

Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2012 08 24 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosor.

Telefon: Urban Larsson, tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2012 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida:

<http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1112>

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

/LF

-
1. (a) Funktionen $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 8$ har stationär punkt i $(1, 1)$ (bland annat). Avgör om detta är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt. (3p)
 - (b) En differentierbar funktion $f(x, y, z)$ växer i origo snabbast i riktningen $(1, 2, 2)$. I den riktningen är riktningsderivatan 6. Beräkna funktionens riktningsderivata i origo i riktning mot $(2, 2, 1)$. (2p)
 - (c) Beräkna kurvintegralen $\int_C y^2 dx - x^2 dy$, där C är räta linjen från $(1, 1)$ till $(3, 5)$. (3p)
 - (d) Låt $f(x, y)$ vara differentierbar, och $F(r, \theta) = f(x, y)$, där (r, θ) är polära koordinater i planet. Visa att $|\nabla f|^2 = (F'_r)^2 + \left(\frac{F'_\theta}{r}\right)^2$. (3p)
2. (a) Skriv den upprepade integralen $\int_1^e \left(\int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right) dx$ som en upprepad integral i omvänd integrationsordning. (2p)
 - (b) Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + 2y^2)^2} dx dy$, där D är hela första kvadranten. (7p)
3. Hastighetsvektorn för ett vätskeflöde är $\mathbf{v} = (x + yz, xz - y, 2z^2)$. Beräkna den vätskevolym som per tidsenhet strömmar ut från området som begränsas av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ och konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hastigheter och rumskoordinater är givna i SI-enheter. (7p)
4. Låt Y vara ytan $\{(x, y, z) : x^2 + y + z^2 = 10, y \geq 1\}$ med normalriktning i positiv y -led och beräkna yintegralen $\iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$ med fältet $\mathbf{F} = (2xyz + 5z, e^x \cos yz, x^2y)$. (5p)
5. Låt p, q och r vara fixa positiva tal. Bestäm största värdet av uttrycket $x^p y^q z^r$, då $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ och $x + y + z = 1$. Motivera väl! (7p)
6. Bestäm $H(x) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$ för $x > 0$ som elementär funktion. (7p)
7. Formulera och bevisa satsen om *Taylor's formel* i två variabler. (7p)
8. (a) Formulera och bevisa satsen om att kurvintegralen av ett potentialfält är en potentialdifferens. (5p)
 - (b) Formulera *Implicita funktionssatsen* (ej bevis). (2p)

Lösningar till tentan 2012 08 24

1. (a) Vi undersöker funktionens första- och andraderivator:

$$f'_x = 4x^3 - 4y, \quad f'_y = 4y^3 - 4x, \quad f''_{xx} = 12x^2, \quad f''_{xy} = -4, \quad f''_{yy} = 12y^2$$

Då ser vi att $f'_x(1, 1) = f'_y(1, 1) = 0$ (sant att $(1, 1)$ är stationär punkt). Vi får också den kvadratiske form som utgör andra ordningens termer i Taylors formel, med $h = x - 1$, $k = y - 1$:

$$Q = f''_{xx}(1, 1)h^2 + 2f''_{xy}(1, 1)hk + f''_{yy}(1, 1)k^2 = 12h^2 - 8hk + 12k^2 = 12\left(\left(h - \frac{k}{3}\right)^2 + \frac{8k^2}{9}\right)$$

Genom kvadratkompletteringen ser vi att Q är positivt definit, vilket innebär att $(1, 1)$ är ett **lokalt minimum**.

- (b) Eftersom riktningderivatan är maximal i gradientens riktning och eftersom dess värde då blir beloppet av gradienten, kan vi fastslå att gradienten är $\nabla f(0, 0, 0) = 2(1, 2, 2)$. Vi normerar riktningsektorn: $e = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ och beräknar den efterfrågade riktningderivatan: $f'_e(0, 0, 0) = e \cdot \nabla f(0, 0, 0) = \frac{1}{3}(2, 2, 1) \cdot 2(1, 2, 2) = \frac{16}{3}$

- (c) Parametrisera sträckan: $\mathbf{r}(t) = (1, 1) + t((3, 5) - (1, 1)) = (1 + 2t, 1 + 4t)$, $0 < t < 1$.

Integralen kan nu beräknas:
$$\int_C y^2 dx - x^2 dy = \int_0^1 (y(t)^2 x'(t) - (x(t)^2 y'(t))) dt = \int_0^1 ((1 + 4t)^2 \cdot 2 - (1 + 2t)^2 \cdot 4) dt = \int_0^1 (16t^2 - 2) dt = \frac{10}{3}.$$

- (d) Polära koordinater: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Med kedjeregeln får vi:

$$F'_r = f'_x \cos \theta + f'_y \sin \theta, \quad F'_\theta = f'_x(-r \sin \theta) + f'_y(r \cos \theta)$$

Härav följer att

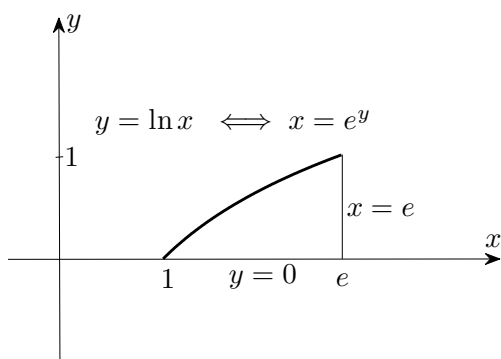
$$\begin{aligned} (F'_r)^2 + \left(\frac{F'_\theta}{r}\right)^2 &= (f'_x \cos \theta + f'_y \sin \theta)^2 + (f'_x(-\sin \theta) + f'_y(\cos \theta))^2 = \\ &= (f'_x)^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (f'_y)^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 = |\nabla f|^2 \end{aligned}$$

så som det skulle bli.

2. (a) Vi beskriver integrationsmängden på två sätt (se nedanstående figur):

$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, e^y \leq x \leq e\}.$$

Därmed har vi
$$\int_1^e \left(\int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{e^y}^e f(x, y) dx \right) dy$$



- (b) Vi väljer en följd av uttömmande mängder: $D_n = x^2 + 2y^2 \leq n^2$.

Vi har då att beräkna
$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2+2y^2)^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(1+x^2+2y^2)^2} dx dy$$

Med elliptisk-polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta$, $J = \frac{r}{\sqrt{2}}$ övergår den senare integralen i

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^n \frac{r}{\sqrt{2}(1+r^2)^2} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{1+r^2} \right]_0^n = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1+n^2} \right)$$

Vår generaliserade integral är gränsvärdet av detta då $n \rightarrow \infty$, dvs $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

3. Vi vill beräkna vätskeflödet genom randytan till det beskrivna området, här kallat K . Detta är ytintegralen

$$I = \iint_{\partial K} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, dS \text{ med } \mathbf{N} \text{ utåt från } K. \text{ Gauss sats är tillämplig här; enligt denna sats är integralen lika med}$$

$$I = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx dy dz = \iiint_K \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz - y) + \frac{\partial}{\partial z}(2z^2) \right) dx dy dz = \iiint_K 4z \, dx dy dz$$

Vårt område K lämpar sig för rymdpolära koordinater.

Det övergår då i $K' = \{(r, \theta, \phi) : 0 \leq r \leq \sqrt{8}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ och Jacobianen är $r^2 \sin \theta$. Nu blir

$$I = \iiint_{\partial K'} 4r \cos \theta r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{8}} 4r^3 \, dr = 2\pi \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[r^4 \right]_0^{\sqrt{8}} = 32\pi$$

Vätskan flödar alltså ut från K med $32\pi \text{ m}^3/\text{s}$.

4. Vår yta Y är en paraboloid med y -axeln som symmetriaxel. Dess randkurva ∂Y är $x^2 + y^2 = 9, y = 1$. Denna kurva är (med samma orientering) också randkurva till ytan Z som ges av $x^2 + y^2 \leq 9, y = 1$ med normal i positiv y -led.

Enligt Stokes sats är nu vår kurvintegral över båda dessa orienterade ytor lika med kurvintegralen $\int_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$.

Vi skulle kunna räkna ut denna integral, men det är ännu enklare att gå på ytintegralen över den plana ytan, dvs

$\iint_Z (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS$. Här är $\mathbf{N} = (0, 1, 0)$ och rotationen av \mathbf{F} kan vi beräkna:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz + 5z & e^x \cos yz & x^2 y \end{vmatrix} = (\dots, 5, \dots)$$

Här behövs ju bara y -koordinaten, eftersom vi ska multiplicera skalärt med $(0, 1, 0)$! Vi landar nu på en dubbelintegral:

$$\iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_Z (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_{x^2+z^2 \leq 9} (\dots, 5, \dots) \cdot (0, 1, 0) \, dx dz = 5 \iint_{x^2+z^2 \leq 9} dx dz$$

Den sista integralen uttrycker arean av en cirkelskiva med radien 3. Vårt svar blir därmed 45π .

5. Vi ska maximera funktionen $f(x, y, z) = x^p y^q z^r$ på en triangelyta $M = \{(x, y, z) : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. f är kontinuerlig, M är kompakt, så existensen av både maximum och minimum av f är garanterad på M (sats). Eftersom $f = 0$ på randen och $f > 0$ i det inre, så återstår att söka extrempunkter i triangelns inre. Detta kan formuleras som ett bivillkorsproblem: sök extrempunkter till f under bivillkoret $g = 0$, där $g(x, y, z) = x + y + z - 1$. Minst en sådan extrempunkt (maximum) måste då finnas i triangelns inre. Eftersom f och g är differentierbara, ska en sådan punkt vara en där ∇f och ∇g är linjärt beroende, dvs eftersom $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \nabla P = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} px^{p-1}y^qz^r = \lambda \\ qx^py^{q-1}z^r = \lambda \\ rx^py^qz^{r-1} = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} py = qx \\ pz = rz \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Om vi löser ut y och z i x och sätter in i sista ekvationen (bivillkoret), får vi

$$x \left(1 + \frac{q}{p} + \frac{r}{p} \right) = 1$$

vilket ger som enda lösning:

$$(x, y, z) = \left(\frac{p}{p+q+r}, \frac{q}{p+q+r}, \frac{r}{p+q+r} \right), \text{ med } \mathbf{f} = \frac{\mathbf{p}^p \mathbf{q}^q \mathbf{r}^r}{(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r})^{\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}}}$$

vilket därmed måste vara det sökta största värdet.

6. Vi kan försöka lösa problemet genom att derivera $H(x) = \int_0^\infty f(x, t) dt$,

där $f(x, t) = \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}$ och $f'_x(x, t) = e^{-xt^2}$. Dessa funktioner uppfyller följande villkor:

- f och f'_x är kontinuerliga för $x > 0, t \geq 0$
Singulariteten i $t = 0$ är skenbar: sätt $f(x, 0) = x$ som är gränsvärdet då $t \rightarrow 0$.
- Integralen $H(x) = \int_0^\infty f(x, t) dt$ är konvergent för alla reella x ,
då $0 < f(x, t) \leq \frac{1}{t^2}$ och $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = 1$ (jämförelsesatsen för generaliserade integraler),
intervallet $[0, 1]$ är inget problem enligt ovan.
- $|f'_x(x, y)| \leq e^{-pt^2}$ för $p \leq x \leq q$ och $\int_0^\infty e^{-pt^2} dt$ är konvergent i varje kompakt delintervall $[p, q]$ av $(0, \infty)$.

Enligt en sats kan vi då för alla $x > 0$ derivera enligt formeln $H'(x) = \int_0^\infty f'_x(x, t) dt$ vilket ger

$$H'(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2} dt = \{ \sqrt{x}t = s, dt = \frac{1}{\sqrt{x}} ds \} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Eftersom $H(0) = 0$ ger detta slutligen $\mathbf{H(x)} = \sqrt{\pi\mathbf{x}}$.