

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2010-08-24, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Peter Lindroth, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.

Fyll i omslaget ordentligt.

1. Låt $F(x, y, z) = x^z + yz + x \sin(\pi y)$.
 - a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x, y, z) = 3$ i punkten $(1, 1, 2)$. (4p)
 - b) Är nivåytan $F(x, y, z) = 3$ lokalt kring $(1, 1, 2)$ en funktionsyta $z = f(x, y)$? (2p)

2. Lös differentialekvationen (DE) $\cosh(x) f'_x - y \sinh(x) f'_y = 2y \cosh^3(x)$.
 [Ledning: inför nya koordinater $u = x$ och $v =$ en karakteristisk koordinat till (DE)]. (7p)

3. Beräkna volymen av den kropp $K \subseteq \mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna
 $x^4 - 4 \leq y \leq 2 - x^2$, $0 \leq z \leq 3 - x^2$. (7p)

4. Finns det $\alpha \in \mathbb{R}$ så att $\mathcal{F}(x, y) = \left(\frac{y^2 (x^2 + y^2)^\alpha}{x^2}, -\frac{y (x^2 + y^2)^\alpha}{x} \right)$ är konservativt i halvplanet $x > 0$? Om ja, bestäm för detta (dessa) α en potential till \mathcal{F} i $x > 0$. (7p)

5. Låt $\mathcal{A}(x, y, z) = (x^2 - y^3 \cos(z), y^2 + x^3 \cos(z), (x^2 - y^2) \cos(z))$
 och $Y : 2x^2 + 2y^2 + 3(z-3)^2 = 32, z \geq 0$.
 - a) Har \mathcal{A} en potential i \mathbb{R}^3 ? Har \mathcal{A} en vektorpotential i \mathbb{R}^3 ? (4p)
 - b) Beräkna flödet av rot \mathcal{A} genom Y i riktning bort från origo
 - b1) med hjälp av Gauss sats b2) med hjälp av Stokes sats. (4p var) (8p)

6. Vilka värden antar $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ på cirkeln $(x-2)^2 + y^2 = 3$? (7p)

7. Visa att om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är C^1 i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ så är f differentierbar i Ω . (7p)

8. Visa att om $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ är C^1 i en öppen, bågvis sammanhängande mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ och
 $\int_C \mathcal{F} \bullet d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i Ω så har \mathcal{F} en potential i Ω ($2 \leq m \in \mathbb{N}$). (7p)

Tentamen i flervariabelanalys för F1/TM1 (mve035), 10-08-24

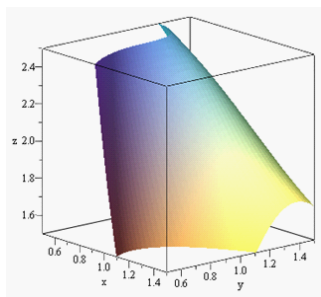
uppg. 1

$F(x, y, z) = x^z + yz + x \sin(\pi y)$ är C^1 i $\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
 $\text{grad } F(x, y, z) = (zx^{z-1} + \sin(\pi y), z + \pi x \cos(\pi y), x^z \ln x + y)$.

Punkten $(1, 1, 2)$ ligger i Ω och $F(1, 1, 2) = 3$.

- a) Tangentplanet till ytan $F(x, y, z) = 3$ i punkten $(1, 1, 2)$ har ekvationen
 $\text{grad } F(1, 1, 2) \bullet (x - 1, y - 1, z - 2) = (2, 2 - \pi, 1) \bullet (x - 1, y - 1, z - 2) =$
 $= 2x - 2 + (2 - \pi)y - 2 + \pi + z - 2 = 2x + (2 - \pi)y + z + \pi - 6 = 0$.
- b) $F'_z(1, 1, 2) = 1 \neq 0$, implicita funktionsssatsen ger att ytan $F(x, y, z) = 3$ lokalt i punkten $(1, 1, 2)$ är en (C^1-) funktionsyta.

svar: $2x + (2 - \pi)y + z = 6 - \pi$. Så ser ytan $F(1, 1, 2) = 3$ ut nära $(1, 1, 2)$:



uppg. 2

Vi bestämmer en karakteristisk koordinat v till differentialekvationen
 $(DE) \cosh(x) f'_x - y \sinh(x) f'_y$ genom att lösa $(*) y' = \frac{-y \sinh x}{\cosh x}$:

$$(*) \Leftrightarrow \cosh(x) y' + y \sinh(x) = 0 \Leftrightarrow (\cosh(x) y)' = 0 \Leftrightarrow \cosh(x) y = c.$$

Vi väljer alltså som nya variabler $v = \cosh(x) y$ och $u = x$ (t. ex.) och får då:

$$\cosh(x) f'_x - y \sinh(x) f'_y = 2y \cosh^3(x) \quad \text{blir i } u, v\text{-planet}$$

$$\cosh(x) (1 \cdot f'_u + y \sinh(x) f'_v) - y \sinh(x) (0 \cdot f'_u + \cosh(x) f'_v) = \cosh(x) f'_u =$$

$$= 2y \cosh^3(x) \Leftrightarrow f'_u = 2v \cosh u \text{ med lösningen } f(u, v) = 2 \sinh(u) v + g(v).$$

svar: $f(x, y) = y \sinh(2x) + g(y \cosh x)$ där g är en godt. C^1 -funktion

uppg. 3

På $D = \{(x, y) : x^4 - 4 \leq y \leq 2 - x^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ är $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

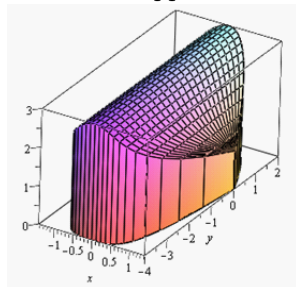
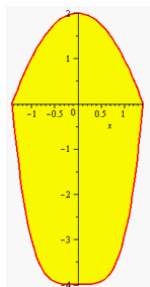
(ty $x^4 - 4 \leq 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 6 = (x^2 - 2)(x^2 + 3) \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}$)

och $f(x, y) = 3 - x^2 \geq 0$, kroppen $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 3 - x^2\}$

$$\text{har då volymen } m(K) = \iint_D \left(\int_0^{3-x^2} dz \right) dx dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^4-4}^{2-x^2} (3-x^2) dy \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (3-x^2)(2-x^2-x^4+4) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (18+x^6-2x^4-9x^2) dx = \\
&= 2 \left(18\sqrt{2} + \frac{(\sqrt{2})^7}{7} - \frac{2(\sqrt{2})^5}{5} - 3(\sqrt{2})^3 \right) = 8\sqrt{2} \left(3 - 4 \cdot \frac{1}{35} \right) = \frac{8\sqrt{2}(105-4)}{35}.
\end{aligned}$$

området D och kroppen K :



svar: $\frac{808\sqrt{2}}{35}$

uppg. 4

$$\mathbb{F}(x, y) = \left(\frac{y^2(x^2+y^2)^\alpha}{x^2}, -\frac{y(x^2+y^2)^\alpha}{x} \right) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

I halvplanet $x > 0$ är P och Q C^1 och

$$Q'_x(x, y) = -y \frac{2\alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}x^2 - (x^2+y^2)^\alpha}{x^2} = \frac{y(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{x^2} (x^2 + y^2 - 2\alpha x^2),$$

$$P'_y(x, y) = \frac{2y(x^2+y^2)^{\alpha-1} + \alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}2y^3}{x^2} = \frac{y(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{x^2} (2(x^2 + y^2) + 2\alpha y^2),$$

alltså \mathbb{F} konservativt i $x > 0 \Leftrightarrow Q'_x(x, y) = P'_y(x, y)$ i $x > 0 \Leftrightarrow [y \neq 0]$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x^2 = 2(x^2 + y^2) + 2\alpha y^2 \Leftrightarrow -2\alpha(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$[x^2 + y^2 \neq 0] \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}.$$

För $\alpha = -\frac{1}{2}$ finns då en potential $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ så att för $x > 0$

$$\begin{cases} \Phi'_x = P(x, y) = \frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \Phi'_y = Q(x, y) = \frac{-y}{x\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x} + g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi'_x = -\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}}{x^2} + g'(x) = \frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} + g'(x) \stackrel{!}{=} \frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow g(x) = c,$$

vi väljer $c = 0$.

svar: $\alpha = -\frac{1}{2}, \Phi(x, y) = \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

uppg. 5

$$\mathbb{A} = (x^2 - y^3 \cos z, y^2 + x^3 \cos z, (x^2 - y^2) \cos z),$$

$$Y = \left\{ (x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 + 3(z-3)^2 = 32, z \geq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

$$\text{a) } \mathbb{A} \text{ är } C^1 \text{ i } \mathbb{R}^3, \text{ rot } \mathbb{A} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^3 \cos z & y^2 + x^3 \cos z & (x^2 - y^2) \cos z \end{vmatrix} =$$

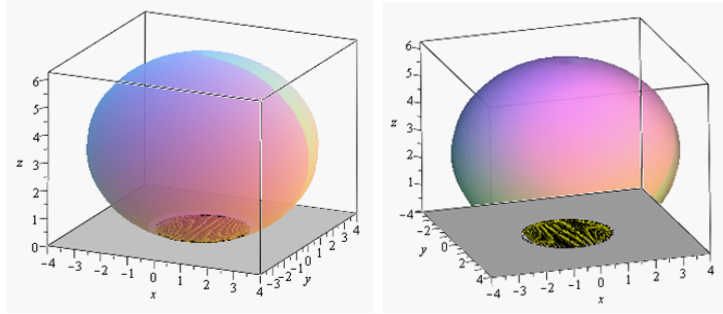
$$= (-2y \cos z + x^3 \sin z, y^3 \sin z - 2x \cos z, 3(x^2 + y^2) \cos z) \neq (0, 0, 0), \text{ alltså har } \mathbb{A} \text{ ej en potential i } \mathbb{R}^3.$$

$\operatorname{div} \mathbf{A} = 2x + 2y + (y^2 - x^2) \sin z \neq 0$, alltså har \mathbf{A} ej en vektorpotential i \mathbb{R}^3 .

b) Vi observerar först att $z = 0$ för $2x^2 + 2y^2 + 27 = 32$, dvs. för $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$ och sätter $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{5}{2}\}$ och

$K = \{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 + 3(z - 3)^2 \leq 32, z \geq 0\}$, då är $\partial K = Y \cup D$.

Så ser Y ut:



Flödet av $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ genom Y bort från origo (= ut ur K) är $F = \iint_Y \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$.

b1) Med Gauss: $\iint_Y \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_Y \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot (0, 0, -1) dxdy =$
 $= \iiint_K \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) dxdydz = 0$ ($\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$ ty \mathbf{A} är C^2 eller räkna ut \det)

alltså är $F = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot (0, 0, 1) dxdy = \iint_D 3(x^2 + y^2) dxdy =$

$$= [\text{pol. koord.}] = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} 3r^3 dr = 2\pi \frac{3}{4} \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^4 = \frac{75\pi}{8}.$$

b2) Med Stokes:

$$F = \iint_Y \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial Y} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = [\partial Y = \partial D \text{ (moturs)}, z = 0 \text{ (} \Rightarrow dz = 0)]$$

$$= \int_{\partial D} (x^2 - y^3) dx + (y^2 + x^3) dy = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot (0, 0, 1) dxdy = \frac{75\pi}{8} \text{ (s. o.)}.$$

Utän Green med ∂D : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{\frac{5}{2}} \cos t, \sqrt{\frac{5}{2}} \sin t\right), 0 \xrightarrow{t} 2\pi$:

$$F = \int_{\partial D} (x^2 - y^3) dx + (y^2 + x^3) dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left(-\frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \cos^2 t + \frac{25}{4} \sin^3 t\right) \sin t + \left(\frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \sin^2 t + \frac{25}{4} \cos^3 t\right) \cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \cos^2 t \sin t + \frac{25}{4} (\sin^4 t + \cos^4 t) + \frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \sin^2 t \cos t \right) dt =$$

$$\left[\sin^4 t + \cos^4 t = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2(2t)) = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4} \right]$$

$$= \left[\frac{5}{6} \sqrt{\frac{5}{2}} \cos^3 t + \frac{5}{3} \sqrt{\frac{5}{2}} \sin^3 t + \frac{75}{16} t + \frac{25}{32} \sin(4t) \right]_0^{2\pi} = \frac{75\pi}{8}.$$

ANM: Y kan parametriseras t.ex. som: $Y : \mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \varphi) =$

$$= \left(4 \sin \theta \cos \varphi, 4 \sin \theta \sin \varphi, 3 + \frac{8}{\sqrt{6}} \cos \theta\right), 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi - \arctan \frac{\sqrt{10}}{6}$$

eller som funktionsytor $Y = Y_+ \cup Y_-$ med $Y_+ : z = 3 + \sqrt{\frac{32 - 2x^2 - 2y^2}{3}}, x^2 + y^2 \leq 16$

och $Y_- : z = 3 - \sqrt{\frac{32-2x^2-2y^2}{3}}$, $\frac{5}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 16$.

svar: $\boxed{\frac{75\pi}{8}}$

uppg. 6

Vi skall bestämma det största och det minsta värde som

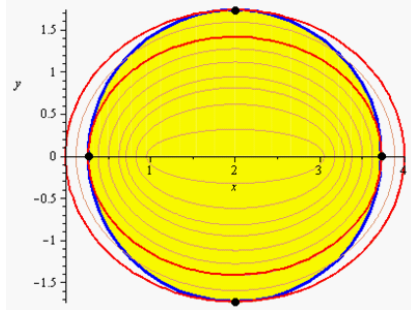
$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ antar under bivillkoret

$g(x, y) = (x-2)^2 + y^2 - 3 = 0$ (dvs. "på cirkeln $\gamma : (x-2)^2 + y^2 = 3$ ").

γ är kompakt och f är C^0 på γ , alltså antar f på γ ett minsta värde m och ett största M , vidare är γ bågvis sammanhängande, enligt satsen om mellanliggande värden antar då f alla värden mellan m och M och därmed är sökta $V_f = [m, M]$. Enklast hittar man m och M om man studerar nivåkurvorna till

f , det är ellipser $f(x, y) = |(x, y) - (1, 0)| + |(x, y) - (3, 0)| = c$

(alla punkter (x, y) i planet vilkas avstånd till punkterna $(1, 0)$ och $(3, 0)$ har konstant summa c): eftersom ellipsen och cirkeln har samma mittpunkt så fås minsta och största c i punkterna $(2, \pm\sqrt{3})$ och $(2 \pm \sqrt{3}, 0)$, se figur:



En enkel lösning fås även genom att elimi-

nera y : bivillkoret ger $y^2 = 3 - (x-2)^2$, bestäm nu det största/minsta värdet

av $h(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 3 - (x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 3 - (x-2)^2} =$

$= \sqrt{2x} + \sqrt{8-2x}$ för $2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$: för inre punkter

$0 < 2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ är $h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4-x}} = 0 \iff 4-x = x$, det ger

(enda) stationära punkten $x = 2$, tillsammans med randpunkterna $2 \pm \sqrt{3}$ har vi samma kandidater som ovan.

Vi kan även bestämma kandidaterna för extrempunkter med Lagranges multiplikator metod: beräkna det största och det minsta värde som $f(x, y)$ antar under bivillkoret $g(x, y) = (x-2)^2 + y^2 - 3 = 0$:

grad $g(x, y) = (2(x-2), 2y) \neq (0, 0)$ på γ ty $(2, 0) \notin \gamma$. Alltså gäller för extrempunkter grad $f = \lambda_0$ grad g för något λ_0 :

$\begin{cases} f'_x = \lambda_0 g'_x \\ f'_y = \lambda_0 g'_y \end{cases}$ för något λ_0 :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \lambda_0 2(x-2) & (1) \\ \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \lambda_0 2y & (2) \end{cases}$$

fall 1: $y = 0$: Bivillkoret ger kandidaterna $(2 \pm \sqrt{3}, 0)$.

fall 2: $y \neq 0$: (2) ger $2\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}$ och (1) ger då

$$\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} \right) (x-2) \iff$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{(x-3)^2+y^2} + (x-3)\sqrt{(x-1)^2+y^2} &= \\ = \left(\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)(x-2) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \Leftrightarrow x-3 = \pm(x-1)$, alltså $x=2$ och bivillkoret ger kandidaterna $(2, \pm\sqrt{3})$. m, M finns bland $f(2+\sqrt{3}, 0) = 2\sqrt{3} = f(2-\sqrt{3}, 0)$ och $f(2, \pm\sqrt{3}) = 4$, alltså $m = 2\sqrt{3}$ och $M = 4$.

Ytterligare en lösning fås genom att parametrisera

$\gamma: x = 2 + \sqrt{3}\cos t, y = \sqrt{3}\sin t$ och bestämma max/min av

$$\begin{aligned} g(t) &= \sqrt{(1 + \sqrt{3}\cos t)^2 + \sin^2 t} + \sqrt{(-1 + \sqrt{3}\cos t)^2 + \sin^2 t} = \\ &= \sqrt{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}\cos t} + \sqrt{2 - \sqrt{3}\cos t} \right), \quad -\pi \leq t \leq \pi: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t}} + \frac{\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}} \right) = \frac{\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t} - \sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}}{\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t}\sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}} \right) = \\ &= \frac{3\sqrt{2}\sin t \cos t}{\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t}\sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}(\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t} + \sqrt{2-\sqrt{3}\cos t})} = 0 \text{ för } \varphi \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

(g är jämn); max/min finns bland $g(0) = g(\pi) = 2\sqrt{3}$ och $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

ANM: Vi har visat: $2\sqrt{3} < |z-1| + |z-3| < 4$ då $|z-2| < \sqrt{3}$ ($z \in \mathbb{C}$)!

svar: $\boxed{[2\sqrt{3}, 4]}$