

**Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2007-03-16, kl. 8.30-12.30 i V**

**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa

**Telefon:** Karin Kraft, tel. 0762-721860

**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.  
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Låt  $F(x, y, z) = (\ln(x) + xz)\cos(y)\arctan(y + z)$ .
  - a) Visa att nivåytan  $F(x, y, z) = \frac{\pi}{4}$  lokalt kring punkten  $(1, 0, 1)$  är en  $C^1$ -funktionsyta  $z = f(x, y)$  och bestäm  $f'_x(1, 0)$  och  $f'_y(1, 0)$ . (4p)
  - b) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan  $F(x, y, z) = \frac{\pi}{4}$  i punkten  $(1, 0, 1)$ . (4p)
  - c) I vilken riktning växer funktionsvärdena  $F(x, y, z)$  snabbast i punkten  $(1, 0, 1)$ ? (2p)
2. Beräkna arean av ytan  $Y: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (u^2, 2v \sin(u), 2v \cos(u))$ ,  $v \geq 0$ ,  $u^2 + v^2 \leq 1$ . (7p)
3. Bestäm de högsta och de lägsta punkterna på skärningskurvan mellan cylindern  $x^2 + y^2 = 1$  och funktionsytan  $z = xy^2$ . (7p)
4. Kroppen  $K = \{(x, y, z) : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$  har densiteten  $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z^2(1+x^2+y^2+z^2)}$ .  
Bestäm  $K$ 's totala massa. (7p)
5. Låt  $\mathbf{IF} = (e^{x^2+y^2} \cos(z), (x+y)e^{z^2}, e^{xyz})$  och  $f(x, y) = \sqrt{e - e^{x^2+y^2}} \cosh(\cos(x+2y))$ .
  - a) Beräkna flödet av  $\text{rotIF}$  uppåt genom funktionsytan  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_f$ 
    - a1) med Stokes' sats
    - a2) med Gauss' sats (6p var).(12p)
  - b) Är  $\mathbf{IF}$  konservativt i  $\mathbb{R}^3$ ? (2p)
6.
  - a) Formulera och bevisa Greens sats. (8p)
  - b) Definiera enkel kurva och enkelt sammanhängande mängd i  $\mathbb{R}^2$ . (3p)
  - c) Visa att ett fält som är  $C^1$  och har en vektorpotential i  $\mathbb{R}^3$  är källfritt i  $\mathbb{R}^3$ . (4p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

# Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 07-03-16

## uppg. 1

$$F(x, y, z) = (\ln x + xz) \cos(y) \arctan(y + z), \quad F'_x = \left(\frac{1}{x} + z\right) \cos(y) \arctan(y + z),$$

$$F'_y = (\ln x + xz) \left(-\sin(y) \arctan(y + z) + \frac{\cos(y)}{1+(y+z)^2}\right),$$

$$F'_z = \cos(y) \left(x \arctan(y + z) + \frac{\ln x + xz}{1+(y+z)^2}\right) \implies \text{grad}F(1, 0, 1) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi+2}{4}\right).$$

- a)  $F'_z(1, 0, 1) = \frac{\pi+2}{4} \neq 0$ , implicita funktionsatsen ger ( $F$  är  $C^1$  i en omgivning till  $(1, 0, 1)$ ) att  $F(x, y, z) = \frac{\pi}{4} = F(1, 0, 1)$  lokalt kring  $(1, 0, 1)$  definierar en  $C^1$  funktion  $z = f(x, y)$ , kedjeregeln ger

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, f(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + 0 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \text{ alltså } f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \text{ analogt fås}$$

$$f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \text{ därmed har vi } f'_x(1, 0) = -\frac{2\pi}{\pi+2} \text{ och } f'_y(1, 0) = -\frac{2}{\pi+2}.$$

- b) Tangentplanet har ekv.  $z = f(1, 0) + f'_x(1, 0)(x - 1) + f'_y(1, 0)(y - 0) = 1 - \frac{2\pi}{\pi+2}x + \frac{2\pi}{\pi+2} - \frac{2}{2+\pi}y$ , dvs.  $2\pi x + 2y + (\pi + 2)z = 3\pi + 2$ .

Alternativt kan du beräkna tangentplanet som

$$\text{grad}F(1, 0, 1) \bullet (x - 1, y - 0, z - 1) = 0.$$

- c) I punkten  $(1, 0, 1)$  växer  $F$  snabbast i riktningen  $\text{grad}F(1, 0, 1) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi+2}{4}\right)$ .

svar:

a) $f'_x = \frac{-2\pi}{\pi+2}, f'_y = \frac{-2}{\pi+2}$	b) $2\pi x + 2y + (\pi + 2)z = 3\pi + 2$	c) $(2\pi, 2, \pi + 2)$
----------------------------------------------------------	------------------------------------------	-------------------------

## uppg. 2

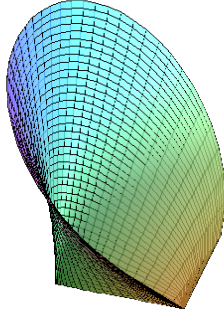
$Y : \mathbf{r}(u, v) = (u^2, 2v \sin u, 2v \cos u)$ ,  $D : u^2 + v^2 \leq 1, v \geq 0$ . Då är

$$\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2u & 2v \cos u & -2v \sin u \\ 0 & 2 \sin u & 2 \cos u \end{vmatrix} = 4(v, -u \cos u, u \sin u),$$

$$\text{arean av } Y \text{ är då } m(Y) = \iint_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| \, dudv = 4 \iint_D \sqrt{v^2 + u^2} \, dudv =$$

$$[\text{polära koordinater}] = 4 \int_0^\pi \int_0^1 r^2 dr d\varphi = \frac{4\pi}{3}.$$

svar: $\frac{4\pi}{3}$
------------------------



Ytan i uppgift 2

### uppg. 3

Vi skall bestämma det största och det minsta värde som  $f(x, y) = xy^2$  antar under bivillkoret  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ :  $\text{grad}g = (2x, 2y) \neq (0, 0)$  (på cirkeln  $g \equiv 0$ ), enligt Lagrange gäller då i extrempunkter  $\text{grad}f = \lambda_0 \text{grad}g$  för ngt.  $\lambda_0$ :

$$\begin{cases} f'_x = y^2 = \lambda_0 g'_x = 2\lambda_0 x \\ f'_y = 2xy = \lambda_0 g'_y = 2\lambda_0 y \end{cases} \implies y^3 = 2x^2y \implies y = 0 \text{ eller } y^2 = 2x^2,$$

bivillkoret ger då  $x^2 = 1$  eller  $3x^2 = 1$ , vi har därmed kandidaterna  $\pm(1, 0)$

och  $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ .  $f$  är kontinuerlig, cirkeln  $g \equiv 0$  är kompakt, alltså antar  $f$  på cirkeln ett största och ett minsta värde, dessa måste finnas bland  $f(\pm 1, 0) = 0$  och  $f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ , de högsta punkterna är således

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right), \text{ de lägsta punkterna är } \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right).$$

En annan (enkel) lösning fås med parameterframställningen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t \sin^2 t) \text{ av kurvan: max/min av } h(t) = \cos t \sin^2 t,$$

$t \in [0, 2\pi]$ , ger de högsta/lägsta punkterna på kurvan:

$$h'(t) = -\sin^3 t + 2\cos^2 t \sin t = \sin t(2 - 3\sin^2 t) = 0 \text{ för } 0 < t < 2\pi \text{ ger kan-}$$

$$\text{didaterna } \sin t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \sin t = 0 \text{ (} \cos t = -1 \text{), randpunkterna}$$

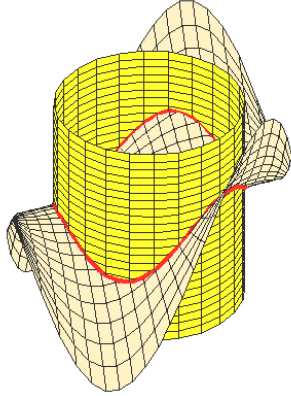
( $t = 0, 2\pi$ ) ger  $\sin t = 0$  ( $\cos t = 1$ ), alltså samma punkter som ovan.

En tredje lösning (den enklaste?) fås genom att lösa ut  $y^2$  ur bivillkoret och bestämma max/min av  $z = g(x) = x(1 - x^2)$ ,  $x \in [-1, 1]$  (kompakt!):

$$g'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \text{ ger kandidaterna } \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ max/min finns då bland}$$

$$g(\pm 1) = 0 \text{ och } g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} \dots$$

$$\boxed{\text{svar: } \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right) \text{ resp. } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)}$$



kurvan i uppg. 3

## uppg. 4

Kroppens totala massa är  $M(K) = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz$ ;

$K$  är en uppochnervänd kon med spetsen i origo, obegränsad upptill, integralen är dessutom generaliserad i origo. Vi väljer som uttömmande följd

$K_n : \frac{1}{n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{n^2 - x^2 - y^2}$  och beräknar

$$I_n = \iiint_{K_n} \frac{1}{z^2(1+x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = [\text{i sfäriska koordinater}] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta (1+r^2)} dr d\varphi d\theta = 2\pi [\arctan r]_{r=\frac{1}{n}}^{r=n} \left[ \frac{1}{\cos \theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 2\pi (\sqrt{2} - 1) \left( \arctan n - \arctan \frac{1}{n} \right), \text{ alltså är } M(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \underline{(\sqrt{2} - 1) \pi^2}.$$

**svar:**  $(\sqrt{2} - 1) \pi^2$

## uppg. 5

$\mathbf{F} = (e^{x^2+y^2} \cos z, (x+y)e^{z^2}, e^{xyz})$  är  $C^2$  i  $\mathbb{R}^3$ , definitionsmängden till

$f(x, y) = \sqrt{e - e^{x^2+y^2}} \cosh(\cos(x+2y))$  är  $D_f = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , flödet av  $\text{rot} \mathbf{F}$  uppåt genom ytan  $z = f(x, y)$  är  $F = \iint_Y \text{rot} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS$  ( $\mathbf{n}$  uppåt).

**a1)** Ytan  $Y$  ligger ovanför  $xy$ -planet ( $z \geq 0$ ), snittet mellan  $Y$  och  $xy$ -planet

är cirkeln  $C : x^2 + y^2 = 1$  genomlöpt moturs (då är  $Y$  en orienterad yta med rand) och Stokes ger  $F = \iint_Y \text{rot} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} =$

$$\left[ C : \begin{cases} x = \cos t, & dx = -\sin t dt \\ y = \sin t, & dy = \cos t dt \\ z = 0, & dz = 0 dt \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} 2\pi \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} (-e \sin t + (\cos t + \sin t) \cos t + 0) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(-e \sin t + \frac{1+\cos 2t}{2} + \sin t \cos t\right) dt = \\
&= \left[ e \cos t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin^2 t}{t} \right]_0^{2\pi} = \underline{\pi}. \text{ Det kan du också beräkna med Green:} \\
F &= \iint_{D_f} \left( (x+y)'_x - (1)'_y \right) dx dy = m(D_f) = \pi.
\end{aligned}$$

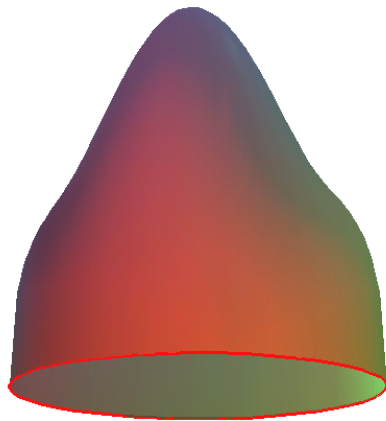
**a2)**  $Y \cup D_f$  är rand till en Kropp  $K$  med utåtriktad normal (om vi väljer  $\mathbf{n}_1 = (0, 0, -1)$  för  $D_f$ ), Gauss ger  $\iint_{Y \cup D_f} \text{rot} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS = \iiint_K \text{div}(\text{rot} \mathbf{F}) dx dy dz = 0$ , alltså  $F = \iint_Y \text{rot} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS = \iint_{D_f} \text{rot} \mathbf{F} \bullet (0, 0, 1) dS =$

$$\left[ \text{rot} \mathbf{F} = \left( \dots, \dots, e^{z^2} - 2ye^{x^2+y^2} \cos z \right), z = 0 \right] = \iint_{D_f} \left( 1 - 2ye^{x^2+y^2} \right) dx dy =$$

$$[\text{pol.koord.}] = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( r - 2r^2 \sin \varphi e^{r^2} \right) d\varphi dr = 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \underline{\pi}.$$

- b)**  $\mathbf{F}$  är inte konservativt i  $\mathbb{R}^3$  ty kurvintegralen längs den slutna kurvan  $C$  är inte 0 enligt **a1**), eller ty  $\text{rot} \mathbf{F} = \left( \dots, \dots, e^{z^2} - 2ye^{x^2+y^2} \cos z \right) \neq (0, 0, 0)$  enligt **a2**).

svar: **a)**  $\pi$     **b)** nej



ytan  $Y$  underifr.