Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2013 01 14 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Peter Helgesson tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2012 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1112

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper. /LF

---

1. (a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^3z + x^2 + yz^3 = 1$ i punkten $(1, -1, 1)$. (3p)

   (b) Bestäm karaktären hos de stationära punkterna till $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2$. (3p)

   (c) Transformera uttrycket $xz'_x + yz'_y$ till polära koordinater (r, θ). (3p)

   (d) För avbildningen $(u, v) = \boldsymbol{f}(x, y)$ gäller att $u'_x = 1,\ u'_y = 2,\ v'_x = 3,\ v'_y = 4$ i en viss punkt P. Motivera att $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar kring P och beräkna $x'_u,\ x'_v,\ y'_u,\ y'_v$ i punkten $\boldsymbol{f}^{-1}(P)$. (3p)

2. (a) Beräkna $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy$, där $D = \{(x, y) : x \geq 1,\ y \geq 1,\ xy \leq 2\}$. (4p)

   (b) Punkterna $P = (2, 1)$ och $Q = (-3, 2)$ är ändpunkterna på en diameter i en cirkel. Om den cirkeln genomlöps i positiv led, är C halvcirkelbågen från P till Q. Beräkna $\displaystyle\int_C (y^2 - 6xy)\, dx + (2xy - 3x^2)\, dy$. (4p)

3. För tre godtyckliga positiva reella tal $x,\ y$ och z gäller olikheten
$$(xyz)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(x + y + z)$$
Detta uttrycker att det geometriska medelvärdet av tre positiva tal aldrig överskrider det aritmetiska medelvärdet. Detta kan bevisas på olika sätt, men bevisa här olikheten genom att maximera produkten av tre positiva tal med given summa. (6p)

4. Beräkna medelvärdet av z-koordinaten i den området $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2,\ \ a \leq z \leq b\}$, där $0 < a < b$ (dvs z-koordinaten för tyngdpunkten av K vid homogen massfördelning). (7p)

5. Kurvan C given av parametriseringen $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, \sin 2t),\ 0 \leq t < 2\pi$, ligger på ytan $z = 2xy$ (eller hur?). En partikel rör sig utmed hela C och påverkas av kraftfältet $(\cos x + y^3, \sin y + z^2, x)$. Beräkna det uträttade arbetet. (7p)

6. Integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)^3}\, dx$ kan beräknas exakt genom att man utgår från en mera lättberäknad integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x, y)\, dx$ med en parameter y. Därefter utför man lämpliga operationer på den senare integralen för att närma sig den förra. Beräkna den förra integralen på så sätt med en lämpligt vald integrand $f(x, y)$. Motivera väl! (6p)

7. (a) Bevisa formeln $f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$ (med $|\boldsymbol{v}| = 1$) för en differentierbar funktion f. (4p)

   (b) Formulera Gauss sats. (3p)

8. Formulera och bevisa Greens formel. (7p)

Lösningsanvisningar och svar till tentan 2013 01 19

1. (a) Ytan är en funktionsyta $f = 1$. Beräkna $\nabla f(1, -1, 1) = (5, 1, -2)$. Då är tangentplanets ekvation: $\nabla f(1, -1, 1) \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 0$, vilket ger svaret $\mathbf{5x + y - 2z = 2}$.

   (b) Lös $\nabla f = \mathbf{0}$. Lösningarna $(0, 0)$ och $(4, 12)$ är de stationära punkterna. Undersök den kvadratiska formen $Q(h) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$ i vardera punkten. I $(0, 0)$ visar den sig vara indefinit - alltså en **sadelpunkt i** $\mathbf{(0, 0)}$. I $(4, 12)$ är den positivt definit - därmed en **lokal minimipunkt i** $\mathbf{(4, 12)}$.

   (c) Med $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ har vi $z'_r = z'_x x'_r + z'_y y'_r = z'_x \cos\theta + z'_y \sin\theta$, så $rz'_r = z'_x r\cos\theta + z'_y r\sin\theta = xz'_x + yz'_y$. Alltså: $\boldsymbol{xz'_x + yz'_y = rz'_r}$.

   (d) Om funktionaldeterminanten $\det \boldsymbol{f}'(P) \neq \mathbf{0}$, så är enligt inversa funktionssatsen $\boldsymbol{f}$ lokalt inverterbar kring P. Inversen är inversa matrisen till $\boldsymbol{f}'(P)$.

$$\boldsymbol{f}'(P) = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   Då $\det \boldsymbol{f}'(P) = -2$, så har vi inversen

$$(\boldsymbol{f}^{-1})' = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}$$

   och svaren kan avläsas element för element.

2. (a) Upprepad integration, t ex först i y-led över $1 \leq y \leq 2/x$, sedan i x-led över $1 \leq x \leq 2$ ger oss svaret $\mathbf{\ln 4 - \frac{3}{4}}$.

   (b) Differentialformen är *exakt* med potentialen $U(x, y) = xy^2 - 3x^2y$, och integralen beror då bara på start- och slutpunkt: $I = U(-3, 2) - U(2, 1) = \mathbf{-56}$.

3. Vi maximerar alltså $f = xyz$ under bivillkoret $x + y + z = a,\ a > 0$, där $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Vi får då en kompakt mängd (triangel) på vilken f garanterat har både största och minsta värde enligt en sats. Minsta värdet (på hela randen av triangeln) är noll, i det inre är $f > 0$ och där finns maximum. Använd t ex Lagrange multiplikatormetod, som ger en enda kandidat till maximum, nämligen $x = y = z = a/3$ med $f_{max} = (a/3)^3$. På varje plan $x + y + z = a$ är alltså $xyz \leq (a/3)^3 = ((x + y + z)/3)^3$, varur den sökta olikheten följer i hela första oktanten.

4. Medelvärdet är

$$z_T = \frac{\iiint_K z\, dxdydz}{\iiint_K dxdydz}$$

   Båda integralerna beräknas med upprepad integration, snitta vinkelrätt mot z-axeln. Vi integrerar då först över cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq z$, sedan över intervallet $a \leq z \leq b$. Man får då

$$\iiint_K dxdydz = \frac{\pi(b^3 - a^3)}{3}, \quad \iiint_K z\, dxdydz = \frac{\pi(b^4 - a^4)}{4}$$

   och efter förenkling $\mathbf{z_T = \dfrac{3}{4}\dfrac{(a + b)(a^2 + b^2)}{a^2 + ab + b^2}}$.

5. Ett fall för Stokes sats! Orienteringen av kurvan C gör att ytan Y (dvs $z = 2xy$ innanför C) ska ha normal ”uppåt”. Arbetet är då, med $\boldsymbol{r} = (x, y, 2xy)$, $\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (-2y, -2x, 1)$ och D = enhetscirkelskivan,

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N} dS = \iint_D (-4xy, -1, -3y^2) \cdot (-2y, -2x, 1) dxdy = \cdots = -\frac{3\pi}{4}$$

   Här har ett par termer kapats då deras integral över D blir noll av symmetriskäl, och polära koordinater har använts till slut. **Arbetet är** $\mathbf{-3\pi/4}$.

6. Välj $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y},\ y > 0$ och sätt $F(y) = \int_0^\infty f(x, y)dx$. Vår integral blir då $F''(1)/2$. Detta förutsätter att derivering kan flyttas in under integraltecknet, vilket ska motiveras (kommer här senare, liksom räknedetaljer!). Gör man på detta sätt, finner man att integralen blir $\mathbf{3\pi/16}$.