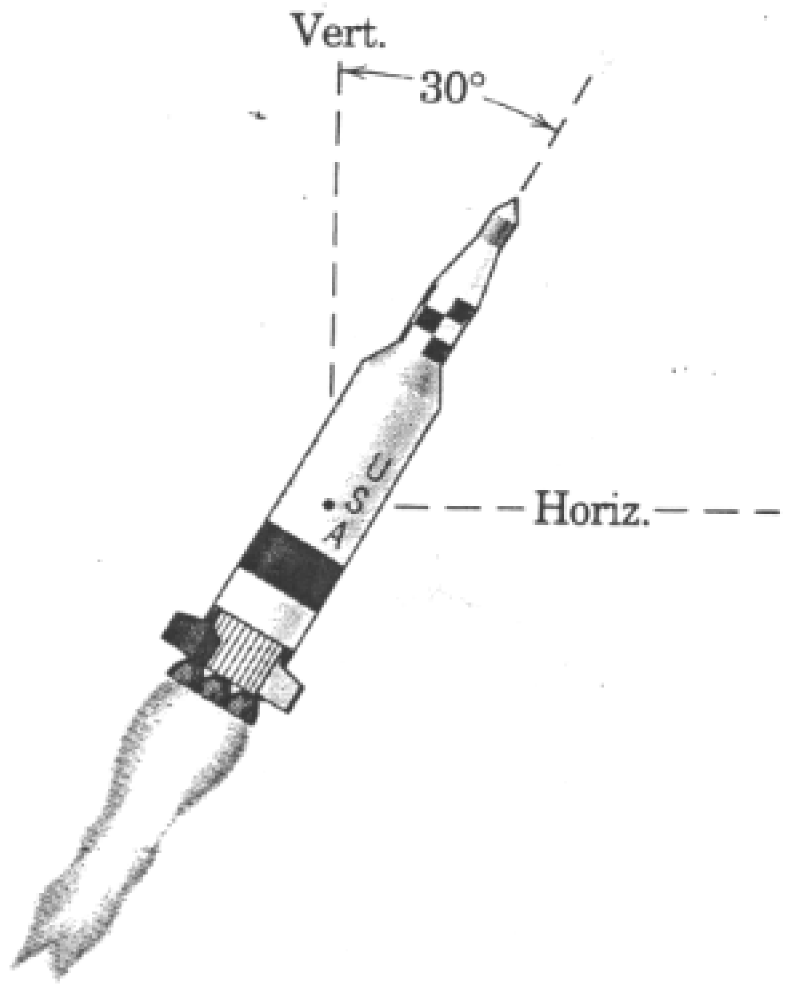
Lycka till!

1.b)

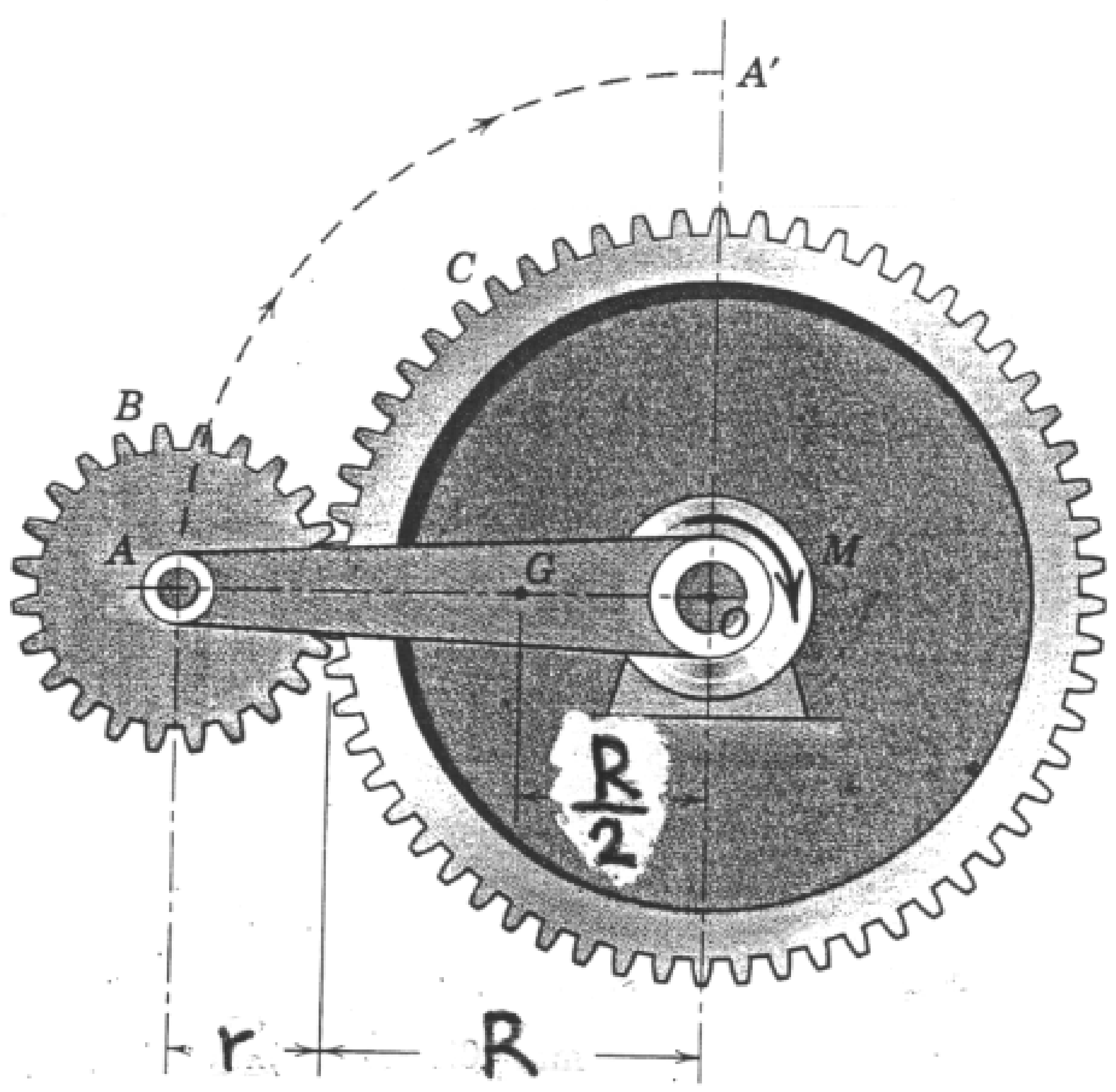




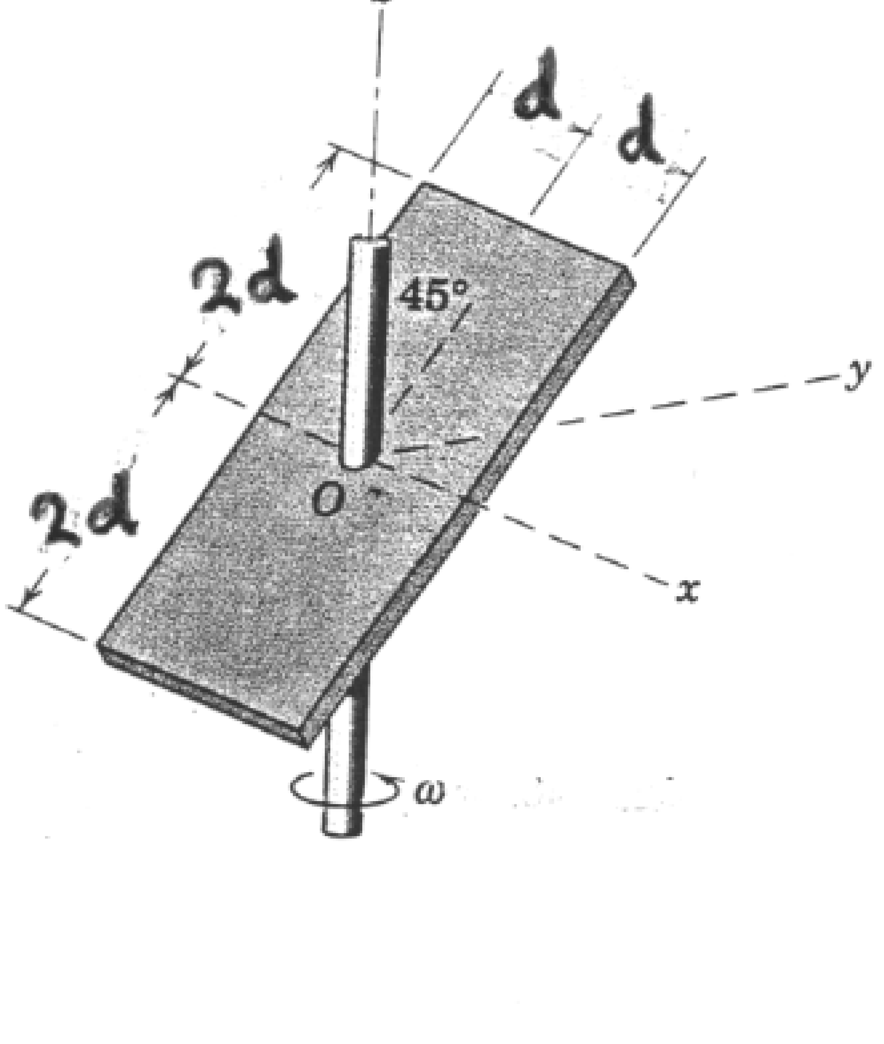
3.



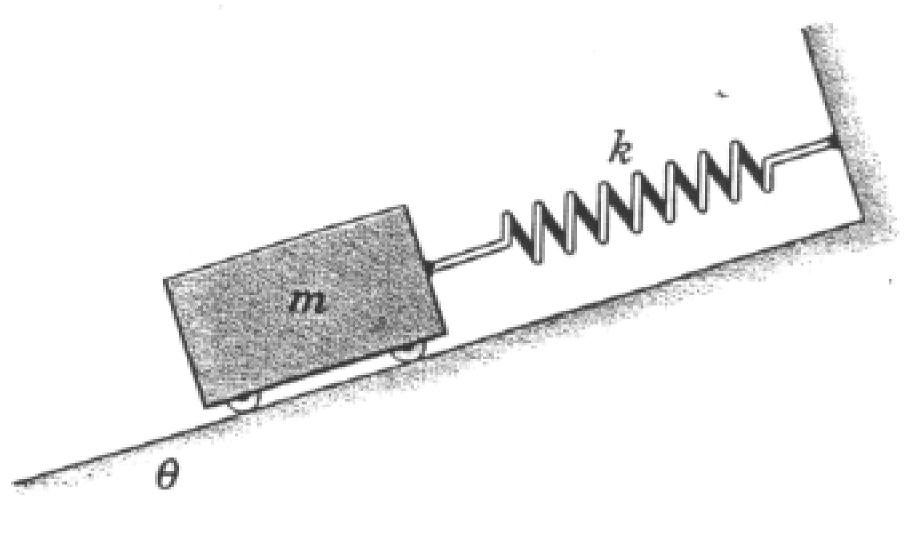
4.



5.



6.



Tentamen i Mekanik för F del B

21 oktober 2002

1a) Eftersom kraften är riktad i $\hat{r}$-led är rörelsemängdsmomentet en konserverad storhet:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{G}) = r\hat{r} \times F\hat{r} = 0$$

Dvs, $I_1 w_1 = I_2 w_2$ och då tröghetsmomentet $I_2 < I_1$ (radien minskar) $\Longrightarrow w_2 > w_1$ (vinkelhastigheten ökar).

b) Det vänstra systemet har frekvensen $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ medan det högra har frekvensen $\omega_2 = \sqrt{k/2m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1$ (i analogi med parallellkopplade motstånd, $1/k_2 = 1/k + 1/k$). Då svängningstiden $t_2 = 2\pi/\omega_2 = \sqrt{2}t_1$ och $t_1 = 0.5s \Longrightarrow t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}s$.

2 Uttrycket för kinetiska energin ges av:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{\omega} \cdot \bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{H}_0$$

Här har vi använt $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})$ och att vinkelhastigheten är densamma för varje punkt i den stela kroppen.

3 Skriv upp rörelsemängden före och efter ett tidssteg Δt:

$$\begin{aligned} \bar{G}(t) &= (M + \Delta m)\bar{v} \\ \bar{G}(t + \Delta t) &= M(\bar{v} + \Delta v) + \Delta m(\bar{v} + \bar{u}) \end{aligned}$$

där M,Δm är massan för raketen resp. det förbrukade bränslet under tiden Δt. $\bar{v}$ och $\Delta\bar{v}$ är hast. för raketen resp. dess förändring, $\bar{u}$ är förbränningsgasernas hastighet relativt raketen (motsatt riktning mot raketen). Detta medför att

$$\bar{F} = \frac{d\bar{G}}{dt} = \lim_{t \to 0}\frac{\bar{G}(t + \Delta t) - \bar{G}(t)}{\Delta t} = \lim_{t \to 0}\frac{M\Delta\bar{v} + \Delta m\bar{u}}{\Delta t} = M\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\bar{u}$$

Med $\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$ fås att acceleration

$$\bar{a} = \frac{\bar{u}}{M}\frac{dM}{dt} + \bar{g}$$

Relativa hastigheten i x, y-led (horisontal- resp. vertikalled) $u_x = u\sin\theta, u_y = u\cos\theta$ ($\theta = 30^o$) ger nu vertikal och horisontalkomponenterna av raketens acceleration

$$a_x = \frac{u}{M}\frac{dM}{dt}\sin\theta \qquad a_y = \frac{u}{M}\frac{dM}{dt}\cos\theta - g$$

Med givna värden ($u = -640$m/s, $\frac{dM}{dt} = -120$kg/s, $g = 9.34$m/s^2, $\theta = 30^o$, $M = 2800kg$) blir $a_x = 13.7m/s^2$ och $a_y = 14.4m/s^2$.

4 Använd att det utförda arbetet U är summan av potentiella V och kinetiska energin T, dvs $U = T + V$. Det utförda arbetet $U = \int_0^{\pi/2} M \cdot d\theta = M\frac{\pi}{2}$, pga det konstanta vridmomentet M. Kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}I_A{\omega'}^2 + \frac{1}{2}m_B(r + R)^2\omega^2$$

där kugghjulet B snurrar med vinkelhastigheten ω' och ω är vår sökta vinkelhastighet. Vinkelhastigheterna är relaterade som $\omega' r = \omega(r + R)$. Potentiella energin då punkten A sammanfaller med A' (med nollan i horisontalläget) ges av $V = m_B g(r + R) + m_{OA}g(\frac{R}{2})$. Med $U = T + V$ fås nu att

$$M\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}(1 + \frac{R}{r})^2 I_A\omega^2 + \frac{1}{2}m_B(r + R)^2\omega^2 + V$$

Insättning av uttrycket för V ger nu vinkelhastigheten för armen OA då den är vertikal;

$$\omega = \left(\frac{\pi M - g(2m_B(r+R) + m_{OA}R)}{I_O + I_A(1+\frac{R}{r})^2 + m_B(r+R)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alternativ lösning: Använd en momentekvationen kring O och integrera över $d\theta$ från 0 till $\frac{\pi}{2}$, eftersom $\int \alpha d\theta = \int \omega d\omega$;

$$\int_0^{\pi/2} (M - m_{OA}g\frac{R}{2}\cos\theta - m_B g(r+R)\cos\theta)d\theta = \int_0^{\omega} (I_O + m_B(r+R)^2 + I_A(1+\frac{R}{r})^2)\omega d\omega$$

vilket också ger den erhållna lösningen ovan.

5 Inför principalaxlar x', y', z', där x', y' ligger utmed plattans yta så att $x' = x$ och z' bildar $\theta = 45^o$ vinkel med z. Tröghetsmomentet kring z' ges nu av (deviationsmomenten är ju här noll)

$$I = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$

där $I_{x'x'} = \frac{1}{12}m(4d)^2 = \frac{4}{3}md^2, I_{y'y'} = \frac{1}{12}m(2d)^2 = \frac{1}{3}md^2, I_{z'z'} = \frac{1}{12}m((2d)^2+(4d)^2) = \frac{5}{3}md^2$. För att relatera våra två koordinatsystem inför enhetsvektorer $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ utefter x', y' resp. z'-axlarna.

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \hat{x} & & \\ \hat{y}' &= \cos\theta\hat{y} + \sin\theta\hat{z} & \qquad \hat{y} &= \cos\theta\hat{y}' - \sin\theta\hat{z}' \\ \hat{z}' &= -\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z} & \qquad \hat{z} &= \sin\theta\hat{y}' + \cos\theta\hat{z}' \end{aligned}$$

Vinkelhastigheten kan nu skrivas som $\bar{\omega} = \omega\hat{z} = \omega(\sin\theta\hat{y}' + \cos\theta\hat{z}')$ vilket medför att rörelsemängdsmomentet

$$\bar{H} = \omega I_{y'y'}\sin\theta\hat{y}' + \omega I_{z'z'}\cos\theta\hat{z}'$$

och vridmomentet, med vilken plattan påverkar axeln;

$$\bar{M} = -\bar{\omega} \times \bar{H} = -\omega^2(I_{z'z'} - I_{y'y'})\cos\theta\sin\theta\hat{x}' = -\frac{2}{3}m\omega^2 d^2\hat{x}$$

Vinkelhastigheten för koordinatsystemet x', y', z' är ju även den $\omega\hat{z}$.

Alternativ lösning: Om vi inte inför principalaxlar behöver vi räkna ut deviationsmomenten I_{yz} och I_{xz} eftersom

$$\bar{M} = -\bar{\omega} \times \bar{H} = -\omega^2 I_{yz}\hat{x} + \omega^2 I_{xz}\hat{y} \tag{1}$$

där $I_{xz} = 0$ och $I_{yz} = \frac{2}{3}md^2$ så att $\bar{M} = -\frac{2}{3}md^2\omega^2\hat{x}$.

6 Inför x-axel utmed det lutande planet från jämviktsläget som ligger avståndet δ ifrån fjäderns ospända läge. Rörelseekvationen ges då utav

$$m\ddot{x} = -k(x+\delta) + mg\sin\theta$$

I jämviktsläget $x = 0$ gäller att:

$$k\delta = mg\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

med lösning

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

där konstanterna A, B bestäms av begynnelsevärden. Vi ser att ω är oberoende av θ. θ bestämmer enbart jämviktsläget δ varifrån svägningarna utföres.

Tentamen i Mekanik för F del B

Kurskod: FFM052
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 13 januari 2003 kl 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) En helikopters rotor roterar motsols sedd ovanifrån. När helikoptern hovrar (d v s står stilla i luften) är rotorn horisontell, men när helikoptern sedan skall börja röra sig framåt låter piloten den tippa kring en horisontell axel så att nosen sänks. Härvid uppstår en gyroskopverkan så att helikoptern även tippar i sidled. Är det helikopterns vänstra eller högra sida som sänks?

   b) En massa m är fäst i en icke-linjär fjäder som påverkar den med kraften $F = kx + \lambda x^3$, där k och λ är konstanter och x är avvikelsen från jämviktsläget. Systemet kan utföra en svängningsrörelse med amplituden $x_{\max}$ och svängningstiden T. Om $\lambda = 0$, blir svängningstiden $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ oberoende av amplituden $x_{\max}$. Om $\lambda > 0$, blir då T en avtagande eller växande funktion av $x_{\max}$?

2. Utgå från Newtons andra lag $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, där $\mathbf{F}$ är den totala yttre kraft som verkar på ett givet materiellt system med rörelsemängden $\mathbf{p}$. Härled därifrån rörelseekvationen för en raket med massan $m(t)$ som påverkas av en yttre kraft $\mathbf{F}(t)$. Raketens hastighet är $\mathbf{v}(t)$, och den massa som lämnar raketen har hastigheten $\mathbf{u}(t)$ relativt raketen. (*Ledning:* Det gäller alltså att ställa upp en differentialekvation från vilken man kan lösa ut $\dot{\mathbf{v}}(t)$ uttryckt i $\mathbf{F}(t)$, $m(t)$, $\dot{m}(t)$ och $\mathbf{u}(t)$.)

3. Hylsan A rör sig med konstant hastighet v. Bestäm vinkelhastigheten ω för stången AB uttryckt i s, v och R.

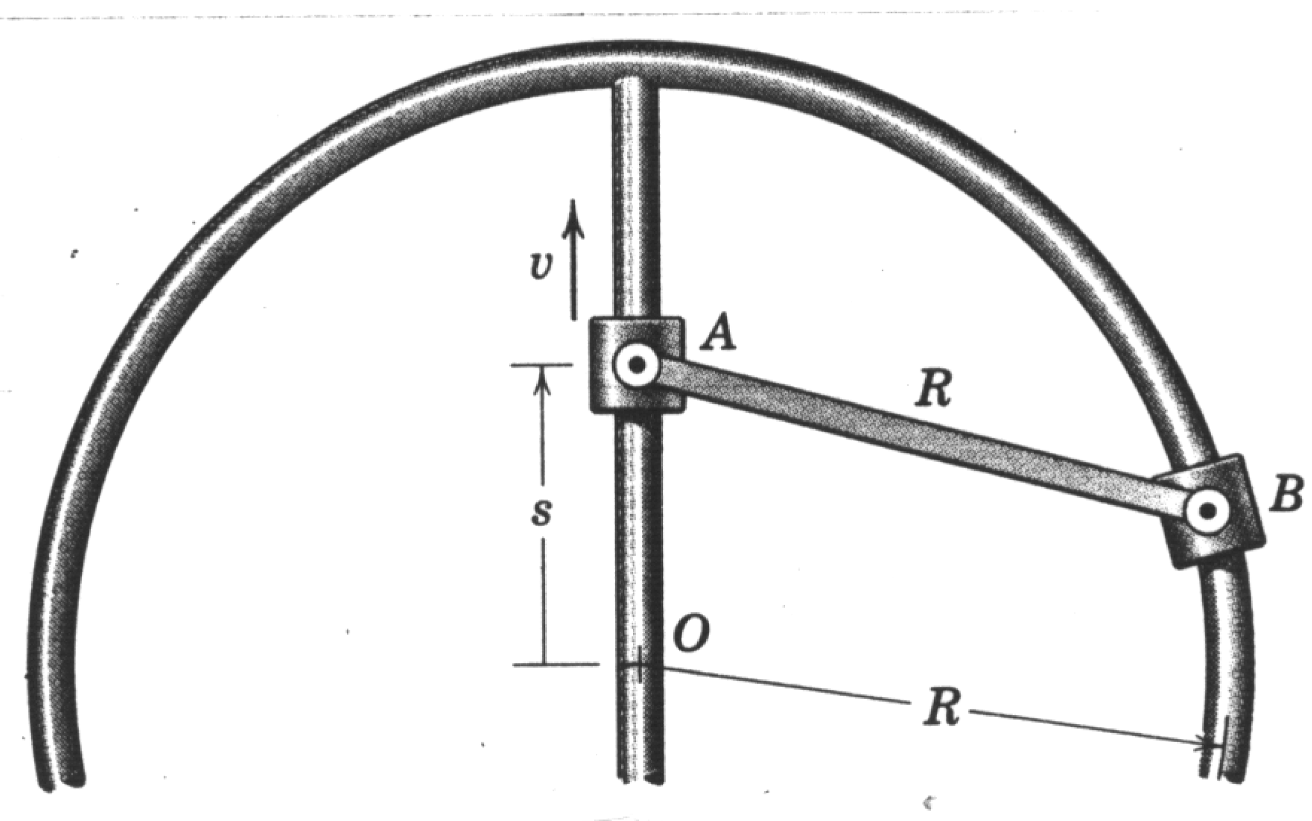
4. Den tunna ringen har massan m och kan fritt rotera i vertikalplanet kring den fixa punkten O. Om den släpps i vila då $\theta = 0$, bestäm n- och t-komponenterna av kraften som påverkar ringen i O som funktioner av θ.

5. Bestäm systemets rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_0$ med avseende på O i det avbildade ögonblicket. Klotens radie samt massan för axeln och stängerna kan försummas.

6. Ställ upp systemets rörelseekvation och bestäm dess naturliga vinkelfrekvens ω_n och dämpfaktor ζ.

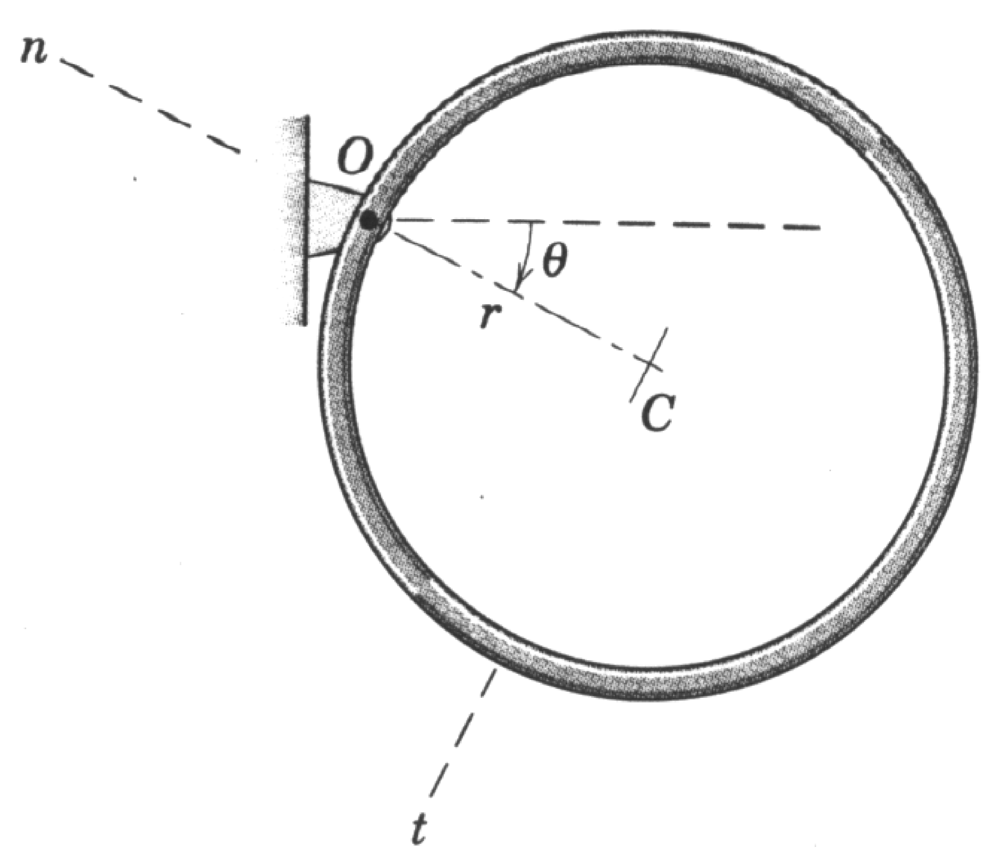
Lycka till!

3.



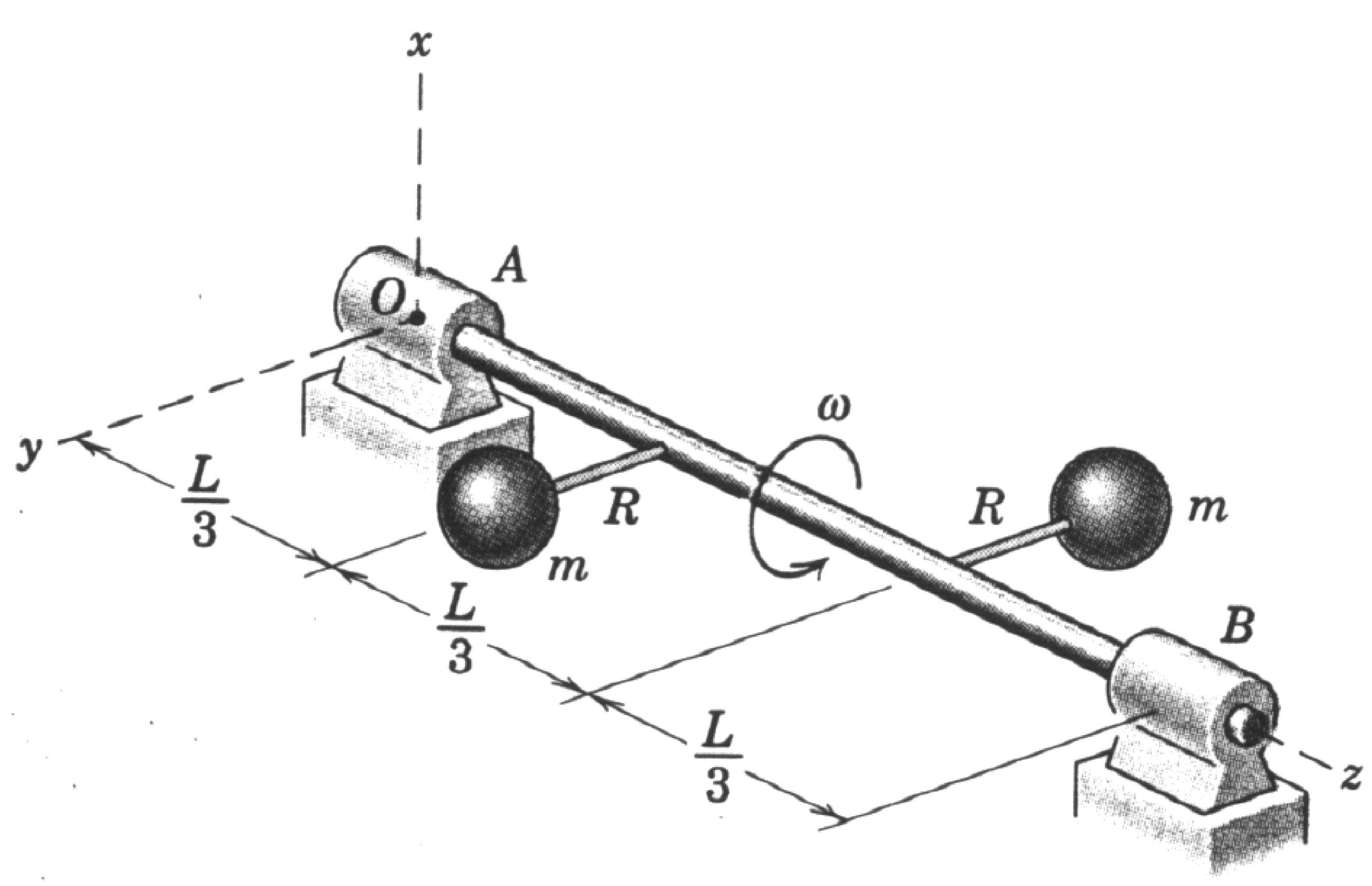
v
A
R
B
s
O
R

4.



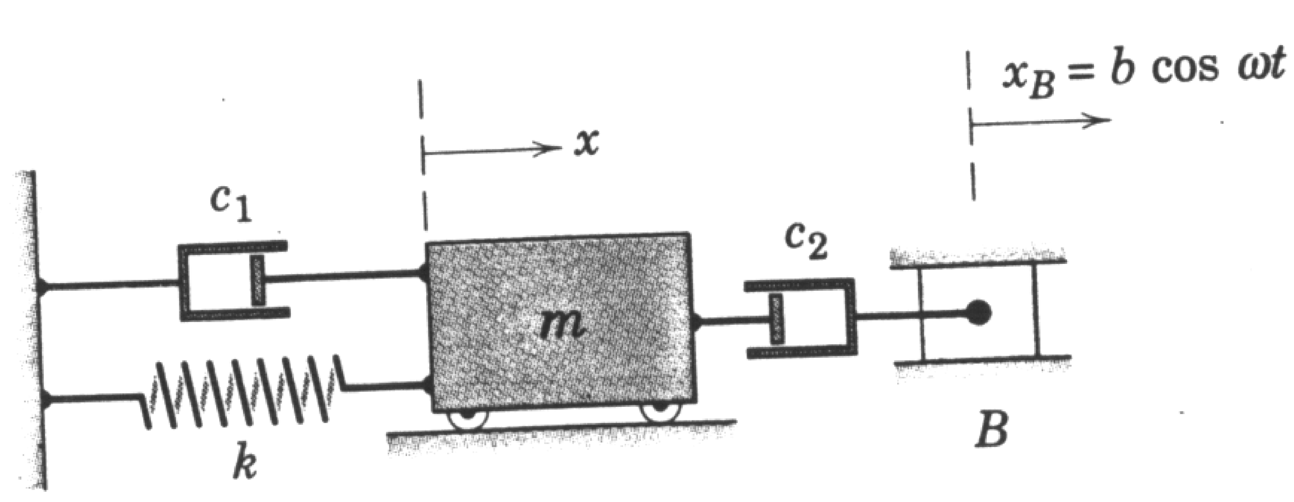
n
O
θ
r
C
t

5.



x
A
O
y
L/3
L/3
L/3
R
m
ω
R
m
B
z

6.



x
$x_B = b \cos \omega t$
c_1
c_2
m
k
B

Tentamen i Mekanik för F del B

13 januari 2003

1a) Helikopterns rotor roterar motsols så att rörelsemängdsmomentet är riktat uppåt och dess tidsderivata framåt. Antag att vi lägger på ett yttre moment så att nosen på helikoptern inte sänks på någon sida, dvs så att nosen pekar rakt fram. För att åstadkomma detta måste ett moment som drar nosen åt höger läggas på. I frånvaro av detta yttre moment kommer alltså helikopterns vänstra sida att sänka sig.

b)Med $\lambda = 0$ har vi en linjär fjäder med $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, där k ges av lutningen i kurvan $F = kx$. Med $\lambda > 0$ fås en brantare lutning på kurvan $F = kx + \lambda x^3$ med ökande x_{max} vilket gör att T kommer att avta som funktion av x_{max}.

2 Skriv upp rörelsemängden före och efter ett tidssteg Δt:

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) &= (M + \Delta m)\bar{v} \\ \bar{p}(t + \Delta t) &= M(\bar{v} + \Delta\bar{v}) + \Delta m(\bar{v} + \bar{u}) \end{aligned}$$

där M,Δm är massan för raketen resp. det förbrukade bränslet under tiden Δt. $\bar{v}$ och $\Delta\bar{v}$ är hast. för raketen resp. dess förändring, $\bar{u}$ är förbränningsgasernas hastighet relativt raketen. Detta medför att

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \lim_{t\to 0}\frac{\bar{p}(t+\Delta t) - \bar{p}(t)}{\Delta t} = \lim_{t\to 0}\frac{M\Delta\bar{v} + \Delta m\bar{u}}{\Delta t} = M\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\bar{u}.$$

Med $\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$ fås att

$$\dot{\bar{v}}(t) = \frac{1}{M}(\bar{F}(t) + \dot{M}(t)\bar{u}(t)).$$

3 Vi har ett tvång på systemet för den rätvinkliga triangeln med sidorna $R, s/2, R\sin\theta$

$$(R\sin\theta)^2 + \frac{s^2}{4} = R^2$$

där θ är en av de två vinklarna som är lika stora i den likbenta triangeln som bildas av sidorna med längderna R, R, S. Derivera båda sidor m.a.p tiden så fås uttrycket ($\dot{s} = v$)

$$\dot{\theta} = \frac{-v}{\sqrt{4R^2 - s^2}}.$$

Vinkelhastigheten för stången kommer nu att bli $\omega = -\dot{\theta} = v(4R^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}}$, medsols rotation.

4 Vi skall räkna ut krafterna O_t, O_n riktad i $-\hat{t}$-led och $\hat{n}$-led, med hjälp av Newtons andra lag. Vi behöver då accelerationens t, n komponenter som ju är $a_t = r\alpha$ och $a_n = r\omega^2$ Då kraftmomentet $M = I\alpha$, där α är vinkelaccelerationen och tröghetsmomentet $I = I_c + mr^2$. Den tunna ringen har tröghetsmomentet $I_c = mr^2$, vilket medför att $I = 2mr^2$. Eftersom kraftmomentet kring pkt O är $M = mgr\cos\theta$ fås att

$$\alpha = \frac{mgr}{I}\cos\theta = \frac{g}{2r}\cos\theta.$$

Nu behöver vi endast ta fram ett uttryck för vinkelhastigheten så kan vi lösa ut våra efterfrågade kraftkomponenter. Genom att använda att $\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \alpha d\theta$ (ringen släpps ju i vila vid $\theta = 0$) fås att $\omega^2 = \frac{g}{r}\sin\theta$, vilket i sin tur leder till Newtons andra lag:

$$\begin{aligned} O_n - mg\sin\theta = mr\omega^2 \qquad &\to \qquad O_n = 2mg\sin\theta \\ -O_t + mg\cos\theta = mr\alpha \qquad &\to \qquad O_t = \frac{1}{2}mg\cos\theta \end{aligned}$$

där O_n är riktad i $\hat{n}$-led och O_t i $-\hat{t}$-led från punkten O.

5 Vinkelhastigheten $\bar{\omega} = \omega \hat{z}$ så att rörelsemängdsmomentet m.a.p O i det avbildade ögonblicket blir

$$\bar{H}_O = -\omega I_{xz}\hat{x} - \omega I_{yz}\hat{y} + \omega I_{zz}\hat{z}$$

där I_{xz}, I_{yz} är deviationsmoment. Vi har att

$$\begin{aligned} I_{zz} &= mR^2 + mR^2 = 2mR^2 \\ I_{yz} &= \frac{1}{3}mRL - \frac{2}{3}mRL = -\frac{1}{3}mRL \\ I_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

och slutligen

$$\bar{H}_O = \frac{1}{3}m\omega RL\hat{y} + 2m\omega R^2\hat{z}.$$

6 Vi ställer upp rörelseekvationen och identifierar sedan dämpfaktorn ζ och vinkelfrekvensen ω_n. Ur figuren ser vi att $c_1\dot{x}, kx, c_2\dot{x}$ kommer att motverka rörelsen i x-led medan $c_2\dot{x}_B$ kommer att vara en drivande faktor. Newtons andra lag kommer nu att se ut så här:

$$m\ddot{x} = -c_1\dot{x} - c_2\dot{x} - kx - c_2\omega b\sin\omega t$$

vilket också kan skrivas som

$$\ddot{x} = -\frac{(c_1 + c_2)}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x - \frac{c_2\omega b}{m}\sin\omega t$$

eller på standardformen

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = -\frac{c_2\omega b}{m}\sin\omega t.$$

Identifiera nu den dimensionslösa dämpfaktorn ζ och vinkelfrekvensen ω_n;

$$\zeta = \frac{(c_1 + c_2)}{2m\omega_n}, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Tentamen i Mekanik för F del B

Kurskod: FFM052
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Tisdagen den 19 augusti 2003 kl 08.45 - 12.45 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Vilken av de två pendlarna har längst svängningstid? (Stängernas massa försummas. Stången och de två massorna i den högra pendeln rör sig tillsammans som en stel kropp.)

   b) Man har tillverkat tre klot med samma massa och radie. Klot Pb består av ett ihåligt sfäriskt skal av bly (densitet $11,3 g/cm^3$). Klot Al är ett massivt aluminiumklot (densitet $2,7 g/cm^3$). Klot Hg är gjort av en lätt plast (försumbar densitet), men har ett sfäriskt hålrum i mitten som är fyllt med flytande kvicksilver (densitet $13,6 g/cm^3$). Rangordna de tre kloten efter hur snabbt de rullar nerför ett lutande plan vid start i vila.

2. Betrakta en plan stel kropp. Dess tröghetsmomentet I_A med avseende på en axel vinkelrät mot kroppen genom en punkt A beror av läget för A. Visa att I_A antar sitt minsta värde då A sammanfaller med kroppens tyngdpunkt G.

3. Kedjan har längden L och massan ρ per längdenhet. Den släpps i vila när längden x av den del som hänger över kanten är försumbart liten. Bestäm kedjans acceleration a och spänning T i kedjan vid hörnet som funktioner av x.

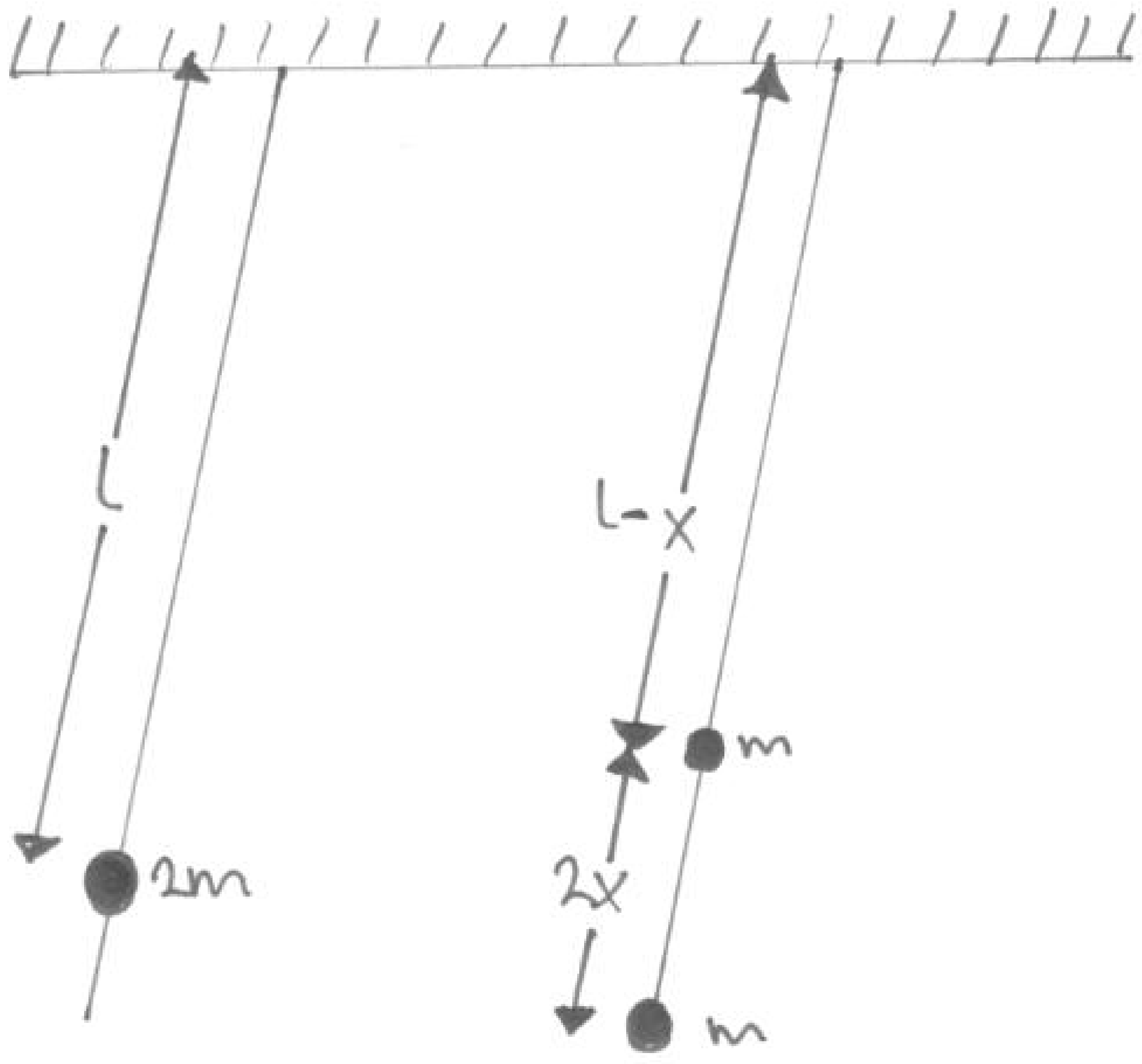
4. Den homogena stången har massan m. Den släpps i vila när den är vertikal. Bestäm den momenta accelerationen för ändpunkten A omedelbart därefter. (Friktionen försummas.)

5. De två homogena stängerna har vardera massan m. De utgör en stel kropp som roterar kring z-axeln med den konstanta vinkelhastigheten ω. Bestäm systemets rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_O$ med avseende på origo O.

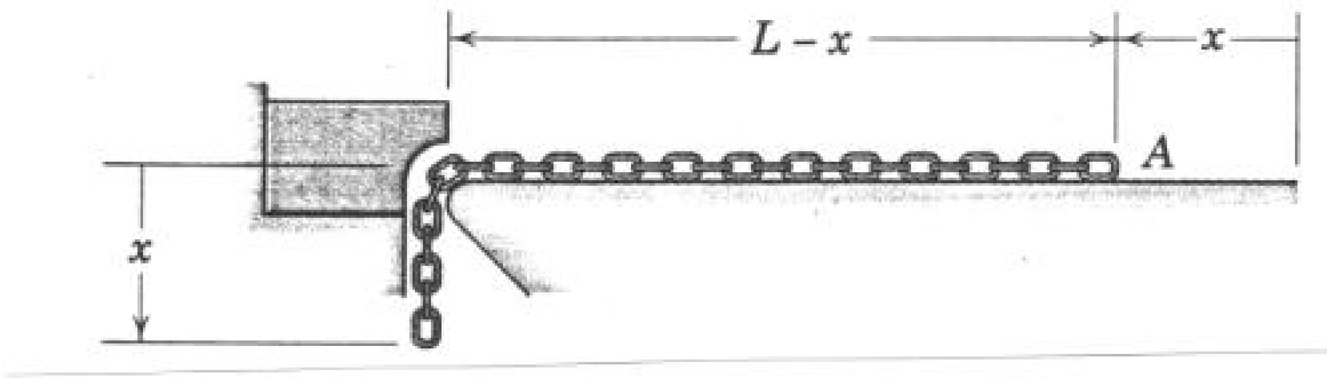
6. En kula med massan $0,70 kg$ är upphängd i en lätt tråd med längden $2,3 m$ och utför en plan pendelrörelse med liten amplitud. Efter tiden $47 s$ har utslagsvinkeln minskat till hälften av den ursprungliga på grund av luftmotståndet. Vi antar att luftmotståndet kan beskrivas med en kraft $\mathbf{F}$ som angriper i kulan och är motriktad kulans hastighet $\mathbf{v}$, samt att $|\mathbf{F}| = c|\mathbf{v}|$, där c är en konstant. Vad får man för värde på c?

Lycka till!

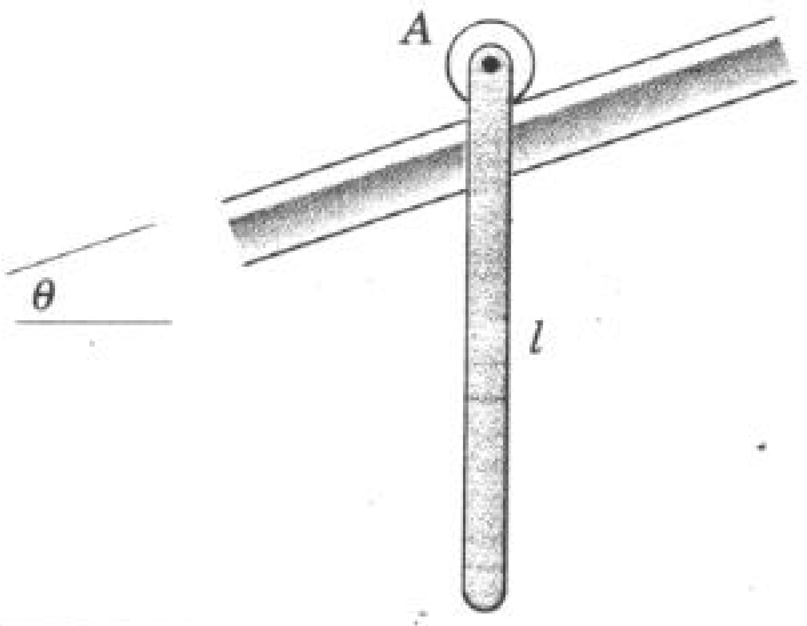
1. a)



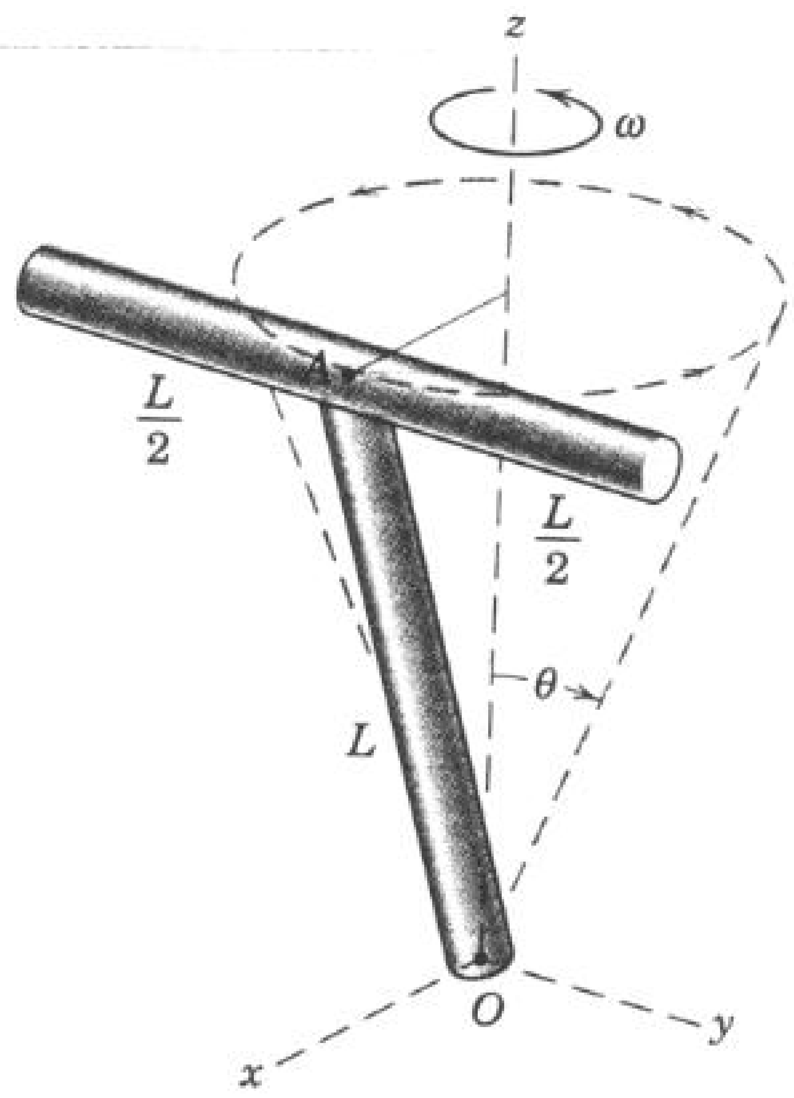
3.



4.



5.



Tentamen i Mekanik för F del B

19 augusti 2003

1a) Systemet med de två massorna har längst svängningstid. Tröghetsmomentet för detta system är $I_{dubbel} = m((l-x)^2 + (l+x)^2) = 2m(l^2 + x^2)$ vilket skall jämföras med det enkla systemet, $I_{enkel} = 2ml^2$. Dvs $I_{dubbel} > I_{enkel}$ vilket medför att svängningstiden är längre för systemet med två massor. Rörelseekvationen för en fysisk pendel ges ju utav

$$I\ddot{\theta} + 2mgl\theta = 0, \quad \text{där} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mgl}}.$$

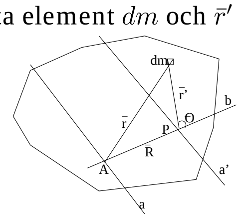
Detta kan också inses om vi låter $x \to l$ vilket gör att längden på pendeln blir dubellt så lång och eftersom svängningstiden $T \sim \sqrt{r/g}$ (där r är längden på pendeln) följer det att T ökar då r ökar.
1b) Kulornas totala kinetiska energi kommer att vara lika stor efter att de rullat lika lång sträcka. Dess storlek ges av

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

dvs ju större tröghetsmoment kulan har desto mer energi går åt att rotera kulan istället för att translatera den. Tröghetsmomentet för det sfäriska skalet är $I_{Pb} = \frac{2}{3}mR^2$, och det massiva aluminiumklotet $I_{Al} = \frac{2}{5}mR^2$. Klotet med ett hålrum fyllt med flytande kvicksilver har försumbart tröghetsmoment ($I_{Hg} \approx 0$). Detta gör att relationerna för hastigheterna blir

$$v_{Hg} > v_{Al} > v_{Pb}.$$

2 Låt en axel a gå genom en godtycklig punkt A och en parallell axel a' genom tyngdpunkten G. Rita ut en vinkelrät linje b från axel a genom axel a'. Punkten där dessa korsas kallar vi P och vektorn mellan P och A, $\bar{R}$. Välj ett godtyckligt masselement dm och låt $\bar{r}$ vara vektorn från A till detta element dm och $\bar{r}'$ vektorn mellan P och dm som bildar vinkel θ med linje b.



Tröghetsmomentet ges utav $I = \int r^2 dm$.

Cosinussatsen ger att $r^2 = R^2 + r'^2 + 2Rr'\cos\theta$, dvs

$$I_A = R^2 \int dm + \int r'^2 dm + 2R \int r' \cos\theta dm$$

Den första termen är mR^2, den andra tröghetsmomentet för tyngpunkten I_G och den sista termen är noll eftersom $r'\cos\theta$ är vinkelrät mot axel a' och börjar där dessa skär varandra. (En summering över alla vinkelräta avstånd till masselementen är ju noll eftersom vi utgår ifrån axeln genom tyngdpunkten.) Vi har alltså att

$$I_A = I_G + mR^2$$

vilket antar sitt minsta värde då $R = 0$, dvs då A sammanfaller med G.
3 Vi tänker oss kedjan som bestående av två delar, en som hänger över kanten med längden x, och en del som rör sig utmed planet med längden $L - x$. Newtons andra lag ger nu

$$\rho x g - T = \rho x \ddot{x} \qquad \text{och} \qquad T = \rho(L-x)\ddot{x}$$

där T är spännkraften i kedjan och ρ massan per längdenhet. Med hjälp av dessa ekvationer finner vi accelerationen $\ddot{x}$ och spännkraften T som funktioner av x:

$$\ddot{x} = \frac{g}{L}x \qquad\qquad T = \rho g x(1 - \frac{x}{L})$$

4 Inför en x-axel riktad nedåt utmed det lutande planet, dvs i acc. riktningen för punkten A. Kraftmomentet kring punkten A ges av

$$\Sigma M_A = I\alpha + \Sigma m\bar{a}d$$

där d är det vinkelräta avståndet mellan acc. riktningen för stångens tyngdpunkt och A. Om vi inför polära koordinater och låter $l = 2r$ så fås att $I = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{3}mr^2$ och $0 = \frac{1}{3}mr^2\alpha + mr\alpha r - mar\cos\theta$, dvs

$$\alpha = \frac{3a\cos\theta}{4r}$$

Vi har också Newtons andra lag i x-led:

$$ma - mr\omega^2\sin\theta - mr\alpha\cos\theta = mg\sin\theta$$

Den momentana accelerationen a för punkten A vid start i vila ($\omega = 0$) fås genom att kombinera de två utrycken så att

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 - \frac{3}{4}\cos^2\theta}$$

Alternativ lösning: Inför koordinatsystem med y-axeln riktad uppåt längs med den homogena stången och x-axeln vinkelrät mot denna. Inför också vinkelhast. ω och vinkelacc. α för stången. Accelerationen för tyngdpunkten G kan nu skrivas som $\bar{a}_G = a_A(-\cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{y}) + \frac{1}{2}l\omega^2\hat{y} + \frac{1}{2}l\alpha\hat{x}$. Newtons andra lag i x- och y-led samt en kraftmomentsekvation kring tyngpunkten G ges av

$$\begin{aligned} -N\sin\theta &= m(-a_A\cos\theta + \frac{1}{2}l\alpha) \\ N\cos\theta - mg &= m(-a_A\sin\theta + \frac{1}{2}l\omega^2) \\ N\sin\theta\frac{l}{2} &= I\alpha \end{aligned}$$

där N är normalkraften och $I = \frac{1}{12}ml^2$. Lösning av detta ekvationssystem ger den momentana accelerationen a_A given ovan.

5 Inför principalaxlar x', y', z' utmed den stela kroppen, med vinkeln θ mellan z'- och z-axeln. Detta leder till att matrisen för tröghetsmomentet endast har nollskilda element i diagonalen (dvs deviationsmomenten är noll)

$$I = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$

där $I_{x'x'} = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{3}mL^2 + mL^2 = \frac{17}{12}mL^2, I_{y'y'} = \frac{1}{3}mL^2, I_{z'z'} = \frac{1}{12}mL^2$. För att relatera våra två koordinatsystem inför vi enhetsvektorer $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ utefter x', y' resp. z'-axlarna.

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{z} & \hat{x} &= \cos\theta\hat{x}' + \sin\theta\hat{z}' \\ \hat{y}' &= \hat{y} \\ \hat{z}' &= \sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z} & \hat{z} &= -\sin\theta\hat{x}' + \cos\theta\hat{z}' \end{aligned}$$

Vinkelhastigheten kan nu skrivas som $\bar{\omega} = \omega\hat{z} = \omega(-\sin\theta\hat{x}' + \cos\theta\hat{z}')$ vilket medför att rörelsemängdsmomentet

$$\bar{H} = \bar{\omega}\cdot I = -\omega I_{x'x'}\sin\theta\hat{x}' + \omega I_{z'z'}\cos\theta\hat{z}' = -\frac{4}{3}\omega mL^2\sin\theta\cos\theta\hat{x} + (\frac{1}{12}\omega mL^2 + \frac{4}{3}\omega mL^2\sin^2\theta)\hat{z}$$

Alternativ lösning: Om vi inte inför principalaxlar behöver vi räkna ut I_{zz} och deviationsmomenten I_{yz} och I_{xz} eftersom

$$\bar{H} = -\omega I_{xz}\hat{x} - \omega I_{yz}\hat{y} + \omega I_{zz}\hat{z} \tag{14}$$

där $I_{xz} = \int xzdm = \frac{m}{L}\int_0^L l\sin\theta l\cos\theta dl + \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2} L\sin\theta L\cos\theta dy = \frac{4}{3}mL^2\sin\theta\cos\theta$, $I_{yz} = \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2} yzdy = 0$ och $I_{zz} = \int(x^2+y^2)dm = \frac{m}{L\sin\theta}\int_0^{L\sin\theta} x^2\sin^2\theta dx + \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2}(L^2\sin^2\theta + y^2)dy = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{4}{3}mL^2\sin^2\theta$. Insättning i uttrycket för rörelsemängdsmomentet ger nu samma resultat som ovan.

6 Genom att lösa rörelseekvationen för den dämpade svängningsrörelsen och sedan studera kvoten mellan uttrycken för utslagsvinkeln vid tiden $t = 0$ och $t = 47s$ kan vi ta fram storleken på c. Inför polära koordinater r, θ och sätt upp Newtons andra lag i $\hat{\theta}$-led:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - cl\dot{\theta}$$

För små vinklar ($\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$) fås ekvationen för en dämpad svängningsrörelse

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

där $\gamma = \frac{c}{2m\omega_0}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Lösningen ges utav

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}t + \delta)$$

där δ är en fasfaktor. Kvoten för detta uttryck vid tiden $t = 0$ och $t' = 47s$ är 2 (vinkeln då pendeln är i sitt vändläge är ju halverad efter $47s$) dvs

$$2 = \frac{\theta(0)}{\theta(t')} = \frac{A}{Ae^{-\gamma\omega_0 t'}}$$

Lösning av denna ekvation och insättning av givna värden $m = 0.70kg, t' = 47s$ ger

$$c = \frac{2m\ln 2}{t'} = 0.021kg/s$$

Tentamen i Mekanik för F, del B
Måndagen 20 oktober 2003, 14.15-18.15, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jourhavande assistent: Erik Flink, tel. 7723685

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar, utom på fråga 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Ange vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska! (12 poäng, dvs. 2 poäng för varje korrekt svar utöver 6)
    - ○ Om man vill att en raket som skjuts upp vertikalt skall uppnå så stor maximal hastighet som möjligt är det bäst att bränna bränslet snabbt (luftmotståndet kan försummas).
    - ○ Corioliskraften på en stadsbuss under normal körning överstiger aldrig 1 N.
    - ○ Rörelsemängdsmomentet m.a.p. en godtycklig punkt bevaras alltid av inre krafter i ett partikelsystem.
    - ○ Ett svagt dämpat/underdämpat system karaktäriseras av att tidsskalan för dissipation, dvs. energiförlust, är mindre än tidsskalan för den oscillatoriska rörelsen.
    - ○ En stel kropps rörelse kan delas upp i translationsrörelsen för en punkt på kroppen och rotation kring denna punkt endast då punkten väljs som masscentrums läge.
    - ○ Reguljär precessionsrörelse (dvs. med vinkeln theta konstant) är den mest allmänna typen av rörelse för en rotationssymmetrisk kropp utan påverkan av vridande moment.
    - ○ En homogen sfär och en homogen kub med samma densitet har båda tröghetsmatriser som är proportionella mot enhetsmatrisen, och reagerar därför exakt likadant på ett yttre vridande moment, om relationen mellan sfärens radie och kubens sida väljs på ett lämpligt sätt.
    - ○ Om en kropp i ett visst ögonblick roterar med en viss rotationsvektor och rörelsemängdsmomentet momentant är parallellt med rotationsvektorn kan man sluta sig till att de pekar längs en huvudtröghetsaxel.
    - ○ Centrifugalkraften är den kraft som åstadkommer centripetalaccelerationen.
    - ○ En luftmotståndskraft vid tredimensionell rörelse som är linjär i hastigheten kan skrivas **F**=-b|**v**|.
    - ○ Om en kraft verkar på en stel kropp men inte angriper i masscentrum eller längs en linje genom masscentrum blir kroppens acceleration mindre än F/m eftersom en del energi går åt till att sätta igång rotationsrörelse.
    - ○ Kinetisk energi för en stel kropp kan delas upp i translationsenergi och rotationsenergi, men endast om man betraktar translation av och rotation kring masscentrum.
2. En tunn rak homogen pinne med massan m och längden l är fritt upphängd i sin ena ände. Förutom tyngdkraften och krafterna i upphängningspunkten påverkas den av en luftmotståndskraft, som per längdenhet är proportionell mot hastigheten med proportionalitetskonstant c. För vilket värde på c är små svängningar kring jämviktsläget kritiskt dämpade? Betrakta endast plan rörelse. Glöm inte dimensionskontroll! (16 poäng)
3. a. En liten lastbil väger 2 ton utan last, och kan ta lika mycket i last. Den lastas med sand i farten, så att sanden kommer lodrätt ned ur ett rör med 200 kg/s medan lastbilen kör förbi med farten 1 m/s. Lastbilens flak är 7.5 m långt. Sanden förutsätts följa med lastbilens hastighet så snart den landat. Vilken effekt måste lastbilens motor utföra, förluster i transmission och friktion borträknade, om lastbilen skall hålla konstant hastighet under lastningen?
b. Samma lastbil lastar av sin last, under i övrigt identiska förhållanden, men lasten sugs upp i ett rör. Vilken effekt behövs då? (16 poäng)
4. När man svänger med en cykel måste man "kompensera för centrifugalkraften" genom att luta sig inåt i kurvan. Om man

dessutom tar hänsyn till att rotationsvektorn för cykelns hjul ändrar riktning, leder detta till att man måste luta sig mer eller mindre inåt än om bara centrifugalkraften funnits? Resonera först bara med riktningar hos rotationsvektorer, rörelsemängdsmoment och vridande moment. Gör sedan en grov uppskattning av storleksförhållandet mellan de två effekterna. (16 poäng)

Lösningar till tentamen i Mekanik för F del B

20 oktober 2003

1. Rätt rad är

   - Om man vill att en raket... S
   - Corioliskraften på en stadsbuss... F
   - Rörelsemängdsmomentet m.a.p. en godtycklig punkt... S
   - Ett svagt dämpat/underdämpat system... F
   - En stel kropps rörelse... F
   - Reguljär precessionsrörelse... S
   - En homogen sfär och en homogen kub... S
   - Om en kropp i ett visst ögonblick roterar... S
   - Centrifugalkraften är den kraft som åstadkommer centripetalaccelerationen... F
   - En luftmotståndskraft vid tredimensionell rörelse... F
   - Om en kraft verkar på en stel kropp... F
   - Kinetisk energi för en stel kropp... S

2. Kalla upphängningspunkten O och ställ upp momentekvationen kring denna. Både tyngdkraften och luftmotståndet ger upphov till vridande moment kring O:

$$-mg\frac{l}{2}\sin(\theta) - M_{\text{luft}} = I_O\ddot{\theta}, \tag{1}$$

där θ är vinkeln som pinnen bildar med vertikalen. För små θ så gäller att $\sin(\theta) \approx \theta$. Vi har även att $I_O = \frac{1}{3}ml^2$. Kraften per längdenhet på en viss del av pinnen, som ligger en sträcka s från O är $f = cs\dot{\theta}$. Det vridande momentet som luftmotståndet ger upphov till integreras fram enligt

$$M_{\text{luft}} = \int_0^l fsds = \int_0^l cs^2\dot{\theta}ds = \frac{1}{3}cl^3\dot{\theta}. \tag{2}$$

Momentekvationen kan nu skrivas som

$$\ddot{\theta} + \frac{cl}{m}\dot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0, \tag{3}$$

vilket ger följande karaktäristiska ekvation

$$r^2 + \frac{cl}{m}r + \frac{3g}{2l} = 0, \tag{4}$$

som har lösningarna

$$r = -\frac{cl}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2l^2}{4m^2} - \frac{3g}{2l}}. \tag{5}$$

Kritisk dämpning fås då vi har en dubbelrot, dvs då rotuttrycket försvinner, detta sker då

$$\frac{c^2l^2}{4m^2} - \frac{3g}{2l} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{\frac{6gm^2}{l^3}}, \tag{6}$$

där vi har förkastat den negativa lösningen av rimlighetsskäl. Vi noterar att c har dimensionen $\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$.

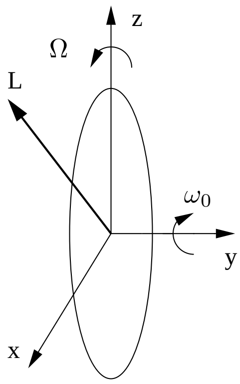
3. (a) Kalla massan av lastbil med last för $m(t)$ och dess fart för $v = 1\text{m/s}$. Massflödet är $m' = 200\text{kg/s}$ och vi inser att $\dot{m}(t) = m'$. Kalla drivkraften från motorn för F och ställ upp Newtons andra lag i lastbilens körriktning:

$$F = m\dot{v} + \dot{m}u, \tag{7}$$

men $\dot{v} = 0$, $\dot{m} = m'$ och den relativa hastigheten mellan lastbil och lasten i luften är $u = v$. Vi får alltså att $F = m'v$. Motoreffekten är $P = Fv = m'v^2 = 200\text{W}$.

(b) När lasten sugs upp från lastbilen bibehåller den sin fart i lastbilens körriktning tills den träffar uppsugningsröret. Därför är den relativa hastigheten $u = 0$, så $F = 0$ och därför är även motoreffekten $P = 0$.

4. För att rörelsemängdsmomentet kring tyngdpunkten för ett av cykelhjulen **L** ska ändra riktning behövs det ett vridande moment i den riktningen. Om man lägger ett koordinatsystem enligt figuren (där cykeln färdas i negativ x-led) och svänger åt vänster så kommer **L** att vrida sig kring z-azeln så att $\Delta\mathbf{L}$ pekar utmed positiva x-axeln. För att få ett vridande moment i positiv x-led kring hjulets tyngdpunkt måste man luta sig mer inåt kurvan. (Samma resultat fås om man svänger åt höger.)



För att göra en uppskattning av storleksförhållandet mellan gyroeffekten och centrifugalkraften ställer vi upp momentekvationen kring ett av hjulens mittpunkt.

$$\mathbf{M}_{\text{gyro}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}, \tag{8}$$

där $\mathbf{\Omega} = \Omega\hat{z}$ beskriver hur ett koordinatsystem bundet till hjulets huvudtröghetsaxlar roterar (precession). Den totala vinkelhastighetsvektorn för hjulet är summan av spinn och precession, dvs $\omega = \omega_0 + \mathbf{\Omega} = -\omega_0\hat{y} + \Omega\hat{z}$. Detta ger att hjulets rörelsemängdsmoment kring upphängningspunkten är $\mathbf{L} = I_{yy}\omega_0 + I_{zz}\mathbf{\Omega}$. Vi antar att både spinn och precession är konstanta till storlek så att tidsderivatan av rörelsemängdsmomentet relativt det roterande koordinatsystemet är noll. Momentekvationen ger då

$$\mathbf{M}_{\text{gyro}} = \mathbf{\Omega} \times (I_{yy}\omega_0 + I_{zz}\mathbf{\Omega}) = I_{yy}\mathbf{\Omega} \times \omega_0 = I_{yy}\Omega\omega_0\hat{x}. \tag{9}$$

En skaplig uppskattning av tröghetsmomentet för ett cykelhjul är $I_{yy} = mr^2$, där m är hjulets massa och r dess radie. Eftersom en cykel vanligtvis har två likadana hjul blir den totala gyroeffekten $\mathbf{M}_{\text{gyro tot}} = 2mr^2\Omega\omega_0\hat{x}$.

För att uppskatta effekten från centrifugalkraften antar vi att cyklisten svänger med svängningsradien R. Vi noterar att cyklistens fart kan tecknas på två sätt, $v = r\omega_0 = R\Omega$. Centrifugalkraften blir då

$$F_{\text{centrifugal}} = MR\Omega^2 = Mr\omega_0\Omega. \tag{10}$$

Denna kraft angriper i den gemensamma tyngdpunkten för cykel och cyklist, vi antar att denna ligger en sträcka h över marken. Om cyklisten lutar sig inåt kurvan med vinkeln θ relativt vertikalen finner vi att centrifugalkraften ger upphov till ett vridmoment

$$\mathbf{M}_{\text{centrifugal}} = -Mr\omega_0\Omega h\cos(\theta)\hat{x} \tag{11}$$

kring en axel som går genom de båda hjulens kontaktpunkter med marken. Vi finner således att

$$\frac{M_{\text{gyro tot}}}{M_{\text{centrifugal}}} = \frac{2rm}{Mh\cos(\theta)} \approx \frac{m}{M} \approx \frac{2\text{kg}}{80\text{kg}} = \frac{1}{40}, \tag{12}$$

där vi har antagit att $2r = h\cos(\theta)$, vilket borde stämma ganska bra. Vi ser att svaret är oberoende av hur fort man cyklar samt hur tvär kurva man tar. Dessutom finner vi att gyroeffekten är relativt liten i jämförelse med den fiktiva centrifugalkraften.

Tentamen i Mekanik för F, del B
Måndagen 12 januari 2004, 8.45-12.45, V-huset
Examinator och jour: Martin Cederwall, tel. 7723181, 0733-500886

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar, utom på fråga 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Ange vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska! (12 poäng, dvs. 2 poäng för varje korrekt svar utöver 6)

    En viskös dämpkraft är konservativ exakt då dämpningen är kritisk.

    Tidvattenkrafter kan sägas bero på att gravitationsfältet inte är konstant, och att de olika delarna av en (stel) kropp därför inte samtidigt kan vara i fritt fall.

    Rörelsemängden är alltid bevarad, och därför är rörelseekvationen för en kropp vars massa inte är konstant (dm/dt)v+m(dv/dt)=0 ("raketekvationen").

    Energin är alltid bevarad, och närvaron av en "icke-konservativ" kraft är ett uttryck för att energi omvandlas till former som inte kan hanteras i Newtonsk mekanik.

    Rörelsemängdsmomentet är alltid bevarat.

    Om en kropp i något (ortogonalt) koordinatsystem har samtliga deviationsmoment noll gäller detta i alla system.

    Om en kropp i något (ortogonalt) koordinatsystem har samtliga deviationsmoment noll och de tre tröghetsmomenten lika gäller detta i alla system.

    Hela jordens befolkning skulle få plats stående på Gotland.

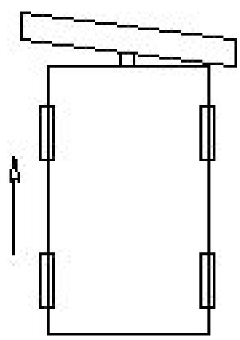
    En leksakssnurra, som utför reguljär precessionsrörelse under inverkan av tyngdkraften, precesserar långsammare på månen än på jorden.

    Alla ekvationer som styr tvådimensionell rotationsrörelse (rörelseekvation, uttryck för energi etc.) är helt analoga med ekvationerna för endimensionell translationsrörelse.

    Om man jämför oscillationsfrekvensen för en massa fäst via en fjäder i en vägg med den för samma situation där den fasta väggen är ersatt med en tung kropp, är den senare högre än den förra.

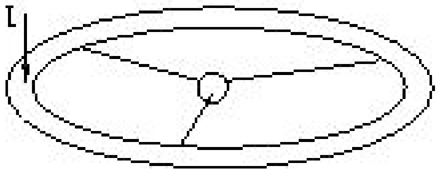
    Om två huvudtröghetsmoment är lika, är också varje axel i det plan som spänns av motsvarande huvudtröghetsaxlar en huvudtröghetsaxel med samma huvudtröghetsmoment.

2. En cylindrisk kropp med densitet lägre än vattens flyter så att axeln är vertikal.
    a. Bestäm jämviktsläget i vertikalled.
    b. Antag att vattenflödet då cylindern rör sig uppåt och nedåt är sådant att vattnets rörelseenergi är försumbar jämfört med cylinderns. Visa att cylindern under dessa förutsättningar utför harmonisk svängningsrörelse i vertikalled och bestäm svängningarnas vinkelfrekvens.
    c. Om det tidigare antagandet inte är riktigt, och man modellerar den dissipativa kraften som en liten konstant b gånger hastigheten, bestäm den typiska tidsskalan för dissipation. Vad exakt menas med att b är "liten"?
    (Alla svar skall uttryckas i termer av kroppens och vattnets densiteter samt kroppens dimensioner.) (16 poäng)



3. En snöplog röjer en väg med nyfallen snö. Snön är 50 cm djup och har en densitet på 150 kg/m^3. Plogbilen ser ut som skissat i figuren till höger och väger 4 ton. Bredden på skoveln framtill är 2.5 m. Snön som lämnar skoveln åt höger kan antas ha samma hastighet som plogen.
    a. Om plogbilen åker med den konstanta farten 10 m/s, vilken effekt behöver motorn utveckla (övriga förluster borträknade)?

b. Om motorn plötsligt slutar driva, hur låt hinner plogbilen innan dess fart har sjunkit till hälften (om man försummar rullfriktion, luftmotstånd etc.)?
c. Anser du att antagandet att andra dissipativa krafter är små i jämförelse är rimligt? (12 poäng)



4. En rymdstation är formad som en smal torus ("doughnut") enligt figuren. Dess radie är 100 m och dess massa 20 kiloton. Massan i öriga delar av rymdstationen är försumbar. Stationen roterar kring sin symmetriaxel så att den upplevda gravitationsaccelerationen vid periferin skall vara 0.75 g. Vid ett tillfälle skjuts en rymdfarkost ut från torusen i en riktning parallell med rotationsaxeln, vilket åstadkommer en impuls i motsatt riktning av storleken 10 kNs. Beskriv rymdstationens rotationsrörelse därefter i termer av spinn och precession! (20 poäng)

Lösningar till tentamen i Mekanik F del B 12 januari 2003

1. FSF SSF SSS SSS

2. Trycket på cylinderns bottenyta är $p = \rho_0 gx$ $[Nm^{-2} = (kgm^{-3})(ms^{-2})m]$, där ρ_0 är vattnets densitet och x avståndet från bottenytan till vattenytan. Lyftkraften är allstå $F_{\text{lyft}} = -\rho_0 gxA$, där A är cylinderns tvärsnittsarea, och minustecknet kommer av att jag väljer samma referensriktning för kraften som för läget x. Tyngdkraften är $F_g = mg = \rho Ahg$, där ρ är kroppens densitet och h cylinderns längd. Cylinderns rörelseekvation blir alltså

$$\rho Ah\ddot{x} = -\rho_0 Agx + \rho Agh = -\rho_0 Ag\left(x - \frac{\rho}{\rho_0}h\right)$$

Jämviktsläget är $x = x_0 = \frac{\rho}{\rho_0}h$ (verkar rimligt—en mycket lätt cylinder sjunker knappt ned alls, medan en som nästan har vattnets densitet är nästan helt nedsänkt). Definiera koordinaten y som är noll i jvktsläget: $y = x - x_0$. Rörelseekvationen blir

$$\ddot{y} + \frac{\rho_0}{\rho}\frac{g}{h}y = 0$$

varur vinkelfrekvensen avläses: $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\frac{g}{h}}$. Dimensionerna är uppenbara.

Om det dessutom finns en dämpkraft blir ekvationen

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

där $\gamma = \frac{b}{2\rho Ah}$. Den karakteristiska ekvationen, $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$, har lösningar $r = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, och man får svagt dämpade svängningar som avtar exponentiellt på en tidsskala γ^{-1}. Påståendet "b är liten" betyder att $\gamma << \omega_0$.

Dimensionskontroll: $[\gamma^{-1}] = [\rho Ahb^{-1}] = kgm^{-3}m^3(Nsm^{-1})^{-1} = s$.

3. Plogens hastighet: $v = 10m/s$, snöns densitet $\rho = 150kg/m^3$, plogens tvärsnittsarea: $A = 2.5 \times .5 = 1.25m^2$.

Massa snö per tidsenhet som accelereras från vila till hastigheten v: $\dot{m} = \rho Av$. Impulsökning per tidsenhet = kraft: $F = \dot{m}v = \rho Av^2$ (vad som händer med snön efter den har lämnat skoveln spelar ingen roll). Effekten är $P = Fv = \rho Av^3$.

Numeriskt: $P = 150 \times 1.25 \times 1000 \approx .2MW$.

Dimensionskontroll (enheter): $[\rho Av^3] = kgm^{-3} \times m^2 \times (ms^{-1})^3 = kgm^2s^{-1} = W$.

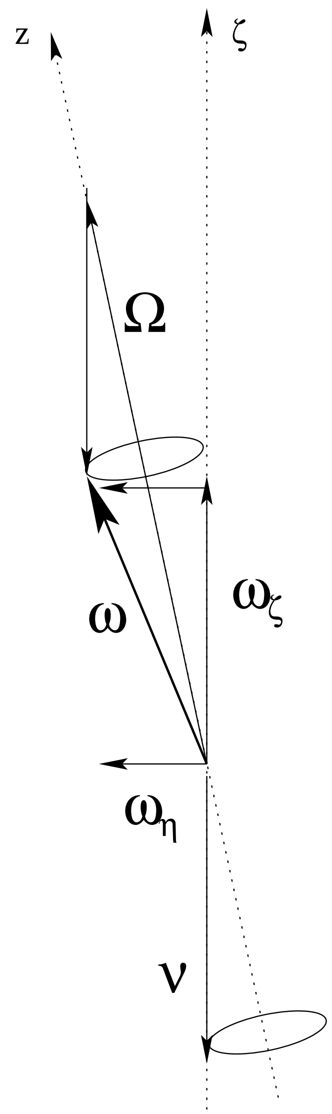
Om motorn slutar driva vid $x = 0$, $v = v_0$, är $ma = mv\frac{dv}{dx} = -\rho A v^2$, med lösningen $v = v_0 e^{-\frac{\rho A}{m}x}$. Hastigheten sjunker till hälften efter sträckan $x = \frac{m}{\rho A}\log 2 \approx 15m$ (rimlighet: efter denna sträcka är massan hos den bortröjda snön jämförbar med bilens massa). En bil som börjar rulla med $10m/s$ tar normalt mycket längre sträcka för att tappa en stor del av sin fart, så det är nog inte helt orimligt att kasta andra motståndskrafter...

4. Beteckna koordinatriktningar anpassade till rymdstationen med ξ, η, ζ, där ζ-axeln ligger längs symmetriaxeln. Rymdstationen har tröghetsmoment $I_\zeta = mR^2$ med avseende på sin symmetriaxel och $I_\perp = \frac{1}{2}mR^2$ med avseende på axlar vinkelräta mot symmetriaxeln. Före stöten har den ett rörelsemängdsmoment $\mathbb{L}_0 = I_\zeta\omega_0$, där ω_0 är rotationshastigheten. Denna bestäms av den effektiva tyngaccelerationen $\tilde{g} = .75g = R\omega_0^2$. Numeriskt är $\omega_0 \approx .27s^{-1}$, $L_0 \approx 5.4 \times 10^{10} kgm^2s^{-1}$.

Impulsen $\mathbb{I}$ verkar enligt figuren i uppgiften. I vårt koordinatsystem är $\mathbb{I} = -I\hat{\zeta}$. Låt ξ-axeln gå genom angreppspunkten. Då fås ändringen i rörelsemängdsmoment $\Delta\mathbb{L} = R\hat{\xi} \times \mathbb{I} = RI\hat{\eta}$. Numeriskt är denna ändring till beloppet mycket mindre än L_0, $\frac{|\Delta\mathbb{L}|}{L_0} \approx 1.8 \times 10^{-5}$. Kalla detta lilla tal för α.

Rörelsemängdsmomentet efter stöten är $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 + \Delta\mathbb{L} = L_0(\hat{\zeta} + \alpha\hat{\eta})$. Eftersom det inte finns några vridande moment kommer $\mathbb{L}$ att förbli konstant. Den definierar en rumsfix riktning $\hat{z}$ som rotationsvektorn kommer att precessera kring. Rotationsvektorn $\vec{\omega}$ omedelbart efter stöten fås från $\mathbb{L} = I_\zeta\omega_\zeta + I_\perp\omega_\eta$, så $\vec{\omega} = \omega_0(\hat{\zeta} + 2\alpha\hat{\eta})$. Om man istället sönderlägger $\vec{\omega}$ i en del längs $\hat{\zeta}$ (spinn) och en längs $\hat{z} = (1+\alpha^2)^{-1/2}(\hat{\zeta} + \alpha\hat{z})$ (precession), så får man $\vec{\omega} = \nu\hat{\zeta} + \Omega\hat{z}$, där $\nu = -\omega_0$ och $\Omega = 2\sqrt{1+\alpha^2}\omega_0 \approx 2\omega_0$.

På nästa sida finns en bild som visar ungefär hur det ser ut, om man förstorar upp vinkeln mellan $\hat{z}$ och $\hat{\zeta}$, som ju är ungefär α mätt i radianer. Spinnvektorn är nästan precis motriktad precessionsvektorn och hälften så lång som den. Spinnvektorn, liksom alltså totala rotationsvektorn, precesserar runt Ω som visat i figuren. Rymdstationens plan är hela tiden vinkelrätt mot spinnvektorn. Effekten är en mycket liten variation hos $\vec{\omega}$, och alltså en mycket liten "wobblande" rörelse hos rymdstationen.



/Martin Cederwall 11 januari 2004

Tentamen i Mekanik för F, del B
Tisdagen 17 augusti 2004, 8.45-12.45, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Ling Bao, tel. 7723184

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar, utom på fråga 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Svara på följande fem frågor. Endast svar skall ges. (15 poäng — 3 poäng per korrekt besvarad deluppgift)

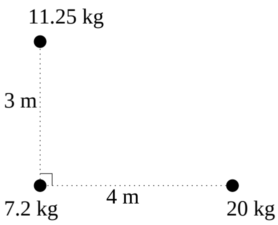
   a. Ange SI-enheterna för effekt och för rörelsemängdsmoment uttryckta i grundenheterna kilogram, meter och sekund.

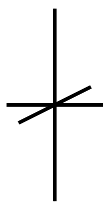
   b. Två fjädrar har fjäderkonstanterna k_1 och k_2. Ange den totala fjäderkonstanten när fjädrarna (i) "seriekopplas" respektive (ii) "parallellkopplas".

   c. Ett tåg går med farten 200 km/h i en kurva med krökningsradien 2 km. Hur stor vinkel skall tåget luta för att passagerarna skall uppleva det som "horisontellt"?

   d. En stel kropp består av en homogen sfär med massan m och radien r samt en tunn ring med massan m placerad längs sfärens ekvator ($z = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$). Skriv ned tröghetsmomenten m.a.p. x-, y- och z-axlarna samt alla deviationsmoment.

   e. Tre punktmassor är placerade och har massor enligt figuren nedan till vänster. Ange samtliga gravitationskrafter med vilka massorna påverkar varandra, till storlek och riktning. Rita! (Newtons gravitationskonstant är $G \approx 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$.)

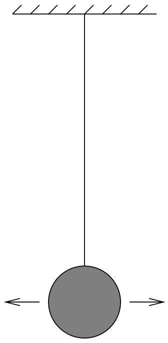




2. En stel kropp är uppbyggd av tunna pinnar med densiteten ρ (massa/längdenhet). Två av pinnarna har längden l och den tredje längden $2l$. De är sammanfogade vinkelrätt mot varandra i mittpunkterna (se figuren ovan). Man vill använda kroppen som en "leksakssnurra". Den ena änden av den längre pinnen är i friktionsfri kontakt med ett glatt horisontellt bord, och lutar en vinkel θ mot vertikallinjen. Om man antar att snurrans rörelse är sådan att θ är konstant i tiden (reguljär precessionsrörelse), sök sambandet mellan spinnet ν och precessionshastigheten Ω i termer av givna storheter. Beskriv också masscentrums rörelse. Luftmotståndet kan försummas. (I denna uppgift är det inte tillåtet att använda någon färdig formel för precessionsrörelsen, utan sådana måste härledas från "$\dot{\mathbb{L}} = \mathbb{M}$".) (20 poäng)

3. Pendeln i ett pendelur består av en tunn cylindrisk pinne med längden 400 mm och radien 1.0 mm, samt en cylindrisk skiva med radien 40 mm och tjockleken 5.0 mm vars masscentrum är stelt fäst i pinnens ände. Båda pendelns delar är av järn, med densiteten 7.87 kg/dm^3. Pendeln påverkas av en litet bromsande vridande moment p.g.a. dess luftmotstånd, som är proportionellt mot vinkelhastigheten med en proportionalitetskonstant 1.0×10^{-5} kg m^{2}s^{-1}. Om uret fick gå i ett lufttomt rum, hur många sekunder för fort skulle det gå per dygn? Pendeln antas utföra små svängningar.

   (Alla räkningar får göras utan hänsyn till att urets mekanik påverkar pendeln. Utan inverkan från urets fjäder skulle pendelns rörelse avstanna. I det här problemet får man räkna med att periodtiden för en svängning förändras av luftmotståndet, men strunta i att amplituden skulle minska med tiden. Resultatet får därför tas som en uppskattning. Om man vill förenkla uppgiften med väl motiverade approximationer är det därför tillåtet.) (15 poäng)



4. Ett isberg som väger 10^{11} kg skall bogseras från Antarktis till nordligare breddgrader. Frågan gäller bogserlinans vinkel mot färdriktningen.

   För att kunna uppskatta vattenmotståndet på isberget kan vi approximera det med en sfär, och försumma det faktum att en liten del av det sticker upp över ytan. Densiteten kan sättas till 10^3 kg/m^3. Vattenmotståndet beter sig olika för laminärt och för turbulent flöde. Vilket som gäller bestäms av Reynoldstalet, $Re = \frac{\rho d v}{\eta}$, där ρ är vattnets densitet, d föremålets typiska diameter, v dess fart och $\eta \approx 1.5 \times 10^{-3}$ kg/(ms) vattnets viskositet. För Reynoldstal mindre än c:a 30 har man laminär strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten enligt $F \approx 6\pi\eta r v$ där r är sfärens radie. För Reynoldstal från c:a 10^3 och uppåt har man turbulent strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten i kvadrat enligt $F \approx \frac{1}{2}\rho C_d A v^2$, där A är föremålets tvärsnittsarea och C_d en formfaktor som för en sfär är ungefär 0.5.

   Bestäm, ungefärligen, vilken vinkel bogserlinan bildar med färdriktningen, om isberget bogseras med farten 2 m/s i rakt nordlig riktning och befinner sig på 45° sydlig bredd. Ange också riktning, dvs. om isberget kommer att färdas öster eller väster om bogserbåten. (10 poäng)

Mekanik för F del B

17 augusti 2004

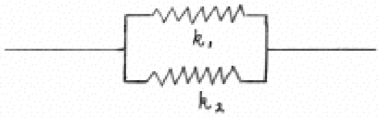
1. a. Effekt : $[P] = \frac{Nm}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$

Rörelsemängdsmoment : $[L] = \frac{kg \cdot m^2}{s}$

b. i.

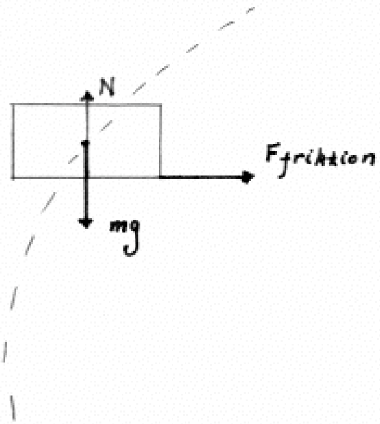
$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

ii.



$$k = k_1 + k_2$$

c.



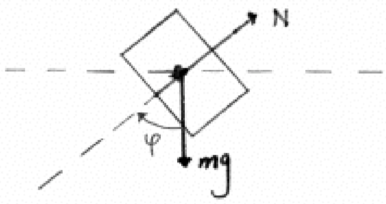
Använd cylindriska koordinater :

$$m\vec{a} = m\{(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (\cancel{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}\}$$

$$= \vec{F}$$

$$\Rightarrow \quad mr\dot{\theta}^2\hat{r} = -\vec{F} = +F_{friktion}\,\hat{r}$$

Låt tåget luta så att man känner som "horisontellt" :



$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\begin{cases} mg = N\cos\varphi \\ mr\dot{\theta}^2 = N\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{v^2}{rg}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) = 8{,}94°$$

d. Homogen sfär

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$$

Tunn ring

$$I_{xx} = mr^2$$

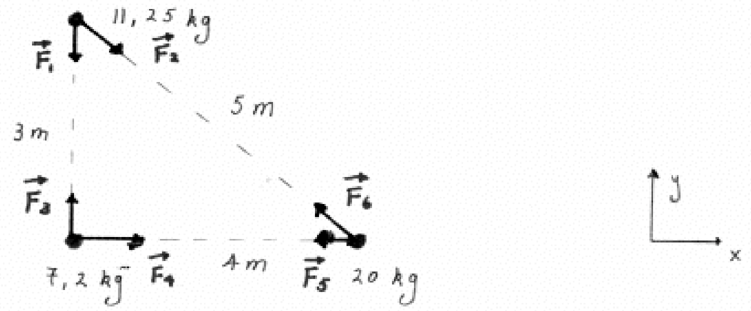
$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 \qquad \left(I_{yy} = \int_0^{2\pi} (r\sin\theta)^2 \frac{m}{2\pi}\, d\theta \right)$$

Summan

Alla deviationsmoment försvinner eftersom kroppens symmetriaxlar sammanfaller med de valda koordinataxlarna.

$$I = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} m r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{6} m r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} m r^2 \end{bmatrix}$$

e.



$$\vec{F}_1 = \frac{G \cdot 11,25 \cdot 7,2}{3^2} (-\hat{y}) = -6,00 \cdot 10^{-10} \hat{y} \quad N$$

$$\vec{F}_2 = \frac{G \cdot 11,25 \cdot 20}{5^2} \cdot \frac{4\hat{x} - 3\hat{y}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4,80 \cdot 10^{-10} \hat{x} - 3,60 \cdot 10^{-10} \hat{y} \quad N$$

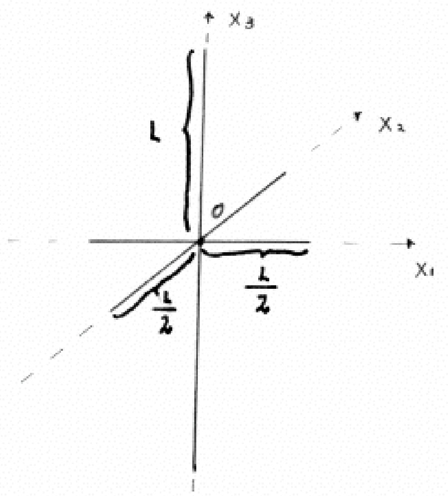
$$\vec{F}_3 = 6,00 \cdot 10^{-10} \hat{y} = -\vec{F}_1 \quad N$$

$$\vec{F}_4 = \frac{G \cdot 7,2 \cdot 20}{4^2} \hat{x} = 6,00 \cdot 10^{-10} \hat{x} \quad N$$

$$\vec{F}_5 = -6,00 \cdot 10^{-10} \hat{x} = -\vec{F}_4 \quad N$$

$$\vec{F}_6 = -\vec{F}_2 = -4,80 \cdot 10^{-10} \hat{x} + 3,60 \cdot 10^{-10} \hat{y} \quad N$$

2.



densitet ρ , $m = 4 \rho L$

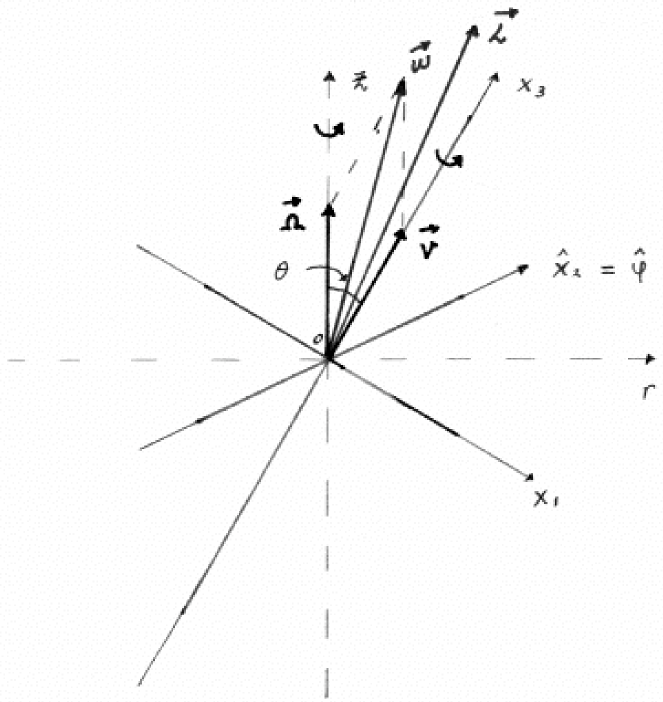
Underlaget är friktionsfritt.

Eftersom underlaget är friktionsfritt, kommer kroppens kontaktpunkten med bordet att röra sig, medan dess masscentrum befinner sig i vila.

Beräkna kroppens tröghetsmoment m.a.p. masscentrum O.

$$\begin{cases} I_1 = 0 + \frac{1}{12}\frac{m}{4}L^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{2}(2L)^2 = \frac{3}{16} m L^2 \\ I_2 = \frac{1}{12}\frac{m}{4}L^2 + 0 + \frac{4}{12}\frac{m}{2}L^2 = \frac{3}{16} m L^2 \\ I_3 = \frac{1}{12}\frac{m}{4}L^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{4}L^2 + 0 = \frac{1}{24} m L^2 \end{cases}$$

$$I = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} m l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{12} m l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} m l^2 \end{bmatrix}$$



låt $I_\perp = I_1 = I_2 = \frac{5}{12} m l^2$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{x}_1 + \omega_2 \hat{x}_2 + \omega_3 \hat{x}_3 = \Omega \hat{z} + \nu \hat{x}_3$$

$$\vec{l} = I \vec{\omega} = I_1 \omega_1 \hat{x}_1 + I_2 \omega_2 \hat{x}_2 + I_3 \omega_3 \hat{x}_3$$

$$= I_\perp \vec{\omega} + (I_3 - I_\perp) \omega_3 \hat{x}_3$$

$$= I_\perp (\Omega \hat{z} + \nu \hat{x}_3) + (I_3 - I_\perp) \omega_3 \hat{x}_3$$

$$\omega_3 = \vec{\omega} \cdot \hat{x}_3 = \Omega \hat{z} \cdot \hat{x}_3 + \nu = \Omega \cos\theta + \nu$$

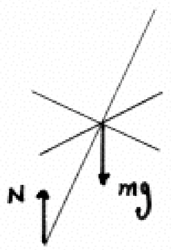
$$\Rightarrow \vec{l} = I_\perp \Omega \hat{z} + [I_\perp \nu + (I_3 - I_\perp)(\Omega \cos\theta + \nu)] \hat{x}_3$$

$$= I_\perp \Omega \hat{z} + [I_3 \nu + (I_3 - I_\perp) \Omega \cos\theta] \hat{x}_3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{l} = [I_3 \nu + (I_3 - I_\perp) \Omega \cos\theta] \frac{d\hat{x}_3}{dt} ,$$

där $\frac{d\hat{x}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}_3 = (\Omega \hat{z} + \nu \hat{x}_3) \times \hat{x}_3 = \Omega \sin\theta \, \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{l} = [I_3 \nu + (I_3 - I_\perp) \Omega \cos\theta] \Omega \sin\theta \, \hat{\varphi}$$



Normalkraften : $N = mg \quad \Rightarrow \vec{N} = mg \hat{z}$

Massan : $m = \rho \cdot (l + l + 2l) = 4 \rho l$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{x} \times \vec{F} = (-l \hat{x}_3) \times mg \hat{z} = mgl \sin\theta \, \hat{\varphi}$

(m.a.p. masscentrum 0)

Rörelsemängdsmomentlagen : $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$

$$[\, I_3 \nu + (I_3 - I_\perp)\,\Omega \cos\theta \,]\,\Omega \sin\theta = mgl \sin\theta$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{I_3 \Omega}[\,(I_\perp - I_3)\,\Omega^2 \cos\theta + mgl\,]$$

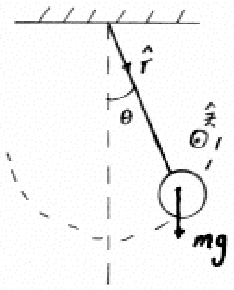
$$= \frac{6}{\Omega m l^2}\left[\,\frac{1}{4} m l^2 \,\Omega^2 \cos\theta + mgl\,\right]$$

$$= \frac{3\Omega\cos\theta}{2} + \frac{6g}{\Omega l}$$

Svar : $\nu = \frac{3\Omega\cos\theta}{2} + \frac{6g}{\Omega l}$

Kroppens masscentrum står stilla.

3.



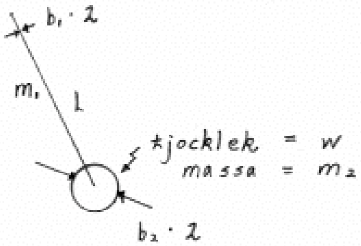
Pendelns massa : $m = \rho V = 0{,}208$ kg

Pendelns masscentrum :

$$\vec{R}_{mc} = \frac{1}{m}\left(m_1 \frac{l}{2} + m_2 l\right)\hat{r} = \frac{l}{m_1 + m_2}\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)\hat{r}$$

$m_1 = 0{,}0099$ kg ; $m_2 = 0{,}198$ kg

$m_1 \ll m_2$ $\quad$ { Kan approximera bort pinnen här ! }



$$\vec{R}_{mc} \approx 0{,}98\, l\, \hat{r} = R_{mc}\,\hat{r}$$

Pendels tröghetsmoment m.a.p. upphängningspunkten :

$$I = I_{pinne} + I_{vikt} = \left(\frac{1}{4} m_1 b_1^2 + \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} m_2 b_2^2 + m_2 l^2\right)$$

$$\approx 0{,}033 \text{ kg m}^2$$

{ Här kan man approximera pendeln med en punktmassa : $I \approx m_2 l^2$. }

$$\begin{cases} \vec{L} = I\vec{\omega} = I\dot{\theta}\,\hat{z} \\ \vec{\tau} = \underbrace{-R_{mc} \cdot mg \sin\theta\, \hat{z}}_{\text{gravitation}} \underbrace{- \mu\dot{\theta}\,\hat{z}}_{\text{luftmotstånd}} \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$$

$$I\ddot{\theta} = -R_{mc}\, mg \sin\theta - \mu\dot{\theta} \quad , \quad \theta \text{ små} \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mu}{I}\dot{\theta} + \frac{R_{mc}\, mg}{I}\theta = 0$$

Låt $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_{mc}\, mg}{I}} \quad$ Pendels frekvens i vakuum

$\gamma = \frac{\mu}{2I}$

$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + B)$

där $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Skillnad i antal sekunder per dygn :

$$\Delta T = \left(\frac{3600 \cdot 24}{2\pi}\omega_0\right) \cdot \frac{2\pi}{\omega} - 3600 \cdot 24$$

$$= 86400\left(\frac{\omega_0}{\omega} - 1\right) = 86400\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}} - 1\right)$$

$$= 86400\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4IR_{mc}mg}}} - 1\right)$$

$$\approx 0{,}000041 \text{ s}$$

<u>Svar</u>: Om uret skulle stå i ett vakuum skulle det

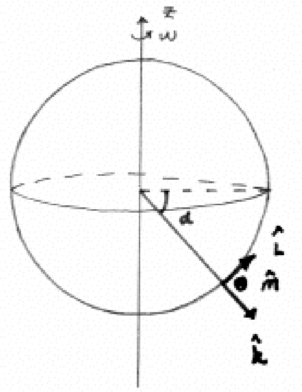
gå 0,000041 s för fort per dygn.

4. $\quad m = 10^{11}$ kg , $\rho = 10^3$ kg/m^3 $\Rightarrow$ $V = 10^8$ m^3 , $R = 288$ m

$v_r = 2$ m/s i rakt nordlig riktning ; $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ kg/ms

$\Rightarrow Re = \frac{\rho \cdot 2R \cdot v_r}{\eta} \approx 7{,}7 \cdot 10^8 \quad \Rightarrow$ turbulent strömnig

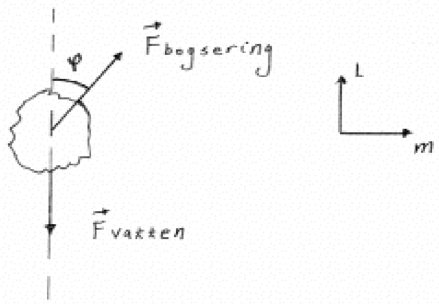
Inför ett koordinatsystem som roterar med jorden.



$\hat{k}$: ⊥ jordytan

$\hat{l}$: norrut $\qquad \hat{z} = \cos\alpha\,\hat{l} - \sin\alpha\,\hat{k}$

$\hat{m}$: österut



Dessutom påverkas isberget av coriolikraften och centrifugalkraften. Då isberget rör sig med konstant hastighet norrut, måste det råda kraftjämvikt på lm-planet. ($\ddot{l} = \ddot{m} = 0$)

$$\vec{F}_{bogsering} = F_b (\cos\varphi \, \hat{l} + \sin\varphi \, \hat{m})$$

$$\vec{F}_{vatten} = -\frac{1}{2}\rho C_d A V_r^2 \, \hat{l}$$ (turbulent flöde)

$$\vec{F}_{coriolis} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}) = -2m(\omega\hat{z}) \times (V_r \hat{l})$$

$$= -2m\omega V_r (\cos\alpha \, \hat{l} - \sin\alpha \, \hat{k}) \times \hat{l} = -2m\omega V_r \sin\alpha \, \hat{m}$$

$$\vec{F}_{centrifugal} = -2m \, \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= -2m(\omega\hat{z}) \times [(\omega\hat{z}) \times (l\,\hat{l})]$$

$$= -2m\omega^2 l \, \hat{z} \times [(\cos\alpha \, \hat{l} - \sin\alpha \, \hat{k}) \times \hat{l}]$$

$$= -2m\omega^2 l \, (\cos\alpha \, \hat{l} - \sin\alpha \, \hat{k}) \times (\sin\alpha \, \hat{m})$$

$$= 2m\omega^2 l \sin\alpha \, (\cos\alpha \, \hat{k} + \sin\alpha \, \hat{l})$$

Jämvikt i l-led: $F_b \cos\varphi - \frac{1}{2}\rho C_d A V_r^2 + 2m\omega^2 l \sin^2\alpha = 0$

Jämvikt i m-led: $F_b \sin\varphi - 2m\omega V_r \sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_b \sin\varphi = 2m\omega V_r \sin\alpha \\ F_b \cos\varphi = \frac{1}{2}\rho C_d A V_r^2 - 2m\omega^2 l \sin^2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{2m\omega V_r \sin\alpha}{\frac{1}{2}\rho C_d A V_r^2 - 2m\omega^2 l \sin^2\alpha}$$

Sätt in: $m = 10^{11}$ kg ; $\omega = \frac{2\pi}{3600 \cdot 24}$ s^{-1} ; $V_r = 2$ m/s ; $\alpha = 45°$

$\rho = 10^3$ kg/m^3 ; $C_d = 0,5$; $A = 260000$ m^2 ; $l = 0$

$\tan\varphi \approx 0,079 \Rightarrow \varphi \approx 4,515°$

$$\vec{F}_{bogsering} = F_b (0,997 \, \hat{l} + 0,079 \, \hat{m})$$

<u>Svar</u>: $\varphi = 4,515°$

Isberget kommer att färdas väster om bogserbåten.

Tentamen i Mekanik för F, del B
Måndagen 18 oktober 2004, 14.00-18.00, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: NN, tel. 772xxxx

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Nedan ges tre exempel på resultat från uträkningar i mekanikproblem. Beskriv för vart och ett av dem hur en rutinmässig kontroll visar att svaret är felaktigt. Föreslå för vart och ett av resultaten en enkel förändring som gör det rimligt. (12 poäng — 4 poäng per korrekt besvarad deluppgift)

   a. Vid en uträkning av tröghetsmatrisen för ett homogent rätblock med sidorna a, b och c m.a.p. masscentrum i ett koordinatsystem där koordinataxlarna är parallella med rätblockets sidor fås resultatet

$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}(b^2+2c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}(c^2+2a^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}(a^2+2b^2) \end{bmatrix} \quad .$$

   b. Man vill räkna ut vilken lutning en stege kan ha utan att glida mot golvet. En person står mitt på stegen. Friktionskoefficienten mellan stege och golv är μ och mellan stege och vägg noll. Resultatet blir att vinkeln α mellan stege och golv måste vara större än α_0, där $\tan\alpha_0 = 2\mu$.

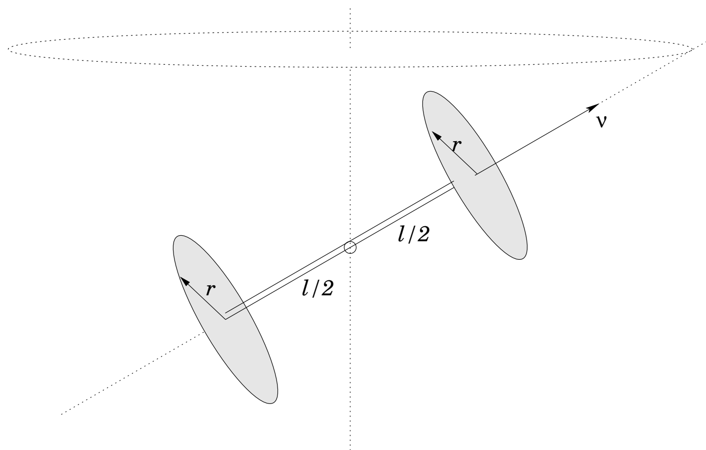
   c. Man vill beräkna storleken på en väteatom. I Schrödingerekvationen som beskriver elektronens vågfunktion kring protonen ingår konstanterna $\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34}\,Js$ (Plancks konstant), $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}\,C^2/(Nm^2)$ (dielektricitetskonstanten i vacuum), $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31}\,kg$ (elektronmassan) och $e \approx 1.60 \times 10^{-19}\,C$ (elektronladdningen). Resultatet blir att atomens ungefärliga radie är

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e} \quad .$$

2. En dörr väger 30 kg, är 100 cm bred och 210 cm hög. Den skall utrustas med en stängningsmekanism, och konstruktören tänker sig en dörrstängare som ger ett återförande moment som är proportionellt mot öppningsvinkeln med proportionalitetskonstant κ och ett dämpande moment som är proportionellt mot vinkelhastigheten med proportionalitetskonstant γ. Han kommer fram till att dämpningen bör vara ungefärligen kritisk. Ge, och motivera, ytterligare något villkor och bestäm lämpliga numeriska värden på κ och γ. Gör någon ytterligare kontroll på att de värden du kommit fram till inte är helt olämpliga. (14 poäng)

3. En kropp som släpps från vila från t.ex. toppen av en hög byggnad kommer inte att falla helt lodrätt (lodrätt definieras av den riktning en lodlina hänger), utan avvika litet från lodlinjen. Hur mycket, och åt vilket håll? Är denna effekt mätbar? (Hjälp: lösningen av rörelseekvationen förenklas om man antar att avvikelsen är mycket liten, så liten att rörelsen i vertikalled nästan inte alls påverkas, man kan alltså fortfarande använda "$z = h - \frac{1}{2}gt^2$". Man kan också strunta i luftmotstånd.) (14 poäng)

4.



En stel kropp består av två homogena cirkelskivor, vardera med massan m och radien r, som är sammanfogade med en lätt pinne med längden l. Pinnen är fäst vinkelrätt mot skivorna i deras mittpunkter. Kroppen är momentfritt upphängd i sitt masscentrum (pinnens mittpunkt). Frågan gäller vilken sorts precessionsrörelse kroppen kan utföra. Låt spinnvektorn $\vec{\nu}$, som pekar längs kroppens symmetriaxel, bilda en konstant vinkel θ mot en rumsfix axel och precessera runt den (man kan tänka på den rumsfixa axeln som vertikal, men eftersom tyngdkraften inte spelar in kan det vara vilken axel som helst). Undersök, för alla möjliga värden på parametrarna i problemet, åt vilket håll precessionsrörelsen sker, moturs eller medurs sett uppifrån i figuren, dvs. om precessionsvektorn pekar uppåt eller nedåt i figuren. (En lösning som bygger på avläsning av en "formel" accepteras inte, utan det krävs ett resonemang kring rotationsvektorer, rörelsemängdsmoment osv.) (20 poäng)

Tentamen i Mekanik för F, del B
Måndagen 10 januari 2005, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Ludvig Lizana, tel. 7723187

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Nedan ges tre exempel på resultat från uträkningar i mekanikproblem. Beskriv för vart och ett av dem hur en rutinmässig kontroll visar att svaret är felaktigt. Föreslå för vart och ett av resultaten en enkel förändring som gör det rimligt. Observera att det inte frågas efter en lösning av uppgifterna, och att en sådan utan ovanstående element inte premieras. (12 poäng — 4 poäng per korrekt besvarad deluppgift)

   a. Man räknar ut hur avståndet s mellan två massor m_1 och m_2 (som bara kan röra sig längs en rät linje) ändras med tiden då massorna attraherar varandra med den elektrostatiska kraften $F(s) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^2}$, och erhåller under räkningen differentialekvationen $\ddot{s} = -\frac{F(s)}{\mu}$, där $\mu = \frac{m_1 m_2}{|m_1 - m_2|}$.

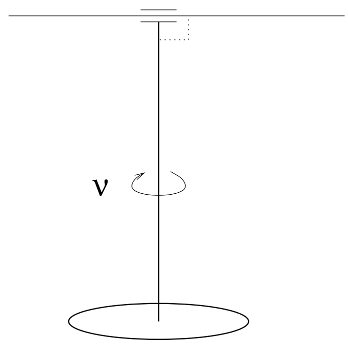
   b. En rymdstation består av tre likadana homogena rör böjda i cirkelform (torusar) och sammansatta så att de bildar rät vinkel mot varandra (t.ex. kan man beskriva ett av rörens mittlinjer som kurvan $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, $\zeta = 0$, och de andra med permutationer av de kroppsfixa koordinaterna (ξ, η, ζ) som bildar ett ortonormalt system). Man vill räkna ut hur stationen beter sig efter det att en farkost har skjutits ut från den, vilket resulterar i en impuls samt ett impulsmoment m.a.p. stationens masscentrum. Man finner att stationens rotationsvektor bildar vinkeln 5° mot rörelsemängdsmomentet, och utför en precessionsrörelse runt denna.

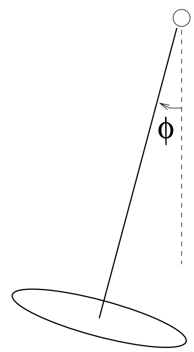
   c. Man vill uppskatta planckländgden ℓ_P, den fundamentala längdskalan i kvantgravitation, och använder naturkonstanterna c (ljushastigheten), G (Newtons gravitationskonstant) och $\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34}\, Js$ (Plancks konstant). Resultatet blir $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$.

2. En partikel utför endimensionell rörelse, och är utsatt för en återförande fjäderkraft samt en linjär dämpkraft så att dämpningen är kritisk. Vid rörelse under samma fjäderkraft men utan dämpning är vinkelfrekvensen för partikelns oscillationer ω_0. Vilket/vilka villkor skall begynnelseläget och begynnelsehastigheten vid tiden 0 uppfylla för att partikeln vid någon tidpunkt $0 < t < \infty$ skall passera jämviktsläget? Hur många gånger kan den göra det? (16 poäng)

3. En kropp som kan röra sig (friktionsfritt) på ytan av en roterande sfär, t.ex. jorden, rör sig i en cirkelbana relativt ytan. Detta gäller sålänge breddgraden förblir ungefär densamma under hela rörelsen. Beräkna radien för en sådan rörelse, uttryckt i fart, jordens rotationshastighet samt breddgraden. Använd uttrycket för att, väldigt grovt, uppskatta storleken på ett roterande vädersystem, utgående från rimliga vindhastigheter. (16 poäng)

4.





En rotationssymmetrisk kropp är upphängd i en punkt så att den kan rotera kring sin egen axel, samtidigt som axeln kan röra sig endast i ett vertikalt plan (pendelrörelse). Se figuren, där den högra bilden är sedd från höger i den vänstra. Figuren skall inte tolkas som en beskrivning av kroppens geometri, utöver rotationssymmetrin. Kroppen rör sig under inverkan endast av tyngdkrafter samt krafter i upphängningen, all friktion kan försummas. Låt kroppens rotationshastighet runt sin symmetriaxel vara ν, och vinkeln som symmetriaxeln bildar med vertikalen vara ϕ.

Kommer ν att vara konstant under rörelsen?

Skiljer sig ϕ:s tidsberoende hos en sådan här pendel från det hos en pendel som inte spinner?

Beräkna, till storlek och riktning, det vridande momentet på kroppen från upphängningsanordningen, som funktion av ϕ och lämpliga införda konstanter. (16 poäng)

Lösning till Tentamen mekFB 050110

1. a. Om massorna är lika ($m_1 \to m_2$) medför det att $\mu \to \infty$ samt att accelerationen $\ddot{s} \to 0$ vilket är orimligt. Genom att ställa upp netwons andra lag för systemet erhålls samma differentialekavation $\ddot{s} = -\frac{F(s)}{\mu}$ men med $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ vilket är den reducerade massan.

   b. Rymdstationen består av tre torusar (cykelslangar eller munkar) som alla är vinkelräta mot varandra. Ett sätt att visualisera stationen är att sätta ihop tre ortogonala stänger (ξ, η, ζ) och därefter hänga på de tre torusarna på var sin stång. På så sätt blir även de vinkelräta mot varandra. När rymdfarkosten lämnar stationen får stationen en impulssörelse $\vec{p}$ m.a.p på masscentrum samt en rotationsrörelse $\vec{\omega}$ runt masscentrum, där $\vec{\omega}$ och $\vec{p}$ är vinkelräta mot varandra. Då kroppen är sfärisk symmetrisk kommer dessutom rörelsemängdsmomentet $\vec{L}$ och rotationen $\vec{w}$ att peka i samma rikting. Stationen kommer därför inte att precessera. Däremot, om kroppen *inte* varit sfärisk symmetrisk hade den mycket väl kunnat precessera då $\vec{L}$ och $\vec{w}$ inte nödvändigtvis är parallella.

   c. Enhetsanalys: $\ell_p \sim [m]$ och $\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \sim [s]$. För att dimensionen skall stämma krävs ett extra [m/s] dvs c. Rätt svar är alltså

$$\ell_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim [m]. \tag{1}$$

2. Rörelseekvation för systemet:

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{2}$$

   Karakteristisk ekvation:

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \tag{3}$$

   Kristisk dämpning:

$$\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = -\frac{\gamma}{2} \tag{4}$$

   Lösning:

$$x(t) = e^{-t/\tau}\,(A + Bt) \tag{5}$$

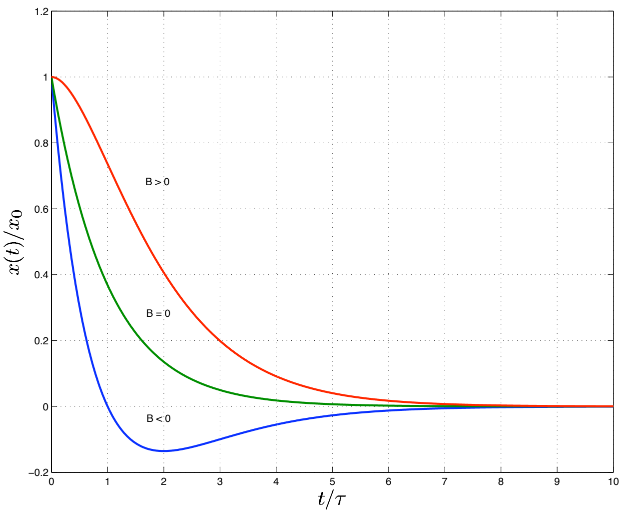
   där $\tau = 2/\gamma$. Låt origo vara partikelns jämviktsläge. Vid tiden $t = 0$ är den förflyttad en sträcka $x_0 > 0$ från den punkten samt att den har en hastighet $v_0 > 0$ (riktad mot jämviktsälget).

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = -v_0 \tag{6}$$

   Detta ger att

$$A = x_0 \quad B = \frac{x_0}{\tau} - v_0 \tag{7}$$

   För att partikeln skall passera jämviktsläget $x(t) < 0$ krävs att $B < 0$ dvs $v_0 > \frac{x_0}{\tau}$ [1] (se figur). Figuren visar också att jämviktsläget bra kan passeras en gång under rätt förutsättningar.



3. En partikel rör sig (friktionsfritt) på ett sfäriskt skal med hastigheten $\vec{v}$. Corioliskraften ger upphov till en kraft som alltid är vinkelrät mot $\vec{v}$ vilket resulterar i en centralrörelse [2] (jämför hur ett magnetfält **B** böjer trajektorian av en elektrisk laddning q).

   Hur stor är kraften som verkar på partikeln i ytans plan? Låt partikeln ha massan m och låt jordens rotationshastighet (kring sin egen axel) vara Ω_E. Corioliskraften är då

$$\vec{F}_{\text{corr}} = -2m\vec{\Omega}_E \times \vec{v}. \tag{8}$$

   Ω_E kan delas upp i två komponenter: en komponent som ligger i planet $\vec{\Omega}_H$ samt en som är vinkelrät mot planet $\vec{\Omega}_V$. Då $\vec{v}$ också ligger i planet pekar vektorn $\vec{\Omega}_H \times \vec{v}$ vinkelrät mot ytan dvs påverkar inte dess rörelse på sfären. Däremot så ligger $\vec{\Omega}_V \times \vec{v}$ i planet och är alltid vinkelrät mot $\vec{v}$ (därav centralrörelsen). $\vec{\Omega}_V$ kan skrivas om i termer av breddgraden θ som $\vec{\Omega}_V = \Omega_E \sin\theta\, \hat{r}$ där $\Omega_E = |\vec{\Omega}_E|$. Kraften som ger upphov till partikelns cirkelrörelse är alltså

$$\vec{F}_{\text{c}} = -2m\Omega_E \sin\theta\, \hat{r} \times \vec{v}. \tag{9}$$

   Radien för en sådan rörelse kan uppskattas med Newtons andra lag $F_c = ma_c$ där $F_c = |\vec{F}_{\text{c}}|$ och $a_c = \frac{v^2}{r}$. Detta ger uttrycket

$$r = \frac{v}{2\Omega_E \sin\theta} \quad [m]. \tag{10}$$

   Från denna ekvation kan en enkel storleksuppskattning göras av ett roterande vädersystem. Om

$$v \sim 30 \text{ m/s} \qquad \Omega_E \sim 10^{-5} \text{ 1/s} \qquad \theta \sim \frac{\pi}{4} \tag{11}$$

   blir vädersystemets radie

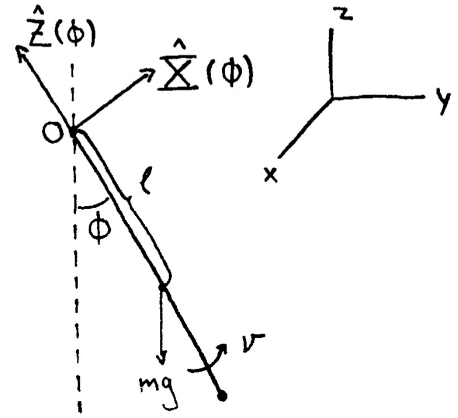
$$r \sim 200 \text{ mil}. \tag{12}$$

---

[1] Observera att denna analys gäller för $x(0) = x_0$. Om man väljer $x(0) = -x_0$ måste $\dot{x}(0) = v_0$.
[2] Se D.Kleppner och R.J Kolenkow *An Introduction to Mechanics* sid. 364-367.

4

Vridmomentet från infästningen hindrar rörelse i $\hat{x}$-led, vidare följer det vridande momentet pendelrörelsen. Således är detta vridmoment vinkelrätt mot $\hat{x}$ och $\hat{z}(\phi)$.



$$\mathbb{M}_o = \ell mg\sin\phi(-\hat{x}) + M_{inf}(\phi)\hat{Z}(\phi)$$

$$\omega = v + \Omega = v\hat{Z}(\phi) + \dot{\phi}(-\hat{x})$$

$$\mathbb{H}_o = I_{xx}\dot{\phi}\hat{x} + I_{\parallel}v\hat{Z}(\phi) =$$

$$= I_{xx}\dot{\phi}\hat{x} - I_{\parallel}v\sin\phi\,\hat{y} + I_{\parallel}v\cos\phi\,\hat{z}$$

$$\begin{cases} \hat{Z}(\phi) = -\sin\phi\,\hat{y} + \cos\phi\,\hat{z} \\ \hat{X}(\phi) = \cos\phi\,\hat{y} + \sin\phi\,\hat{z} \end{cases}$$

Sätts in i ekv.

$$\sum \mathbb{M}_o = (\dot{\mathbb{H}})_{xyz} + \Omega \times \mathbb{H}_o$$

$$\Omega \times \mathbb{H}_o = I_{\parallel}v\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x}\times\hat{y} - I_{\parallel}v\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x}\times\hat{z} =$$

$$= I_{\parallel}v\dot{\phi}\,\hat{X}(\phi)$$

$$(\dot{\mathbb{H}}_o)_{xyz} = I_{xx}\ddot{\phi}\hat{x} + I_{\parallel}\dot{v}\hat{Z}(\phi)$$

Men $M_{inf}(\phi)\hat{Z}(\phi)$ har ingen projektion på $\hat{z}(\phi)$ och således förändras inte v under pendelrörelsen $\Rightarrow \dot{v} = 0$.

Vi har således ekvationen

$$-mgl\sin\phi\,\hat{x} + M_{inf}(\phi)\,\hat{\underline{X}}(\phi) = I_{xx}\ddot{\phi}\,\hat{x} + I_{\parallel} v \dot{\phi}\,\hat{\underline{X}}(\phi),$$

vilken har "lösningen"

$$M_{inf}(\phi) = \dot{\phi} I_{\parallel} v \qquad (1)$$

$$-mgl\sin\phi = I_{xx}\ddot{\phi} \qquad (2)$$

Svar:

Spinnet är konstant och påverkar inte pendelrörelsen ty (2) är rörelseekv. för en pendel. Vidare ges $M_{inf}(\phi)$ av

$$M_{inf}(\phi) = \dot{\phi} I_{\parallel} v .$$

Tentamen i Mekanik för F, del 2
Tisdagen 24 maj 2005, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

1. Ange för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt!
(8 poäng, 2 för varje korrekt svar utöver 4)

a. Corioliskraften på ett fordon som väger 1 ton och färdas rakt norrut på 58° nordlig bredd med farten 100 km/h är riktad österut och har storleken 3.4 N.

b. Masscentrum för ett partikelsystem rör sig alltid med konstant och likformig hastighet.

c. Tröghetsmomentet, för en tunn regelbunden femhörning med konstant massa per ytenhet och total massa m, med avseende på en axel genom mittpunkten och vinkelrät mot femhörningens plan, är $\frac{\sqrt{5}}{2}ma^2$, där a är avståndet från mittpunkten till ett av hörnen.

d. Den totala fjäderkonstanten för två fjädrar som sätts i bredd är hälften så stor som för var och en av dem.

e. Närvaron av fiktiva krafter, dvs. avvikelse från Newtons första lag, indikerar att koordinatsystemet man använder inte är ett inertialsystem.

f. Om en kropp har en tröghetsmatris I som innehåller deviationsmoment i ett system, så följer det av den ortogonala transformationen $I' = PIP^t$ (där P är en ortogonal matris) att så är fallet i alla ortonormerade system.

g. Inre krafter i ett system kan ge upphov till vridande moment på systemet som helhet.

h. Tiden det tar för en mycket starkt dämpad partikel att, då den släpps från vila, t.ex. halvera sitt avstånd till jämviktsläget är större ju starkare dämpningen är.

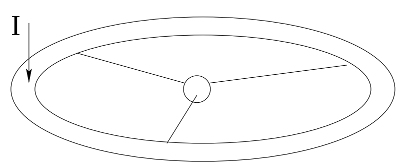
2. En sfärisk kropp med massan 10 g och radien 8.0 mm är utsatt för en återförande kraft som är proportionell mot förflyttningen från jämviktsläget med proportionalitetskonstanten 0.50 N/m. Massan svänger i vatten, och utsätts därför för en bromsande kraft från vattnet (se nedan). Visa att den resulterande svängningsrörelsen kommer att vara svagt dämpad (ge även ett värde på den dimensionslösa koefficienten ζ) om amplituden är tillräckligt liten för att strömningen skall kunna betraktas som laminär. Ungefär hur stor får amplituden vara om detta skall gälla?
(16 poäng)

Vattenmotståndet beter sig olika för laminärt och för turbulent flöde. Vilket som gäller bestäms av Reynoldstalet, $Re = \frac{\rho d v}{\eta}$, där ρ är vattnets densitet, d föremålets typiska diameter, v dess fart och $\eta \approx 1.5 \times 10^{-3}$ kg/(ms) vattnets viskositet. För Reynoldstal mindre än c:a 30 har man laminär strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten enligt $F \approx 6\pi\eta r v$ där r är sfärens radie. För Reynoldstal från c:a 10^3 och uppåt har man turbulent strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten i kvadrat enligt $F \approx \frac{1}{2}\rho C_d A v^2$, där A är föremålets tvärsnittsarea och C_d en formfaktor som för en sfär är ungefär 0.5.

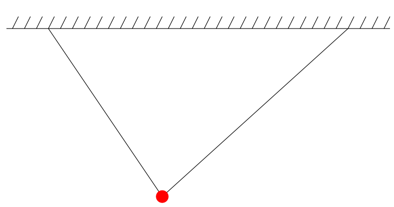
3. Man har diskuterat att montera svänghjul i stadsbussar för att kunna lagra energi vid inbromsning. Detta problem rör dock en annan hypotetisk tillämpning: dessa svänghjul skulle eventuellt kunna användas för att "motverka centrifugalkraften" då bussen svänger. Undersök om det finns något sätt att montera ett svänghjul i bussen så att detta åstadkoms, och isåfall hur dess rotationsvektor bör vara riktad. Fungerar det isåfall både för höger- och vänstersvängar? Ge en grov uppskattning av hur svänghjulet skulle behöva dimensioneras!
(16 poäng)

---

4. En rymdstation är formad som en smal torus ("doughnut") enligt figuren. Dess radie är 200 m och dess massa 50 kiloton. Massan i övriga delar av rymdstationen är försumbar. Stationen roterar kring sin symmetriaxel så att den upplevda gravitationsaccelerationen vid periferin skall vara g. Vid ett tillfälle skjuts en rymdfarkost ut från torusen i en riktning parallell med rotationsaxeln, vilket åstadkommer en impuls i motsatt riktning av storleken $7.5 \cdot 10^5$ Ns. Beskriv rymdstationens rotationsrörelse därefter i termer av spinn och precession!
(10 poäng)



5. En liten kula kan glida friktionsfritt på ett lätt, tunt, otänjbart och lättböjligt snöre med längden l, vars ändar är fästa i samma höjd på avståndet a från varandra. Använd en energimetod för att bestämma periodtiden för små svängningar kring jämviktsläget!
(10 poäng)



Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 24/5-2005.

1. S F F F S F F S

2. Antag att strömningen är laminär, och att partikeln rör sig på x-axeln i ett koordinatsystem med origo i jämviktspunkten. Då är rörelseekvationen

$$\ddot{x} = -\frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = -2\zeta\omega_n\dot{x} - \omega_n^2 x.$$

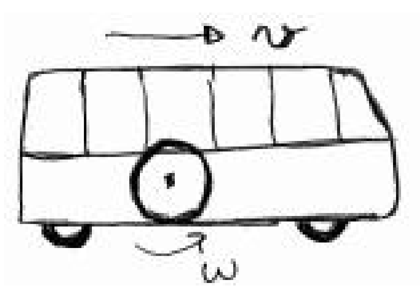
Dämpfaktorn blir $\zeta = \frac{6\pi\eta r}{m2\omega_n} = 3\pi\eta r/\sqrt{mk} = 3\pi{\cdot}1.5{\cdot}10^{-3}{\cdot}0.8{\cdot}10^{-2}/\sqrt{10^{-2}\cdot 0.5} = 1.60{\cdot}10^{-3}$. (Dimensionskoll: $1 = [\zeta] = [\eta r/\sqrt{mk}] = \frac{M}{LT}L/\sqrt{M\frac{F}{L}} = \frac{M}{T}/\sqrt{\frac{MML}{TTL}} = 1$). Eftersom dämpfaktorn är mycket mindre än ett är rörelsen nästan odämpad harmonisk svängning, dvs nästan på formen

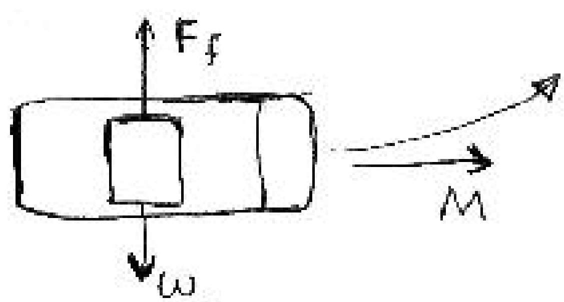
$$x(t) = A\sin(\omega_n t - \varphi), \qquad \dot{x}(t) = A\omega_n\cos(\omega_n t - \varphi).$$

Den kritiska hastigheten, v_c, som inte skall överskridas för att ovanstående beskrivning av rörelsen skall vara en god approximation motsvarar reynoldstalet 30. Motsvarande största amplitud är

$$A = \frac{v_c}{\omega_n} = \frac{30\eta}{\rho d}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{30\cdot 1.5\cdot 10^{-3}}{10^3\cdot 1.6\cdot 10^{-2}}\sqrt{\frac{10^{-2}}{0.5}} = 4\cdot 10^{-4} = 0.4\,\mathrm{mm}.$$

Dimensionskontroll: $[\frac{\eta}{\rho d}\sqrt{\frac{m}{k}}] = \frac{M}{LT(M/L^3)L}\sqrt{M\frac{TTL}{ML}} = L.$





3. Svängning med krökningsradie R vid fart v kräver friktionskraft $F_f = m_b v^2/R$ på hjulen från vägbanan, som ger kraftmoment $M = h_G m_b v^2/R$ med avseende på bussens masscentrum, riktat enligt figuren. (h_G är bussens masscentrums höjd över vägbanan.) För att bussen inte skall välta måste vanligen kraftmomentsumman vara 0. M kompenseras då av momentet orsakat av att normalkrafterna på hjulen från vägbanan är större på ytterhjulen än innerhjulen i kurvan. Men, om det finns ett gyro i bussen skall kraftmomentsumman inte vara noll, utan lika med tidsderivatan av gyrots rörelsemängdsmoment. Om gyrot sitter som i figuren ser man att denna är riktad som M, och därför minskar normalkrafternas moment. Om svänghjulet har vinkelhastighet ω, massa m_h, tröghetsradie k, tröghetsmoment $I = m_h k^2$, så är rörelsemängdsmomentets tidsderivata $\dot{L} = I\omega\Omega = m_b k^2\omega v/R$ när bussen går genom kurvan och därigenom vrider sig med vinkelhastigheten $\Omega = v/R$. Exakt kompensation, dvs inget normalkraftsmoment, inträffar när $M = h_G m_b v^2/R = m_b k^2\omega v/R$. Det

vill säga $\omega = \frac{m_b}{m_s}\frac{h_G v}{k^2}$ (Det är lämpligt och enkelt att dimensionskontrollera detta samband. Man kan också tänka efter och inse att ω ändras i rimlig riktning om en av parametrarna i taget fördubblas.) Exakt kompensation fordrar alltså att svänghjulets fart är propotionell mot bussens. Detta går tyvärr stick i stäv med iden, som nämns i uppiftstexten, att lagra energi i svänghjul vid inbromsning. Än värre ser det ut om man jämför storleken av hjulets rörelseenergi och bussens translationsrörelseenergi $\frac{E_h}{E_b} = \frac{I\omega^2}{m_b v^2} = \frac{m_b}{m_h}\frac{h_G^2}{k^2}$. Man kan inse att denna kvot nödvändigtvis är större än 1 (bussmassan inkluderar hjulmassan). Att minska bussarnas energiförbrukning är nog viktigare än att förbättra deras kurvtagningsförmåga. Kanske kan man klara bäggedera genom att använda tex tre svänghjul, två för bromsenergin och ett för rörelsemängdsmomentet. Men detta handlade uppgiften inte om. Storleksordningsförslag: Bussmassa 10^4 kg hjulmassa 10^3 kg, $h_G = k = 1$m, vinkelhastighet $\omega_n = 50\,\mathrm{s}^{-1}$, motsvarande $v = 5\,\mathrm{m/s}$. Starka metaller tål lätt spänningarna pga centrifugalkrafterna i sådana här hjul, men riskerna om energin frigörs vid trafikolycka bör beaktas.

4. Rymdstationen roterar till att börja med kring sin symmetriaxel med spinn s så att $g = Rs^2$, där $R =$ radien. Jag antar att impulsöverföringen vid rymdfarkostutskjutningen sker snabbt i jämförelse med s, så att den kan betraktas som stöt. Jag inför ett kroppsfixt koordinatsystem xyz så att origo ligger i torusens centrum, z-axeln pekar i spinnriktningen, och stöten träffar i $(R, 0, 0)$. Stötimpulsen kallar jag $-\Pi\hat{z}$. (Jag byter alltså uppgiftstextens symbol I mot Π för att hindra förväxling med tröghetsmoment.) Rymdstationens tröghetsmoment med avseende på z-axeln är $I = mR^2$, och med avseende på däremot vinkelräta riktningar genom origo $I_\perp = I/2$.
   Alldeles efter stöten är stationens rörelsemängdsmoment med avseende på sitt masscentrum $\vec{L} = Is\hat{z} + R\Pi\hat{y} = Is\hat{z} + \frac{1}{2}I\omega_y\hat{y} = L\hat{Z}$. Efter stöten är $\vec{L}$ är konserverad, så att $\hat{Z}$ är en fix riktning i rummet, kring vilken rymdskeppets rotationsvektor $\vec{\omega}$ och symmetriaxel $\hat{z}$ precesserar. För att få precessionshastigheten uttrycker man $\vec{\omega}$ i basvektorerna $\hat{z}$ och $\hat{Z}$:

$$\vec{\omega} = s\hat{z} + \omega_y\hat{y} = s\hat{z} + \frac{R\Pi}{I/2}\frac{L\hat{Z} - Is\hat{z}}{R\Pi} = -s\hat{z} + 2\frac{L}{I}\hat{Z} = -s\hat{z} + \Omega\hat{Z}.$$

   Numeriskt gäller $s = \sqrt{g/R} = 0.22\,\mathrm{s}^{-1}$, $L_y/L_z = R\Pi/(Is) = \Pi/(mRs) = 3.4 \cdot 10^{-4} \equiv \alpha$, säg. (Dimensionskontroll: $[\Pi/(mRs) = FT/(ML/T) = (ML/T^2)T/(ML/T) = 1$.) $\alpha =$ tangens för vinkeln mellan symmetriaxeln $\hat{z}$ och precessionsaxeln $\hat{Z}$. Men eftersom α är så litet är det en god approximation att försumma termer av ordning α^2. Då är α vinkeln mellan $\hat{z}$ och $\hat{Z}$, och totala impulsmomentet kring masscentrum till beloppet samma som före utskjutningen, $L = Is$. Precessionshastigheten är $\Omega = 2s = 0.44\,\mathrm{s}^{-1}$. Rymdskeppets rotationsrörelse kan alltså beskrivas så att symmetriaxeln och den momentana rotationsaxeln ligger på motsatta sidor om den rumsfixa riktningen $\hat{Z}$, bildar bägge samma vinkel α med den, och precesserar med vinkelhastigheten $\vec{\Omega} = 2s\hat{Z}$ kring den. Och spinnvektorn har ändrat tecken jämfört med före utskjutningen. Figur 7/22 b i läroboken illustrerar rörelsen för en sådan här axelsymmetrisk kropp med $I_\perp < I$.

5. Jag inför koordinater (x,y) så att snörets ändar är i punkterna $(-c,d)$ och (c,d) med $a = 2d$ och $\ell = 2\sqrt{c^2+d^2}$. Kulans jämviktsläge, på lodlinjen mitt emellan snörets ändpunkter, är då i origo. Kulan kan röra sig utefter en bana i (x,y)-planet som bestäms av att snöret är sträckt och har längden ℓ: $\ell = \sqrt{(d-y)^2+(c-x)^2}+\sqrt{(d-y)^2+(c+x)^2}$. Banan är horisontell i origo, men kröker sig uppåt. För att bestämma periodtiden för små svängningar behövs en kvadratisk approximation av banan nära jämviktspunkten, dvs ett samband av formen $y = bx^2$. Konstanten b kan bestämmas genom att utveckla den exakta ekvationen för banan, dvs uttrycket för ℓ ovan, i potensserie i x och y, och försumma termer högre än lineära i y och kvadratiska i x. Gör man detta finner man $b = (\sqrt{1-a^2/\ell^2})/\ell$.
Så användes energimetoden. Summan av kinetisk och potentiell energi, $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgbx^2$ är konstant i tiden. (Hastigheten i y-led ger försumbar korrektion.) Derivering med avseende på tiden och division med $m\dot{x}$ ger rörelseekvationen $0 = \ddot{x}+2gbx$, från vilken man avläser svängnngsrörelsens periodtid $T = 2\pi/\omega_n = 2\pi/\sqrt{2gb} = 2\pi/\sqrt{\frac{2g}{\ell}\sqrt{1-(\frac{a}{\ell})^2}}$.
Som rimlighetskontroll kan man observera att uttrycket för vinkelfrekvensen interpolerar mellan de bekanta uttrycken $\sqrt{\frac{g}{\ell/2}}$ för en pendel med längd $\ell/2$ när $a = 0$, och 0 för horisontell rörelse när $a = \ell$.

Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Tisdagen 16 augusti 2005, 14.00-18.00, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: NN, tel. 772????

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

---

1. En dörr är 230 cm hög, 100 cm bred och väger 15 kg. Massan är jämnt fördelad över dörrens yta. Den skall utrustas med en stängningsautomatik som utövar ett vridande moment på dörren som är proportionellt mot öppningsvinkeln, samt ett vridande moment proportionellt mot dörrens vinkelhastighet. Ange, utgående från väl motiverade resonemang, praktiskt lämpliga värden på de två proportionalitetskonstanterna!
(10 poäng)

2. Galileo Galilei släpper en kula från det lutande tornet i Pisa, på ungefär 44° nordlig bredd. Tornets höjd h är 55 m. Luftmotståndet kan försummas. På grund av corioliskraften landar inte kulan rakt nedanför den punkt den släpps från, utan ett litet avstånd d därifrån.

   a) Med vetskap om att corioliskraften är proportionell mot ω, jordens rotationshastighet, kan man sluta sig till att d är proportionell mot ω. Använd dimensionsanalys för att avgöra vilken potens av h som d är proportionell mot!

   b) Bestäm avvikelsen, till storlek och riktning (kontrollera mot deluppgift a)!

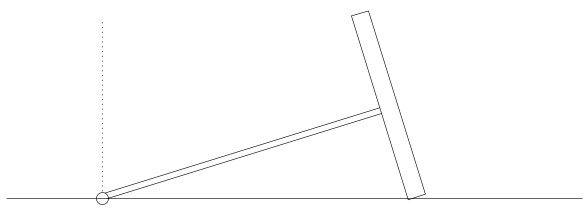
   Ledning: Corioliskraften kommer att vara mycket mindre än tyngdkraften. Sålänge avvikelsen från vertikalen är liten kan den vertikala rörelsen fortfarande approximeras med den som fås utan corioliskraft.
   (15 poäng)

3. Ett homogent klot rullar nedför ett plan med lutningsvinkeln α utan att glida, under inverkan endast av tyngdkraften och kontaktkraften från planet. Beräkna dess acceleration, dels genom att dela upp rörelsen i masscentrums translation och rotation kring masscentrum, dels genom att betrakta rörelsen som momentan rotation kring kontaktpunkten, och visa att de två metoderna ger samma resultat!
(15 poäng)

Uppgifter för överbetyg

---

4. En rotationssymmetrisk kropp är uppbyggd av en lätt axel med längden ℓ, på vilken en tunn homogen cirkelskiva med radie r och massa m är fästad vinkelrätt mot axeln. Axelns ände är momentfritt fästad i en punkt O på ett horisontellt plan, och cirkelskivan rullar utan glidning mot planet så att precessionshastigheten runt vertikalen genom O är Ω. Bestäm kraften på kroppen från infästningen i punkten O samt kontaktkraften på cirkelskivan i kontaktpunkten med planet (det får förutsättas att den senare saknar horisontell komponent) till storlek och riktning!
(10 poäng)



O

5. En kropp med massan m påverkas av en återförande kraft med fjäderkonstant k samt en viskös dämpkraft proportionell mot hastigheten med proportionalitetskonstant $-b$. Dessutom utsätts den för en harmonisk kraft $F = F_0 \cos \omega t$. Efter det att eventuella transienter har dämpats ut visar sig kroppens svängningar ligga $\pi/4$ (radianer) efter den yttre kraften i fas. Bestäm konstanten b uttryckt i k och m! Bestäm också partikulärlösningens amplitud!
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 16/8-2005.

1. Jag tänker mig att det rör sig om, antingen en sådan dörr som bara skall svänga igen mjukt när den lämnas för sig själv, eller också en svängdörr som kan svänga ut åt bägge hållen. Men inte en sådan dörr som man vill skall slå igen med viss kraft, så att den låser sig i stängt läge av sig själv, för de brukar ha annorlunda fungerande stängningsanordningar.
   Dörrens tröghetsmoment med avseende på vridningsaxeln är

   $$I = mb^2/3 = 5\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

   Rörelseekvation för dörrens svängning är

   $$I\ddot{\theta} = -c\dot{\theta} - k\theta.$$

   Högerledet består av stängningsanordningens två kraftmoment enligt uppgiftstexten. Kraftmomentet $-k\theta$ stänger dörren om $k > 0$. Kraftmomentet $-c\dot{\theta}$ dämpar svängningsrörelsen om $c > 0$. Det gäller att välja k så att dörren får upp lagom fart, och c så att den stannar så fort som möjligt. Det är enklast att först bestämma lämpligt c givet k. Om rörelsen är underdämpad innehåller bägge partikulärlösningarna en faktor $\exp(-tc/2I)$. De är dämpade svängningar, och dämpningen sker snabbare ju större c väljs. Om rörelsen är överdämpad är bägge partikulärlösningarna exponentialfunktioner. Den långsammast avtagande avtar långsammare ju större c väljs. För att uppnå snabbast möjliga garanterade avtagande amplitud för svängdörren är det därför bäst att välja c motsvarande kritisk dämpning.
   En dörr av första slaget kan antingen slå igen med stöt efter ändlig tid, eller också minska sin amplitud exponentiellt under oändlig tid. Kraftig stöt medför icke önskvärda stötkrafter. Stötrisken kan inte elimineras helt. Om rörelsen är underdämpad sker stöt oberoende av startvillkor. Men om rörelsen är överdämpad sker den bara om dörren startas med tillräckligt stor stängande fart, inte om dörren startas utan fart, som vanligen är fallet om man är aktsam. Även för sådana dörrar finns alltså ett gott argument för att välja kritisk dämpning. Då är rörelseekvationen

   $$\begin{aligned} &\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \\ &w_0^2 = k/I, \quad 2\zeta w_0 = c/I, \quad \zeta = 1. \end{aligned}$$

   Eftersom en sekund är en typisk tidsskala för en dörrs rörelse, föreslår jag valet $w_0 = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. Detta innebär följande val av propotionalitetskonstanterna

   $$\begin{aligned} k &= I\omega_0^2 = 5\,\mathrm{kg\,m^2/s^2} = 5\,\mathrm{Nm/radian}, \\ c &= 2I\omega_0 = 10\,\mathrm{kg\,m^2/s} = 10\,\mathrm{Nm/(radian/s)}. \end{aligned}$$

2. a) Dimensionsanalys. d kan bero av h, g, ω, och latituden θ. Så vi bör ha ett samband på formen

   $$d = \omega f(h, g, \theta),$$

   med okänd funktion f. De ingående parametrarnas dimensioner är

   $$[d/\omega] = LT, \quad [h] = L, \quad [g] = L/T^2, \quad [\theta] = 1.$$

Tid- och längd-dimensionerna måste stämma överens i ekvationens bägge led. Dessa två villkor bestämmer f's beroende av g och h, med resultatet

$$d = \omega g^{-1/2} h^{3/2} \tilde{f}(\theta),$$

där $\tilde{f}$ är en ny okänd funktion. Om man dessutom observerar att d beror av vinkelhastighetens horisontella komponent, $\omega\cos(\theta)$, men inte av dess vertikala komponent, $\omega\sin(\theta)$, så blir sambandet bestämt upp till en propotionalitets-konstant,

$$d = \omega\cos(\theta) g^{-1/2} h^{3/2} \cdot \text{konst.}.$$

b) Rörelseekvation och corioliskraftuttryck är

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{z} + \vec{F}_c, \qquad \vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}.$$

Med koordinater så att basvektorerna $\hat{z}$, $\hat{x}$, och $\hat{y}$ pekar vertikalt, österut, och norrut, respektive, blir rörelseekvationen i komponentform

$$\begin{aligned}
&\vec{\omega} = \omega(\hat{z}\sin(\theta) + \hat{y}\cos(\theta)),\\
&\dot{\vec{r}} \approx \dot{z}\hat{z}, \qquad \text{(enligt ledning)}\\
&m\ddot{z} = -mg,\\
&m\ddot{x} = -2m\omega\cos(\theta)\dot{z}.
\end{aligned}$$

Lösningen är, med falltiden t_0,

$$\begin{aligned}
&z(t) = h - gt^2/2, \qquad t_0 = \sqrt{2h/g},\\
&x(t) = \omega g\cos(\theta)\, t^3/3,\\
&d = x(t_0) = (1/3)\omega\cos(\theta) g^{-1/2}(2h)^{3/2} =\\
&= (1/3)\cdot 0.73\cdot 10^{-4}\cdot \mathrm{s}^{-1}\cdot 0.72\cdot(2\cdot 55\,\mathrm{m})^{3/2}(9.8\,\mathrm{m/s^2})^{-1/2} \approx 6.5\,\mathrm{mm}.
\end{aligned}$$

Svar: Avvikelsen är $d = 6.5$ mm åt öster.

3. Mina beteckningar: x = koordinataxel riktad utför lutande planet, x_c = masscentrums koordinat, ω = klotets vinkelhastighet, m = dess massa, a = dess radie, p = kontaktpunkten mellan klot och plan, F_c = friktionskraften i p, riktad uppför planet. $I_c = (2/5)ma^2$ = kulans tröghetsmoment med avseende på masscentrum. I_p = kulans tröghetsmoment med avseende på $p = I_c + ma^2 = (7/5)ma^2$.
a) Rörelsemängdslagen för masscentrums rörelse, och rörelsemängdsmomentlagen för rotationsrörelsen kring masscentrum ger

$$m\ddot{x}_c = mg\sin\alpha - F_c, \qquad I_c\dot{w} = -F_c\, a.$$

Om villkoret för ingen glidning i p, $\dot{x}_c + a\omega = 0$, används till att eliminera variabeln w, och om sedan F_c elimineras ur ekvationssystemet, återstår ekvationen

$$(m + I_c/a^2)\,\ddot{x}_c = mg\sin\alpha.$$

b) Rörelsemängdsmomentlagen med avseende på p ger

$$I_p \dot{\omega} = -amg \sin \alpha.$$

Om man använder sambandet mellan ω och $\dot{x}$, och sambandet mellan I_c och I_p, så ser man att de bägge rörelseekvationerna beskriver samma acceleration,

$$\ddot{x}_c = mg \sin \alpha \, a^2 / I_p = (5/7) \, g \sin \alpha.$$

4. Jag använder beteckningarna i figur 7/20 och ekvation (7/27) i läroboken, samt N = normalkraften på cirkelskivan i kontaktpunkten med planet, F_v = vertikala komponenten och F_h = horisontella komponenten, riktad bort från snurran, av sökta kontaktkraften i O. Vi har, med hjälp av informationen i uppgiftstexten,

$$\sin \theta = \ell / \sqrt{\ell^2 + r^2}, \qquad I = mr^2/2,$$
$$\cos \theta = r / \sqrt{\ell^2 + r^2}, \qquad I_0 = mr^2/4 + m\ell^2.$$

Spinnet bestäms av precessionen och av att kontaktpunktens momentana hastighet är noll (eftersom skivan inte glider). Vi har

$$\dot{\psi} = \Omega, \qquad p = -\Omega \sqrt{\ell^2 + r^2} / r = -\Omega / \cos \theta.$$

Kraftmomentet i ekvation (7/27) är med avseende på O och orsakas av N och gravitationskraften. Ekvation (7/27) tar formen

$$mg\ell \sin \theta - N \sqrt{\ell^2 + r^2} = \Omega^2 \sin \theta (I(\cos \theta - 1/\cos \theta) - I_0 \cos \theta).$$

Denna ekvation bestämmer sökta kraften N till

$$N = mg \sin^2 \theta + \frac{\Omega^2}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \tan \theta (I \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta),$$

där $\sin \theta$, $\cos \theta$, I, och I_0 är givna ovan. Kontaktkrafterna i O kan nu fås med hjälp av rörelsemängdslagen. Masscentrums acceleration är $\ell \sin \theta \Omega^2$ i samma riktning som F_h. Resultat

$$F_v = mg - N = mg \cos^2 \theta - \frac{\Omega^2}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \tan \theta (I \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta),$$
$$F_h = m\ell \sin \theta \, \Omega^2.$$

5. Enligt uppgiftstexten är rörelseekvationen och rörelsen respektive

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + F_0 \cos(\omega t),$$
$$x(t) = A \cos(\omega t - \pi/4) = A/\sqrt{2}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)),$$

där A är den sökta amplituden. Insättning av ansatsen i rörelseekvationen, och identifiering av sinustermer och cosinustermer ger ekvationssystemet

$$A/\sqrt{2}(-m\omega^2 - b\omega + k) = 0,$$
$$A/\sqrt{2}(-m\omega^2 + b\omega + k) = F_0.$$

Dess lösning ger svaret till uppgiftsfrågan:

$$b = k/w - m\omega,$$
$$A = F_0/(\sqrt{2}(k - m\omega^2)).$$

Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Fredagen 26 augusti 2005, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Göran Niklasson, tel. 7723194

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

---

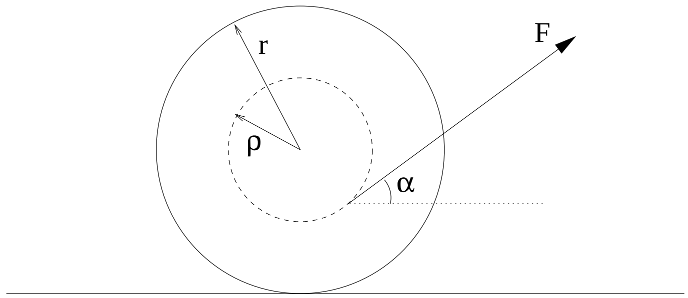
1. För att modellera krafter mellan två atomer, speciellt ädelgaser, används ofta den s.k. Lennard–Jones-potentialen, som har utseendet

$$V(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right] .$$

Den första termen ger en repulsiv kraft på små avstånd, och den andra en attraktiv kraft, van der Waals-kraft, på stora avstånd. Skissera potentialen! Bestäm jämviktsavståndet r_0 mellan de två atomerna och bindningsenergin E_0 (som är skillnaden mellan potentialens värde i oändligheten och i jämviktsläget, $E_0 = V(\infty) - V(r_0)$)! Om de två atomerna båda har massan m, vad blir vinkelfrekvensen för små radiella svängningar kring jämviktsläget?
(15 poäng)

2. En bowlingbana är 19.16 m lång och 1.07 m bred. Bowlingklotet väger i allmänhet mellan 10 och 16 pounds (1 pound = 0.454 kg). Undersök, under rimliga antaganden, huruvida corioliskraften kan vara väsentlig vid bowlingspel! Om så skulle vara fallet, kan spelaren på något sätt minimera dess inverkan?
(10 poäng)

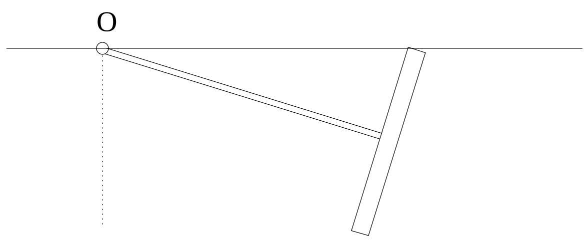
3. En trådrulle består av en homogen cylinder med massan μ och radien ϱ, samt två likaså homogena "gavlar", vardera med massan m och radien r. Den vilar på ett horisontellt bord, mot vilken friktionen är tillräcklig för att förhindra glidning. Man drager i tråden med kraften F som bildar vinkeln α mot horisontalen enligt figuren. Åt vilket håll börjar trådrullen rulla? Hur stor blir dess acceleration?
(15 poäng)



Uppgifter för överbetyg

---

4. En rotationssymmetrisk kropp är uppbyggd av en lätt axel med längden ℓ, på vilken en tunn homogen cirkelskiva med radie r och massa m är fästad vinkelrätt mot axeln. Axelns ände är momentfritt fästad i en punkt O på ett horisontellt plan, och cirkelskivan rullar utan glidning *under* planet så att precessionshastigheten runt vertikalen genom O är Ω. Hur stor måste precessionshastigheten vara för att rörelsen skall vara möjlig? Bestäm kraften på kroppen från infästningen i punkten O samt kontaktkraften på cirkelskivan i kontaktpunkten med planet (det får förutsättas att den senare saknar horisontell komponent) till storlek och riktning!
(10 poäng)



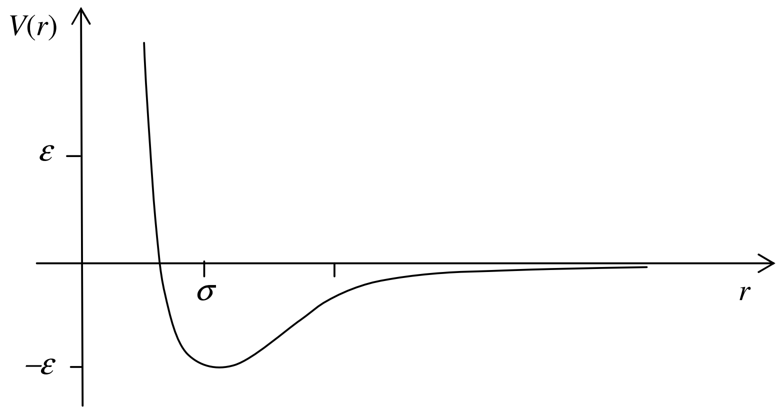
5. En roterande motor står på fjädrar med försumbar dämpning. En obalans i rotorn gör att den påverkas av en vertikal tröghetskraft $ma\nu^2 \cos \nu t$, där m, a och ν är konstanter. Motorns totala massa är M. Man finner att motorn vid normal drift råkar i våldsamma svängningar (resonans). Genom att fästa en kropp med massan K på motorn kan man nedbringa amplituden. Alternativt kan man sätta en dämpare parallellt med fjädrarna. Vilken dämpkonstant (proportionalitetskonstant mellan hastighet och kraft) b skall i så fall väljas om man vill ha samma reduktion av svängningens amplitud?
(10 poäng)

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för teknisk fyusik
Göran Niklasson

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik del 2 för F1 2005-08-26

Uppgift 1

Skiss:



Kraften mellan atomerna bestäms av potentialens derivata:

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{4\varepsilon}{\sigma}\left[12\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - 6\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\right]$$

Jämviktsläget r_0 bestäms av att kraften $F(r_0)$ skall vara noll, vilket ger

$$r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma = 1{,}12\sigma$$

Bindningsenergin blir

$$E_0 = -V(r_0) = -4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{6}\right] = -4\varepsilon\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = \varepsilon$$

I närheten av jämviktsläget kan vi använda Taylorutveckling och försumma termer av högre ordning än kvadratisk, vilket ger

$$V(r) = V(r_0) + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

där

$$k = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_0} = \frac{4\varepsilon}{\sigma^2}\left[12\cdot 13\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{14} - 6\cdot 7\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{8}\right] = \frac{24\varepsilon}{\sigma^2}\left[\frac{26}{2^{7/3}} - \frac{7}{2^{4/3}}\right]$$

$$= \frac{24\varepsilon}{\sigma^2}\left[\frac{13}{2^{4/3}} - \frac{7}{2^{4/3}}\right] = \frac{72\varepsilon}{\sqrt[3]{2}\sigma^2}$$

Vi har nu reducerat modellen till en harmonisk oscillator med fjäderkonstanten k och massan $m/2$ (den ”reducerade massan” för tvåkroppssystemet). Vinkelfrekvensen för små svängningar blir alltså

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{144\varepsilon}{\sqrt[3]{2}m\sigma^2}} = \frac{12}{\sqrt[6]{2}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\sigma^2}} = 10{,}7\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\sigma^2}}$$

<u>Svar</u>: $r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma$; $E_0 = \varepsilon$; $\omega = \frac{12}{\sqrt[6]{2}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\sigma^2}}$

Uppgift 2

Låt oss undersöka det värsta tänkbara fallet. Det innebär spel vid nordpolen eller sydpolen, eftersom det är där corioliskraften är som störst. Vi kan vid polerna bortse från att jorden är sfärisk och alltså betrakta jordytan som en plan karusell, där vi för enkelhets skull antar att bowlingklotet kastas ut från mitten (polen), d.v.s. från en punkt som är i vila. Corioliskraften gör att klotet tycks vika av åt sidan i stället för att röra sig rätlinjigt, d.v.s. rörelsen tycks strida mot Newtons första lag, men ser vi det hela i ett större perspektiv kan vi i stället beskriva det som att klotet rör sig rätlinjigt medan målet (käglorna) flyttar sig åt sidan för att de följer med i jordens rotation. Under ett dygn (T = 24·3600 s) flyttar sig målet sträckan $2\pi L$ där L är banans längd (L = 19,16 m). Under den tid t då klotet är i rörelse längs banan hinner målet alltså flytta sig en sträcka δ som ges av

$$\delta = 2\pi L \frac{t}{T}$$

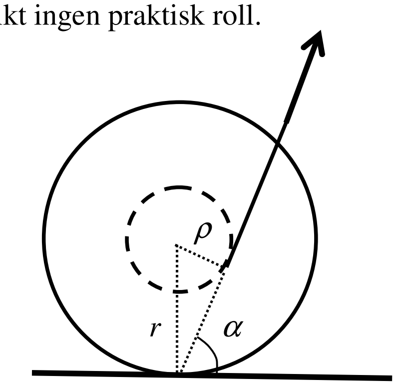
Med t = 2 s fås δ = 3 mm och med t = 3 s fås δ = 4 mm. På mera normala breddgrader blir avvikelsen mindre och vid ekvatorn blir den noll. Med användning av det formella uttrycket för corioliskraften finner man att ovanstående uttryck för δ skall multipliceras med sinus för latitudvinkeln.

Huruvida ett par millimeters avvikelse är väsentlig eller inte är svårt att säga för den som inte har egen erfarenhet av bowling, men troligen är det oväsentligt. I praktiken gör man förstås inga beräkningar utan man lär sig spelet genom ”trial and error”, vilket innebär att man automatiskt bygger in hänsynstagande till alla relevanta faktorer. Om corioliskraften spelar en väsentlig roll så skulle spelare från nordliga länder få problem när de tävlar i t.ex. Australien. Så är veterligen inte fallet.

Om man av någon anledning vill minimera bidraget från corioliskraften kan man förstås göra det genom att kasta klotet med stor hastighet, så att tiden t blir liten, men det skulle kanske påverka spelet negativt i andra avseenden.

Svar: Avvikelsen är högst ett par millimeter och spelar sannolikt ingen praktisk roll.

Uppgift 3



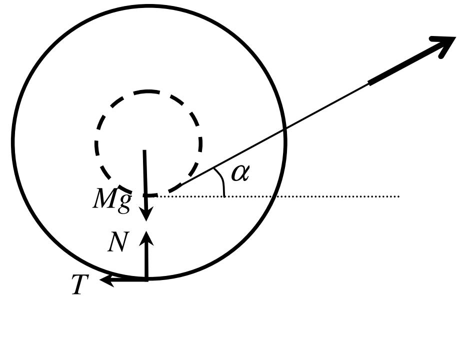
Åt vilket håll trådrullen börjar rulla avgörs av riktningen hos kraftens moment med avseende på kontaktpunkten mot underlaget. I gränsfallet att kraftens verkningslinje går genom kontaktpunkten kommer rullen varken att rulla åt vänster eller åt höger (om man drar tillräckligt hårt börjar den glida utan att vrida sig, men i texten förutsätts att friktionen är tillräcklig för att förhindra detta).

Med hjälp av figuren ser man att i gränsfallet gäller $\cos\alpha = \rho/r$. Rullningen blir åt vänster om $\alpha > \arccos(\rho/r)$ och åt höger om $\alpha < \arccos(\rho/r)$.

För att bestämma accelerationens storlek krävs en mera detaljerad analys. Vi låter M beteckna trådrullens sammanlagda massa och a dess tyngdpunktsacceleration, räknad positiv åt höger. Med kraftbeteckningar enlig figuren ger lagen för masscentrums rörelse ekvationerna

$$Ma = F\cos\alpha - T$$

$$0 = N + F\sin\alpha - Mg$$



Vid rullning utan glidning gäller att vinkelaccelerationen är a/r (med positiv riktning medurs). Impulsmomentlagen m.a.p. masscentrum ger då

$$I\frac{a}{r} = Tr - F\rho$$

där I är tröghetsmomentet m.a.p. masscentrum. Ur dessa tre ekvationer kan vi bestämma a, N och T. Resultatet för a är

$$a = \left(\frac{r\cos\alpha - \rho}{Mr^2 + I}\right) rF$$

Vi noterar att tecknet på a stämmer med vad som sades inledningsvis om rullningens riktning. Nu återstår bara att uttrycka M och I i de givna storheterna μ, m, ρ och r:

$$M = \mu + 2m$$

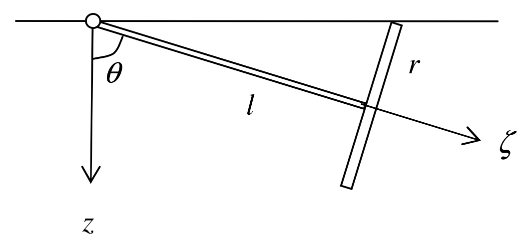
$$I = \frac{1}{2}\mu\rho^2 + \frac{1}{2}2mr^2$$

Efter lite algebra fås svaret.

Svar: $a = 2r\left(\frac{r\cos\alpha - \rho}{2\mu r^2 + 6mr^2 + \mu\rho^2}\right)F$ med positiv riktning åt höger.

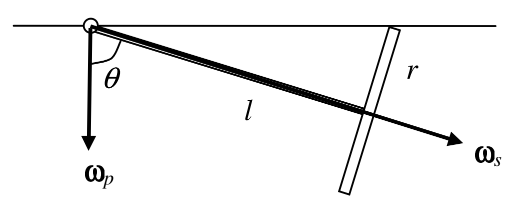
Uppgift 4

För att beskriva rörelsen inför vi två koordinatsystem: ett kroppsfixerat system $\xi\eta\zeta$ och ett rumsfixerat system xyz, båda med origo i O. Kroppens symmetriaxel är ζ-axeln, och den rumsfixa z-axeln pekar vertikalt nedåt. Motsvarande basvektorer betecknas med ”hattar”: $\hat{\boldsymbol{\zeta}}, \hat{\mathbf{z}}$. Vinkeln mellan ζ-axeln och z-axeln betecknas med θ. Den är relaterad till de givna storheterna r och l genom sambandet



$$\theta = \arctan\frac{l}{r}$$

Kroppens rotationsvektor kan skrivas



$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_s$$

där $\boldsymbol{\omega}_p$ beskriver precessionen och $\boldsymbol{\omega}_s$ beskriver spinnet kring symmetriaxeln:

$$\boldsymbol{\omega}_p = \Omega\hat{\mathbf{z}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_s = \omega_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

Spinnet ω_s kan uttryckas i precessionshastigheten Ω med hjälp av rullningsvillkoret, vilket ger (observera tecknet)

$$\omega_s = -\frac{\sqrt{r^2 + l^2}}{r}\Omega = -\frac{\Omega}{\cos\theta}$$

Kroppens rörelsemängdsmoment $\mathbf{L}$ med avseende på punkten O är

$$\mathbf{L} = I_\xi\omega_\xi\hat{\boldsymbol{\xi}} + I_\eta\omega_\eta\hat{\boldsymbol{\eta}} + I_\zeta\omega_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

där I_ξ, I_η och I_ζ är de tre huvudtröghetsmomenten. På grund av rotationssymmetrin gäller att $I_\eta = I_\xi$. Uttrycket för rörelsemängdsmomentet kan då omformas på följande sätt:

$$\mathbf{L} = I_\xi\omega_\xi\hat{\boldsymbol{\xi}} + I_\xi\omega_\eta\hat{\boldsymbol{\eta}} + I_\xi\omega_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}} + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\omega_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}} = I_\xi\boldsymbol{\omega} + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\omega_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

Med hjälp av figuren ser vi att

$$\omega_\zeta = \omega_s + \Omega\cos\theta$$

vilket ger

$$\mathbf{L} = I_\xi\left(\Omega\hat{\mathbf{z}} + \omega_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right) + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\left(\omega_s + \Omega\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}} = I_\xi\Omega\hat{\mathbf{z}} + \left[I_\zeta\omega_s + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\Omega\cos\theta\right]\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

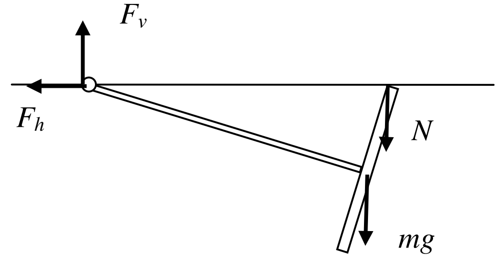
$$= I_\xi\Omega\hat{\mathbf{z}} + \left[-I_\zeta\frac{\Omega}{\cos\theta} + \left(I_\zeta - I_\xi\right)\Omega\cos\theta\right]\hat{\boldsymbol{\zeta}} = I_\xi\Omega\hat{\mathbf{z}} - \left(I_\zeta\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + I_\xi\cos\theta\right)\Omega\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

där vi använt rullningsvillkoret för att utrycka ω_s i Ω. Nästa steg är att bestämma tidsderivatan av $\mathbf{L}$:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L} = \Omega\hat{\mathbf{z}} \times \left[I_\xi\Omega\hat{\mathbf{z}} - \left(I_\zeta\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + I_\xi\cos\theta\right)\Omega\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right]$$

$$= \left(I_\zeta\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + I_\xi\cos\theta\right)\Omega^2\hat{\boldsymbol{\zeta}} \times \hat{\mathbf{z}}$$

Det vektoriella kraftmomentet med avseende på O är



$$\boldsymbol{\tau} = l\hat{\boldsymbol{\zeta}} \times mg\hat{\mathbf{z}} + \frac{l}{\sin^2\theta}\hat{\boldsymbol{\zeta}} \times N\hat{\mathbf{z}}$$

$$= \left(mg + \frac{N}{\sin^2\theta}\right)l\hat{\boldsymbol{\zeta}} \times \hat{\mathbf{z}}$$

Impulsmomentlagen $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$ ger nu

$$\left(I_\zeta\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + I_\xi\cos\theta\right)\Omega^2 = \left(mg + \frac{N}{\sin^2\theta}\right)l$$

$$N = \frac{\sin^2\theta}{l\cos\theta}\left(I_\zeta\sin^2\theta + I_\xi\cos^2\theta\right)\Omega^2 - mg\sin^2\theta$$

För att N skall vara positiv måste precessionshastigheten Ω uppfylla villkoret

$$\Omega \geq \sqrt{\frac{mgl}{I_\zeta\sin^2\theta + I_\xi\cos^2\theta}}$$

Kraftkomponenterna F_v och F_h i punkten O bestäms ur lagen för masscentrums rörelse:

$$F_v = mg + N = mg\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{l\cos\theta}\left(I_\zeta\sin^2\theta + I_\xi\cos^2\theta\right)\Omega^2$$

$$F_h = m\Omega^2 l\sin\theta$$

Nu återstår bara att sätta in utryck för $\sin\theta$, $\cos\theta$, I_ξ och I_ζ:

$$\sin\theta = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}; \qquad \cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

$$I_\xi = \frac{1}{4}mr^2 + ml^2; \qquad I_\zeta = \frac{1}{2}mr^2$$

Efter lite enkel algebra fås svaret

Svar: Villkoret är att $$\Omega \geq \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4gl\left(r^2 + l^2\right)}{r^2 + 6l^2}}$$

Tryckkraften i kontaktpunkten är $$N = \frac{mlr\Omega^2}{4\sqrt{r^2 + l^2}^3}\left(r^2 + 6l^2\right) - mg\frac{l^2}{r^2 + l^2}$$

Den vertikala kraftkomponenten i O är $$F_v = \frac{mlr\Omega^2}{4\sqrt{r^2+l^2}^3}\left(r^2+6l^2\right)+mg\frac{r^2}{r^2+l^2}$$

Den horisontella raftkomponenten i O är $$F_h = \frac{m\Omega^2 l^2}{\sqrt{r^2+l^2}}$$

F_v är riktad uppåt och F_h är riktad inåt (centripetalkraft).

Uppgift 5

Antag att den sammanlagda fjäderkonstanten är k och låt x beteckna motorns koordinat i vertikal led. Rörelseekvationen i närvaro av dämpare men utan extra vikt blir då

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + ma\nu^2\cos\nu t$$

vilket kan skrivas som

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{m}{M}a\nu^2\cos\nu t$$

Detta är en linjär inhomogen differentialekvation som lätt kan lösas. Efter det att in-svängningsförloppet har dött ut fås en stationär svängningsrörelse med amplituden (se t.ex. Physics Handbook):

$$A = \frac{ma\nu^2}{\sqrt{\left(k-M\nu^2\right)^2+\left(b\nu\right)^2}}$$

Utan dämpare (b = 0) men med en extra massa K fås i stället

$$A = \frac{ma\nu^2}{\sqrt{\left(k-M\nu^2-K\nu^2\right)^2}}$$

Enligt förutsättningen skall dessa två uttryck för A vara lika vilket innebär att

$$\left(k-M\nu^2\right)^2+\left(b\nu\right)^2 = \left(k-M\nu^2-K\nu^2\right)^2$$

Dessutom sägs att resonans uppkommer om både dämpare och extravikt saknas. Det innebär att $k = M\nu^2$. Villkoret ovan förenklas då till

$$\left(b\nu\right)^2 = \left(K\nu^2\right)^2$$

vilket ger svaret.

<u>Svar</u>: $b = K\nu$

Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Onsdagen 11 januari 2006, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

---

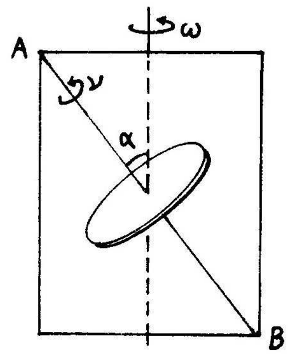
1. En bil kör upp över en kant (t.ex. en trottoirkant). Modellera bilens fjädring med en linjär fjäderkraft och en viskös dämpning. Antag för enkelhets skull att resultatet av att bilen kör upp på kanten är att hela underlaget plötsligt höjs (fram- och bakhjul samtidigt) och att bilens vertikala hastighet inte hinner ändras under detta förlopp, så att man härur får begynnelsevillkor för den efterföljande rörelsen. Lös rörelseekvationen i vertikalled för att få fram tidsförloppet för bilens vertikala rörelse sedan den passerat kanten! Nödvändiga parametrar får införas. Ge ett hyfsat realistiskt exempel på numeriska värden och diskutera händelseförloppet!
(15 poäng)

2. a. En kula kan glida utan friktion på en roterande horisontell skiva med radie R och vinkelhastighet Ω. Om kulan ges en begynnelsefart v (relativt skivan) i en punkt på skivans periferi, vilken riktning skall den ha (relativt skivan) för att passera skivans mittpunkt? Rita!
(4 poäng)

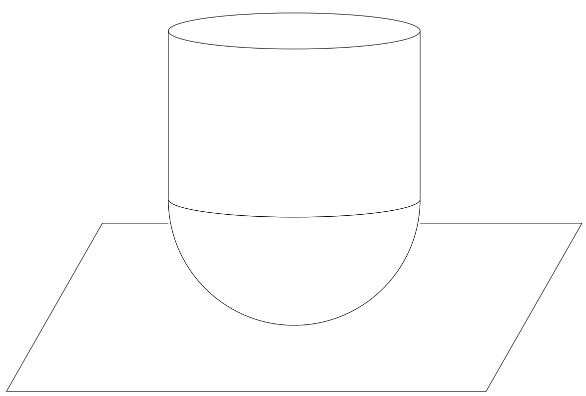
   b. Samma kula och samma skiva som i deluppgift a. Kulan är nu i vila på radien $a \neq 0$ relativt det *inertialsystem* där skivans mittpunkt är i vila. Visa att de fiktiva krafter (centrifugalkraft, corioliskraft) som kulan utsätts för i skivans system (ett roterande system med origo i vila i skivans mitt) tillsammans ger upphov till rätt relativ acceleration!
(6 poäng)

3. En homogent sfäriskt skal med massa μ och radie a rullar utan glidning nedför ett lutande plan med lutningsvinkel θ. Beräkna dess masscentrums acceleration (uttryckt i ovan nämnda storheter samt tyngdaccelerationen g), dels med kraft- och momentekvationer, dels med en energimetod, och jämför resultaten!
(15 poäng)

4. En homogen, tunn, cirkulär skiva med radien r och massan m är vid centrum fäst mitt på en viktlös axel AB vinkelrät mot skivan. Axelns ändpunkter är lagrade i en ram, så att axeln lutar vinkeln α mot vertikalen. Skivan roterar med konstant vinkelhastighet ν relativt ramen, som i sin tur roterar med konstant vinkelhastighet ω kring vertikalen genom skivans centrum. Sök lagerkrafterna i A och B, om tyngdkraften kan försummas. Avståndet mellan A och B är a.
(10 poäng)



5. En kropp är sammansatt av ett homogent halvklot med radien r och en homogen cylinder med radien r och höjden h enligt figuren, båda av samma material med densiteten ρ. För vilka värden på parametrarna är den vertikala positionen i figuren ett stabilt jämviktsläge på ett plant underlag? Bestäm vinkelfrekvensen för små svängningar kring det (friktionen mellan kroppen och underlaget är så liten att den kan anses glida friktionsfritt)!
(10 poäng)



1) Rörelseekvationen för bilens masscentrums position i vertikalled, x, är på formen

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0 - h(t)) - b\frac{d}{dt}(x - h(t)) - mg$$

där $h(t)$ är markens höjd under bilen, k = fjäderkonstant, b = dämpkonstant, x_0 = konstant.

Efter trottoarkants passagen är $h(t)$ = konstant.

Med lämpligt val av origo har man då ekv.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad , \quad \text{som kan skrivas}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad , \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{m}.$$

Allm. lösn: $x(t) = \left(A\,c(\omega_d t) + B\,s(\omega_d t)\right)e^{-\zeta\omega_n t}$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Antag passagen sker vid tiden $t=0$.

För $t<0$ har man samma ekvation, fast med jämviktsläget $x=-h$, h = trottoarkantens höjd. $\Rightarrow$ Randvillkor: $x(0) = -h$ $\quad \dot{x}(0) = 0$.

dvs $A = -h$, $\quad -\zeta\omega_n A + \omega_d B = 0 \qquad B = -\zeta\frac{\omega_n}{\omega_d}h$

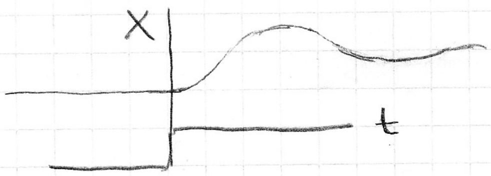
Enligt min erfarenhet av bilfärder är svängningsrörelsen något underdämpad och periodtiden ~ 1 s.

Realistiska parametervärden kan vara

$m = 10^3$ kg $\qquad h = 0.1$ m $\qquad \omega_n = 10\,s^{-1} \qquad \zeta = 0.5$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad k = 10^5$ N/m $\qquad b = 2\cdot 10^3$ Ns/m

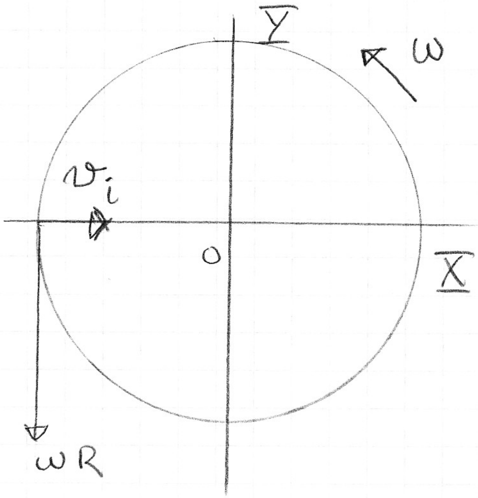
Efter passagen består rörelsen i insvängning mot nytt jämviktsläge:



Anm: En kuriositet: Om rörelseekvationen ovan gäller hela tiden säger termen $b\dot{h}$ oändlig acceleration vid tiden $t=0$. Jag tror att detta antyder en brist hos modellen, men vet för lite om bilar för att säga vari den består.

2]

Jag inför inertialsystem $\bar{X}, \bar{Y}$ i vila relativt skivans mittpunkt. (Som skivan roterar kring). Inga horisontella krafter på kulan $\Rightarrow$ kulans hastighet = konstant. Den måste då vara riktad radiellt.
Vi kan välja tid och system så att
$(\bar{X}(t), \bar{Y}(t)) = (v_i t, 0)$.



$\underline{v} = \underline{v}_{kula} - \underline{v}_{skiva} = (v_i, R\omega)$
(se fig), bildar vinkel
θ med axeln $\hat{\bar{X}}$

$R\omega = v\, s(\theta)$

$v_i = v\, c(\theta)$

a) svar: sökta vinkeln θ ges av $\sin\theta = R\omega/v$, orienterad enl fig.

b) Antag nu $(\bar{X}(t), \bar{Y}(t)) = (-R, 0)$.
Skivfixa koordinater (x, y) ges av

$$x = \bar{X}\, c(\omega t) + \bar{Y}\, s(\omega t)$$
$$y = -\bar{X}\, s(\omega t) + \bar{Y}\, c(\omega t)$$

För kulan: $(x, y) = -R(c(\omega t), s(\omega t))$

$$(\dot{x}, \dot{y}) = R\omega(s(\omega t), -c(\omega t))$$
$$(\ddot{x}, \ddot{y}) = R\omega^2(c(\omega t), s(\omega t))$$

$\underline{F}_{cor} = -2m\omega\, \hat{z} \times (\dot{x}, \dot{y}) = -2m\omega(\dot{y}, -\dot{x}) = 2mR\omega^2(c(\omega t), s(\omega t))$

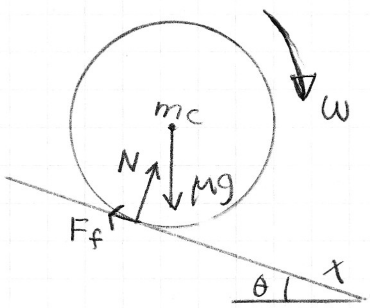
$\underline{F}_{cf} = -m\omega\, \hat{z} \times (\omega\, \hat{z} \times (x, y)) = m\omega^2(x, y) = -m\omega^2 R(c(\omega t), s(\omega t))$

Rörelseekv. $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \underline{F}_{cor} + \underline{F}_{cf}$

stämmer, för $m(\ddot{x}, \ddot{y}) - \underline{F}_{cor} - \underline{F}_{cf}$
$= (mR\omega^2 - 2mR\omega^2 + mR\omega^2)(c(\omega t), s(\omega t)) = 0$.

Lösningsskisser, tentamen i mekanik

del 2 den 11/1 - 2006.



3) Ingen glidning $\Rightarrow$ $a\omega = \dot{x}$

Rörelselagarna för vridning kring mc och mc's rörelse utför planet är

$$I\dot{\omega} = aF_f, \qquad I = \frac{2}{3}\mu a^2$$

$$\mu\ddot{x} = \mu g\, s(\theta) - F_f.$$

$$0 = \ddot{x} - a\dot{\omega} = g\,s(\theta) - \frac{F_f}{\mu} - a^2\frac{F_f}{I} = g\,s(\theta) - \left(1+\frac{3}{2}\right)\frac{F_f}{\mu}$$

$$\Rightarrow F_f = \frac{2}{5}\mu g\, s(\theta)$$

$$\ddot{x} = \left(1 - \frac{2}{5}\right) g\, s(\theta) = \underline{\underline{\frac{3}{5} g \sin\theta}}$$

Energimetod: $V = -\mu g x\, s(\theta)$

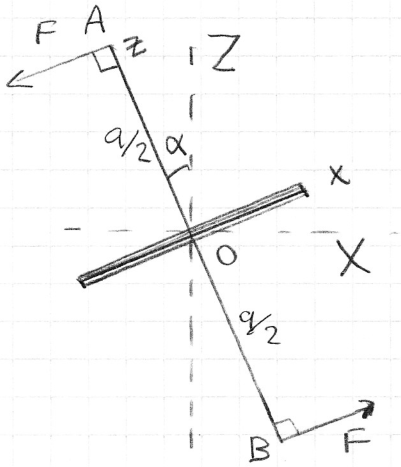
$$E_k = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2\left(1+\frac{2}{3}\right)$$

$$E = E_k + V = \frac{1}{2}\frac{5}{3}\mu\dot{x}^2 - \mu g x\, s(\theta)$$

Energikonservering: $0 = \dot{E} = \frac{5}{3}\mu\ddot{x}\dot{x} - \mu g\dot{x}\, s(\theta)$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}\ddot{x} - g\,s(\theta) = 0 \qquad \underline{\underline{\ddot{x} = \frac{3}{5} g\, s(\theta).}}$$

4) Använd rörelsemängdsmomentlagen $\dot{\underline{L}} = \underline{N}$
ramfixa koordinater (X, Y, Z) och (x, y, z) enl fig.



$$\underline{\omega}_{tot} = \nu \hat{z} + \omega \hat{Z}$$
$$= (\nu + \omega\, c(\alpha))\, \hat{z} + \omega\, s(\alpha)\, \hat{x}$$
$$\underline{L} = I_{\parallel} (\nu + \omega\, c(\alpha))\, \hat{z} + I_{\perp}\, \omega\, s(\alpha)\, \hat{x}$$
$$= L_Z \hat{Z} + L_X \hat{X} \quad \text{säg}$$
$$L_X = - I_{\parallel}\, \nu\, s(\alpha) - (I_{\parallel} - I_{\perp})\, \omega\, c(\alpha)\, s(\alpha)$$
$$\dot{\underline{L}} = L_X \dot{\hat{X}} = L_X\, \omega\, \hat{Z} \times \hat{X} = L_X\, \omega\, \hat{Y}$$
$$\underline{N} = - a F \hat{Y}$$
Skivans tröghetsmoment $I_{\parallel} = \frac{1}{2} m r^2 \quad I_{\perp} = \frac{1}{2} I_{\parallel}$

Sökta lagerkraferna enl. fig. med
$$F = - L_X\, \omega / a =$$
$$= \frac{1}{2} m r^2 \frac{\omega}{a} \left(\nu\, s(\alpha) + \frac{1}{2} \omega\, c(\alpha)\, s(\alpha) \right)$$

5] cylinderns, halvklotets och kroppens massor, masscentra, och tröghetsmoment m.a.p. sina masscentra ges av

$m_c = \pi r^2 h \rho \qquad m_h = \frac{2}{3}\pi r^3 \rho$

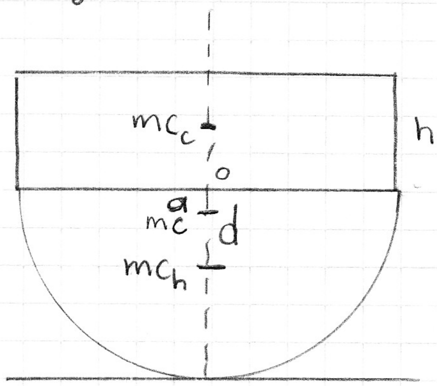
$m = m_c + m_h \qquad d = \frac{3}{8} r$

$a = (m_h d - m_c \frac{h}{2})/m = \frac{\pi}{4} r^2 (r^2 - 2h^2)\, \rho/m$

$I_c = m_c(\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{12} h^2)$

$I_h = \frac{83}{320} m_h r^2$

$I = I_c + (h/2 + a)^2 m_c + I_h + (d-a)^2 m_h$



När kroppen vrider sig rör sig mc bara vertikalt (pga inga horisontella krafter), och o bara horisontellt (pga geometrin).

Potentiella energin beror därför av vridningsvinkeln θ enl. $V = -mga\cos\theta$.

För små svängningar gäller $E_K \approx \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$ (Masscentrums hastighet $a \sin\theta\, \dot{\theta}$ ger ett försumbart bidrag till E_K).

Energikonservering ger rörelseekvationen $I\ddot{\theta} + mga\theta = 0$, som ger sökta vinkelfrekvensen $\omega^2 = mga/I$.

⇒ villkor för stabilitet: $a > 0$, dvs $r^2 > 2h^2$.