Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2009-03-12, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Urban Larsson, tel. 0762 – 721860

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

---

1. Låt $z = \cosh(x+y) + \sinh(x^2 - y^2)$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,-1,1)$. (4p)

b) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (6p)

2. Beräkna arean av ytan $Y: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = (2u+v, u-2v, uv),\ u^2+v^2 \le 15$. (5p)

3. Låt $\mathbb{F}(x,y,z) = 4(yz, xz, xy)$.

a) Visa att $\mathbb{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är lokalt bijektiv i varje punkt (a,b,c) med $abc \neq 0$. (3p)

b) Visa, utan att beräkna (vektor)potential, att $\mathbb{F}$ är konservativt och källfritt i $\mathbb{R}^3$ (2p var). (4p)

c) Beräkna en potential till $\mathbb{F}$. (3p)

d) Visa att $\mathbb{A} = \left(x(z^2-y^2), y(x^2-z^2), z(y^2-x^2)\right)$ är en vektorpotential till $\mathbb{F}$. (2p)

e) Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ uppåt genom ytan $Y: z = \sin(\pi x)\sin(\pi y),\ (x,y) \in D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

med Stokes sats resp. med Gauss sats (5p var). (10p)

4. Låt $\mathbb{F}(x,y) = \left(3x^2 - 2xy + y^2, -x^2 + 2xy - 3y^2\right)$ och $D: x^2 + y^2 \le 2$.

Vilka värden antar det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas i planet från punkten $(2,2)$ till punkter $(x,y) \in D$? (8p)

5. Visa att om $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ så är f kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$. (4p)

6. Visa att $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (4p)

7. Formulera och bevisa Greens sats för ett standardområde. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

SVAR

10-01-14: **1a)** ½ **b)** nej **c)** $-2-2\sinh 1$ **2)** $m(K)=260,\ m(Y)=140$ **3)** $\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\mathbb{V}$ är lokalt bijektivt i $(1,1,1)$, ej konservativt **b)** $\frac{\pi}{2}$	
09-08-25: **1b)** $\frac{16\ln 2}{250}$ **2)** $yg\left(ye^{\frac{1}{x}}\right)$ **3)** $4\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\frac{\pi^5}{5}$ **5)** $\left[\frac{1}{3},1\right]$ **6a)** $\left(z+z^2,\ x-2z,\ 2xz-y\right)$ **b)** 0 **c)** $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$	
09-03-12: **1a)** $2x+2y-z+1=0$ **b)** $(0,0)$, sadelpunkt **2)** $\frac{350\pi}{3}$ **3c)** $4xyz$ **e)** 1 **4)** $[-4,\ 4]$	
09-01-14: **1)** $4x-y-z=8$ **2)** $\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ **3a)** lokal minimipunkt, **b)** sadelpunkt **4a)** bijektivt lokalt i origo, ej konservativt **b)** $\frac{12\pi}{5}$ 4) $\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)-\frac{1}{2\pi}\right)$ **6)** $2^{\frac{5}{6}}$	
08-08-25: 1) $\mathbb{F}$ är konservativt, $div\mathbb{F}=2\left(\cosh(x+y)+\sinh(y-z)\right)+1$, ökar i $(1,1,1)$ mest i riktningen $(\sinh 2,\sinh 2+1,-1)$ **2a)** $\pi-2$ **b)** ja **3)** $\frac{3\left(e^4-e\right)}{8}$ **4)** $\left(2x^2-3y^2\right)e^{2x}$ **5a)** 0 **b)** $\frac{\sqrt{6}}{9}$	
08-03-14: 1a) $x-y-3z+3=0$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{9}{8}$ **3)** lägst: $-\left(\frac{2}{\sqrt{3}},0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$, högst: $\left(0,\pm\sqrt{2},2\right)$ **4a)** i origo: nej, i $(1,1,1)$: ja **b)** varken eller **c)** $\frac{-10\pi}{\sqrt{6}}$ **5)** $2a^2+\frac{a^5}{5}$	