Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2009-08-25, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Anna Nyström, tel. 0762 – 721861
OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Låt $F(x,y) = \tanh(xy) - \cos(\sinh(x-y)) \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$.

a) Visa att nivåkurvan $F(x,y) = -\frac{2}{5}$ lokalt kring $\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right)$ är en funktionskurva. (2p)

b) Beräkna riktningsderivatan av F i punkten $\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right)$ i riktningen $(4,-3)$. (4p)

2. Visa att $v = ye^{\frac{1}{x}}$ är en karakteristisk koordinat till differentialekvationen $x^2 f'_x + y f'_y = f$, $x > 0, y > 0$ och bestäm sedan den allmänna lösningen till denna ekvation (ledning: räkna med v och $u = y$). (7p)

3. Beräkna $\displaystyle\iiint_{\Omega} \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{z}}\,dxdydz$ där $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\right\}$. (7p)

4. Beräkna arean av området innanför kurvan $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \left(t^2 \sin(t), t^2 \cos(t)\right),\ -\pi \le t \le \pi$. (6p)

5. Vilka värden antar $f(x,y) = 1 - x^2 y^2$ då $2x^2 + 3y^2 \le 4 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$. (7p)

6. Låt $\Phi(x,y,z) = x\left(y + z + z^2\right) - yz$, $\boldsymbol{A} = (xy, yz, zx)$ $\left((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$ och $\mathbb{F} = \nabla\Phi + \nabla \times \boldsymbol{A}$.

a) Beräkna $\mathbb{F}$. (3p)

b) Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ ut ur kroppen $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 1 - x^2 y^2\right\}$. (6p)

c) Beräkna $\displaystyle\int_{\gamma} \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ där γ är skärningskurvan mellan ytan $z = 1 - x^2 y^2$ och cylindern $2x^2 + 3y^2 = 4$ genomlöpt medurs sett från origo. (6p)

7. Visa att under vissa förutsättningar (ange vilka) gäller att ett fält $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som är konservativt i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ är virvelfritt i Ω. (4p)

8. Formulera och bevisa Stokes sats för en funktionsyta. (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

gamla tentor mve035 (08/09)

SVAR

10-01-14: **1a)** ½ **b)** nej **c)** $-2-2\sinh 1$ **2)** $m(K)=260,\ m(Y)=140$ **3)** $\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\mathbb{V}$ är lokalt bijektivt i $(1,1,1)$, ej konservativt **b)** $\frac{\pi}{2}$
09-08-25: **1b)** $\frac{16\ln 2}{250}$ **2)** $yg\left(ye^{\frac{1}{x}}\right)$ **3)** $4\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\frac{\pi^5}{5}$ **5)** $\left[\frac{1}{3},1\right]$ **6a)** $\left(z+z^2,\ x-2z,\ 2xz-y\right)$ **b)** 0 **c)** $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$
09-03-12: **1a)** $2x+2y-z+1=0$ **b)** $(0,0)$, sadelpunkt **2)** $\frac{350\pi}{3}$ **3c)** $4xyz$ **e)** 1 **4)** $[-4,\ 4]$
09-01-14: **1)** $4x-y-z=8$ **2)** $\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ **3a)** lokal minimipunkt, **b)** sadelpunkt **4a)** bijektivt lokalt i origo, ej konservativt **b)** $\frac{12\pi}{5}$ 4) $\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)-\frac{1}{2\pi}\right)$ **6)** $2^{\frac{5}{6}}$
08-08-25: 1) $\mathbb{F}$ är konservativt, $div\mathbb{F}=2(\cosh(x+y)+\sinh(y-z))+1$, ökar i $(1,1,1)$ mest i riktningen $(\sinh 2, \sinh 2+1,-1)$ **2a)** $\pi-2$ **b)** ja **3)** $\frac{3(e^4-e)}{8}$ **4)** $\left(2x^2-3y^2\right)e^{2x}$ **5a)** 0 **b)** $\frac{\sqrt{6}}{9}$
08-03-14: 1a) $x-y-3z+3=0$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{9}{8}$ **3)** lägst: $-\left(\frac{2}{\sqrt{3}},0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$, högst: $\left(0,\pm\sqrt{2},2\right)$ **4a)** i origo: nej, i $(1,1,1)$: ja **b)** varken eller **c)** $\frac{-10\pi}{\sqrt{6}}$ **5)** $2a^2+\frac{a^5}{5}$