

Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2011 03 17 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Urban Larsson, tel 070-3088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2011 ingår.

Lösningar samt uppgifter om granskning av rättade tentor kommer på kursens hemsida:

<http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1011>

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

-
- Bestäm tangentplanet till ytan $z = 4 + 2x^2y - y^3$ i punkten $(-1, 1, 5)$. (3p)
 - Vilken typ av stationär punkt har funktionen $f(x, y) = 2 + x^2 + 4xy + y^2 + 5x^2y - 3xy^3$ i origo? Motivera! (3p)
 - Ytan $\cos x \sin y \cos z + \sin x \cos y \sin z + \cos x \cos y \cos z = 1$ definierar en av variablerna som en funktion av de två andra lokalt kring origo. Vilken av dem är funktion av de andra? Motivera! (3p)
 - Visa att kraftfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \sin yz, 1 + x \sin yz + xyz \cos yz, xy^2 \cos yz)$ har en potential och beräkna det arbete \mathbf{F} uträttar på en partikel som förflyttas längs en rät linje från $(1, \pi, \frac{1}{2})$ till $(\frac{1}{2}, 1, \pi)$. (4p)
 - Beräkna massan av kroppen $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, y \geq 0, z \geq 0\}$ vars densitet ges av funktionen $\rho(x, y, z) = \frac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$. (7p)
 - Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy$, där γ är den halvcirkel som går genom första kvadranten från origo till punkten $(1, 0)$. (7p)
 - Använd Stokes sats för att beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, \frac{x^3}{3}, xy)$ och där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och ytan $z = y^2 - x^2$ orienterad moturs sedd ”uppifrån”. (7p)
 - Temperaturen i området $D = \{(x, y, z) : 4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16\}$ ges av funktionen $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 50$. I vilken punkt i området D är temperaturen *lägst*? (7p)
 - Två räta cirkulära cylindrar har båda radien 1. Cylindrarnas axlar skär varandra under rät vinkel. (6p)
 - Beräkna volymen av snittet mellan cylindrarna.
 - Beräkna arean av den yta som begränsar cylindrarnas snitt.
 - Bevisa att varje reellvärd C^1 -funktion av två variabler är differentierbar. (7p)
 - Formulera Gauss sats. (3p)
 - Härled formeln (3p)

$$\iiint_D (\nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g) \, dx dy dz = \iint_{\partial D} f \nabla g \cdot \mathbf{N} \, dS$$

under följande förutsättningar: f och g är C^2 -funktioner, D , ∂D och \mathbf{N} är som i Gauss sats. Symbolen Δ står för Laplaceoperatorn $\nabla \cdot \nabla$.

Lösningar till tentan MVE035 2011-03-17

1. (a) **Metod I:** Tangentplanet ges av ekvationen

$$z = f(-1, 1) + f'_x(-1, 1)(x + 1) + f'_y(-1, 1)(y - 1)$$

där $f(x, y) = 4 + 2x^2y - y^3$ och därmed $f(-1, 1) = 5$, $f'_x(-1, 1) = -4$, $f'_y(-1, 1) = -1$.

Metod II: Ytan uppfattas som nivåytan $g(x, y, z) = 4$ till funktionen $g(x, y, z) = z - 2x^2y + y^3$, varvid $\nabla g(-1, 1, 5)$ är normalvektor till det sökta tangentplanet. Planets ekvation blir då

$$\nabla g(-1, 1, 5) \cdot (x + 1, y - 1, z - 5) = 0.$$

Tangentplanetns ekvation är $4(x + 1) + (y - 1) + (z - 5) = 0$, eller på vanlig normalform $\underline{4x + y + z = 2}$.

- (b) Den kvadratiske formen i Taylorutvecklingen av $f(x, y)$ i origo kan utläsas direkt ur funktionsuttrycket: $Q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$. Efter kvadratkomplettering får vi $Q(x, y) = (x + 2y)^2 - 3y^2$, som är *indefinit* ($Q(1, 0) > 0$, $Q(-2, 1) < 0$). Då vet vi att $(0, 0)$ är en **sadelpunkt**.

- (c) Ytan är en nivåyta till funktionen $f(x, y, z) = \cos x \sin y \cos z + \sin x \cos y \sin z + \cos x \cos y \cos z$. Vi kontrollerar de partiella derivatorna i origo: $f'_x(0, 0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0, 0) = 1$, $f'_z(0, 0, 0) = 0$. Enligt implicita funktionssatsen innebär $f'_y(0, 0, 0) \neq 0$ att **y lokalt är en C^1 -funktion av x och z**.

(Även x eller z skulle möjligen kunna uttryckas lokalt som funktion av de övriga, men implicita funktionssatsen lovar ingenting! Här räcker det dock att ange en variabel som med visshet är en funktion av de övriga.)

- (d) Vi söker en potential, dvs en C^1 -funktion U som uppfyller $\nabla U = \mathbf{F}$.

$$U'_x = y \sin yz \Rightarrow U(x, y, z) = xy \sin yz + g(y, z)$$

$$U'_y = 1 + x \sin yz + xyz \cos yz \Rightarrow g'_y(y, z) = 1 \Rightarrow g(y, z) = y + h(z)$$

$$U'_z = xy^2 \cos yz \Rightarrow h'(z) = 0, \text{ vi kan välja } h(z) = 0.$$

Alltså: **en potential är** $U(x, y, z) = xy \sin yz + y$.

Vi kan nu beräkna arbetet som en potentialdifferens: $W = U(\frac{1}{2}, 1, \pi) - U(1, \pi, \frac{1}{2}) = \underline{1 - 2\pi}$.

2. Vi byter till rymdpolariska koordinater $(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ med Jacobianen $J = r^2 \sin \theta$. Området K avbildas då på $K' = \{(r, \theta, \phi) : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \pi\}$. Massan blir

$$\begin{aligned} m &= \iiint_K \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{K'} \frac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz = \iiint_{K'} \frac{r \cos \theta}{1 + r^2} r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{1 + r^2} \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^\pi 1 \, d\phi = \int_0^{\sqrt{2}} \left(r - \frac{r}{1 + r^2}\right) \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta)^2 \, d\theta \int_0^\pi 1 \, d\phi = \\ &= \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + r^2)\right]_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} (\sin \theta)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi = \underline{\frac{\pi}{4} (2 - \ln 3)} \end{aligned}$$

3. (a) Med $D =$ halvcirkelskivan med medelpunkt i $(\frac{1}{2}, 0)$ och radie $\frac{1}{2}$, med ∂D positivt orienterad och med $L =$ x-axeln från origo till $(1, 0)$ så blir $\partial D = -\gamma + L$. Det integrerade fältet är C^1 i hela planet, så vi kan använda Greens formel:

$$\int_{\partial D} (e^{x+y} - y) \, dx + (e^{x+y} - 1) \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^{x+y} - 1) - \frac{\partial}{\partial y} (e^{x+y} - y)\right) \, dx dy = \iint_D 1 \, dx dy = \text{area}(D) = \frac{\pi}{8}$$

Samtidigt är

$$\int_{\partial D} (e^{x+y} - y) \, dx + (e^{x+y} - 1) \, dy = - \int_\gamma (e^{x+y} - y) \, dx + (e^{x+y} - 1) \, dy + \int_L (e^{x+y} - y) \, dx + (e^{x+y} - 1) \, dy$$

så

$$\int_\gamma (e^{x+y} - y) \, dx + (e^{x+y} - 1) \, dy = \int_L (e^{x+y} - y) \, dx + (e^{x+y} - 1) \, dy - \frac{\pi}{8} = \int_0^1 e^x \, dx - \frac{\pi}{8} = \underline{e - 1 - \frac{\pi}{8}}$$

- (b) Fältet \mathbf{F} är C^1 överallt, ytan $Y : \mathbf{r}(x, y) = (x, y, y^2 - x^2)$ där $(x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ och dess rand C är C^1 . Med C orienterad enligt beskrivningen och Y med normal "uppåt" ger då Stokes sats:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_Y \text{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D \nabla \times (x^2y, \frac{x^3}{3}, xy) \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) \, dx dy = \iint_D (x, -y, 0) \cdot (2x, -2y, 1) \, dx dy = \\ &= \iint_D 2(x^2 + y^2) \, dx dy = (\text{polära koordinater}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r^2 \cdot r \, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \underline{\pi} \end{aligned}$$

4. Området D är kompakt (begränsat av en ellipsoid), funktionen T är kontinuerlig. Därmed garanteras existensen av både största och minsta värde av T på D av en sats. Dessa värden kan antas i stationära punkter i det inre av D (T har partiella derivator överallt) eller så antas de på randen av D .

Vi undersöker T 's stationära punkter. Eftersom $\nabla T(x, y, z) = (16x, 4z, 4y - 16)$ så ser vi att enda stationära punkten $(0, 4, 0)$ tillhör randen av D .

Återstår en undersökning av ∂D . Vi söker då minimum av T under bivillkoret $g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0$. ∂D är också en kompakt mängd, så även här finns det vi söker på g av ovanstående sats. Varje punkt av $\partial D = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$ är en inre punkt till $D_T \cap D_g$ och $\nabla g \neq \mathbf{0}$ på hela ∂D vilket innebär att minimipunkten är en lösning till systemet

$$\begin{cases} \nabla T = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x = \lambda 8x \\ 4z = \lambda 2y \\ 4y - 16 = \lambda 8z \\ 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16 \end{cases}$$

Vi ser att första ekvationen ger två fall: $\lambda = 2$ eller $x = 0$. Vi testar vad detta ger i de övriga ekvationerna.

Fallet $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 4z = 4y \\ 4y - 16 = 16z \\ 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16 \end{cases}$$

som ger $z = y = -\frac{4}{3}$ och $x = \pm\frac{4}{3}$, alltså punkterna $(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

Fallet $x = 0$:

$$\begin{cases} 4z = 2\lambda y \\ 4y - 16 = 8\lambda z \\ y^2 + 4z^2 = 16 \end{cases}$$

De två första ekvationerna ger $4z^2 = y(y - 4)$ (multiplicera med z respektive y), vilket insatt i den tredje ger $y^2 - 2y = 8$ med lösningarna $y = 4$, $y = -2$. Detta ger oss punkterna $(0, 4, 0)$ och $(0, -2, \pm\sqrt{3})$.

Vi jämför nu funktionsvärdena i alla de punkter som är lösningar till vårt system:

$$T(0, 4, 0) = 50$$

$$T(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{384}{9} + 50 > 50$$

$$T(0, -2, -\sqrt{3}) = 50 + 24\sqrt{3} > 50$$

$$T(0, -2, \sqrt{3}) = 50 - 24\sqrt{3} < 50.$$

Tydligt är temperaturen **lägst i punkten $(0, -2, \sqrt{3})$** .

Variant: Undersökningen på randen kan också göras genom att man substituerar $x = x(y, z)$ (egentligen substituerar man x^2) ur ellipsoidens ekvation och sedan undersöker $T_1(y, z) = T(x(y, z), y, z)$ i området $y^2 + 4z^2 \leq 16$.

5. Om vi väljer cylinderaxlarna som z -axeln respektive x -axeln så har vi

$$\text{Cylinder I: } x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Cylinder II: } y^2 + z^2 = 1$$

Om vi "tittar in" i cylinder I uppifrån så ser vi närmaste begränsningsytan som utgörs av den del av cylinder II som ligger inom enhetscirkeln, dvs man ser ytan $z = \sqrt{1 - y^2}$ i området $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Från motsatta hållet ser vi ytan $z = -\sqrt{1 - y^2}$ inom D .

- (a) Volymen V är området mellan de nämnda ytorna, dvs (om vi låter bli polära koordinater!)

$$V = \iint_D (\sqrt{1 - y^2} - (-\sqrt{1 - y^2})) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1 - y^2}}^{\sqrt{1 - y^2}} 2\sqrt{1 - y^2} dx = \int_{-1}^1 4(1 - y^2) dy = \frac{16}{3}$$

- (b) Arean A består av fyra kongruenta ytor, av vilka en ges av $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - y^2})$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Vi får

$$|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = |(0, \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, 1)| = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Arean blir

$$\begin{aligned} A &= 4 \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dx dy = (\text{generaliserad, skär av } y\text{-intervallet i ändarna}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dx dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \int_{-1 + \frac{1}{n}}^{1 - \frac{1}{n}} dy \int_{-\sqrt{1 - y^2}}^{\sqrt{1 - y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \int_{-1 + \frac{1}{n}}^{1 - \frac{1}{n}} 2 dy = \lim_{n \rightarrow \infty} 8(2 - \frac{2}{n}) = \mathbf{16} \end{aligned}$$

Med en annan parametrisering kan man undvika generaliserad integral, men räkningarna blir enkla med x och y .

- 7b. Kort utan detaljer: man använder Gauss sats på ytintegralen av $\mathbf{F} = f\nabla g \cdot \mathbf{N}$, som då blir lika med trippelintegralen av $\text{div}(f\nabla g)$ som beräknas och visar sig vara $\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$.