

**Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2007-01-19, kl. 8.30-12.30 i V**

**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa

**Telefon:** Micke Persson, tel. 0762-721860; Lennart Falk, tel. 0760-721861

**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.  
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Låt  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ .
  - c) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan  $z = f(x, y)$  i punkten  $(1, 2, 1)$ . (4p)
  - d) Beräkna riktningsderivatan av  $f$  i punkten  $(1, 2)$  i riktningen  $(2, 1)$ . (3p)
  - e) Beräkna arean av ytan  $Y : z = f(x, y), x^2 + (y - 1)^2 \leq 2$ . (7p)
  
2. Låt  $u = 2x^3 - 3y^2, v = 3x^2 + 2y^3$  och  $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ . Visa att tillordningen  $(x, y) \mapsto (u, v)$  är bijektiv lokalt i varje punkt i  $\Omega$  (2p) och lös problemet  $y^2 f'_x - x f'_y = \frac{d(u, v)}{d(x, y)}, f(x, x) = 24x^3, (x, y) \in \Omega$  (6p). [tips: använd  $u, v$  som nya variabler] (8p)
  
3. Beräkna massan av kroppen  $K = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2} \right\}$ , då dess densitet är  $\rho(x, y, z) = |xyz|$ . (7p)
  
4. Vilka värden antar potentialen  $\Phi(x, y, z) = 6xy - z^3$  på sfären  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ? (8p)
  
5. Låt  $\mathbf{F} = \left( 3x^2 y^2 + \frac{\sin x}{1+x^2}, 2y(x^3 + e^{-y^4}) \right)$ .
  - a) Är  $\mathbf{F}$  konservativt i  $\mathbb{R}^2$ ? (2p)
  - b) Beräkna det arbete som  $\mathbf{F}$  uträttar då en partikel förflyttas från  $(-2, 2)$  till  $(2, -2)$  medurs längs ellipsen  $2x^2 + 3y^2 = 20$ . (5p)
  
6. a) Formulera och bevisa Gauss' sats. (8p)
  - b) Beräkna  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ . (4p)
  - c) Visa att ett konservativt fält som är  $C^1$  i  $\mathbb{R}^3$  är virvelfritt i  $\mathbb{R}^3$ . (4p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

# Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 07-01-19

## uppg. 1

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y \Rightarrow \text{grad}f(x, y) = (2x, 2y - 2) \Rightarrow \underline{\text{grad}f(1, 2) = (2, 2)}.$$

a) Tangentplanet har ekv.  $z = f(1, 2) + f'_x(1, 2)(x - 1) + f'_y(1, 2)(y - 2) = 1 + 2x - 2 + 2y - 4$  dvs.  $\underline{2x + 2y - z = 5}$ .

b) Riktningensenhetsvektorn är  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ , riktningsderivatan alltså  $f'_v(1, 2) = \text{grad}f(1, 2) \bullet \mathbf{v} = (2, 2) \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1) = \frac{6}{\sqrt{5}}$ .

c) Arean är  $A = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy =$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4(y - 1)^2} dx dy \text{ där } D : x^2 + (y - 1)^2 \leq 2;$$

med polära koordinater  $x = r \cos \varphi$ ,  $y - 1 = r \sin \varphi$  blir det

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\varphi = 2\pi \left[ \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6} (27 - 1) = \underline{\underline{\frac{13\pi}{3}}}.$$

**svar: a)**  $2x + 2y - z = 5$     **b)**  $\frac{6}{\sqrt{5}}$     **c)**  $\frac{13\pi}{3}$

## uppg. 2

$$\begin{cases} u = 2x^3 - 3y^2 \\ v = 3x^2 + 2y^3 \end{cases}, \quad \Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}.$$

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x^2 & -6y \\ 6x & 6y^2 \end{vmatrix} = 36(x^2y^2 + xy) > 0 \text{ för } (x, y) \in \Omega.$$

Eftersom  $u, v$  är  $C^1$  i  $\Omega$  så ger inversa funktionssatsen att tillordningen  $(x, y) \mapsto (u, v)$  är lokalt bijektiv i varje punkt i  $\Omega$ . Kedjeregeln ger

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x = 6x^2 f'_u + 6x f'_v \\ f'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y = -6y f'_u + 6y^2 f'_v \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$y^2 f'_x - x f'_y = 6(x^2y^2 + xy) f'_u \stackrel{!}{=} 36(x^2y^2 + xy) \Rightarrow f'_u = 6 \Rightarrow$$

$$f(u, v) = 6u + g(u, v) \Rightarrow f(x, y) = 6(2x^3 - 3y^2) + g(3x^2 + 2y^3) \Rightarrow$$

$$f(x, x) = 12x^3 - 18x^2 + g(3x^2 + 2x^3) \stackrel{!}{=} 24x^3 \Rightarrow g(3x^2 + 2x^3) = 18x^2 + 12x^3 \Rightarrow$$

$$g(t) = 6t \Rightarrow f(x, y) = 6(2x^3 - 3y^2) + 6(3x^2 + 2y^3).$$

$$f(x, y) = 12(x^3 + y^3) + 18(x^2 - y^2)$$

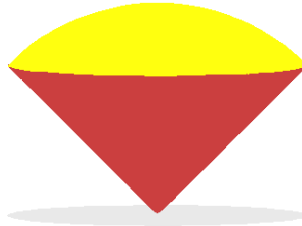
### uppg. 3

Kroppen  $K = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}\}$  begränsas nedåt av konen  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  och uppåt av sfären  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ , skärningen mellan dessa är cirkeln  $x^2 + y^2 = 4, z = 2$ ; densiteten är  $\rho(x, y, z) = |xyz|$ .

Massan är  $M = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz = [\text{pga symmetri}] = 4 \iiint_{K_+} xyz dx dy dz$

där  $K_+ = \{(x, y, z) \in K : x \geq 0, y \geq 0\}$ , alltså

$$\begin{aligned} M &= 4 \iint_D \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} xyz dz \right) dx dy = \left[ D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \right] = \\ &= 4 \iint_D xy \frac{1}{2} (8 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)) dx dy = [\text{pol. koord.}] = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \sin \varphi \cos \varphi (4 - r^2) dr d\varphi = [-\cos 2\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right]_0^2 = 2 \left( 16 - \frac{32}{3} \right). \end{aligned}$$



svar:  $\frac{32}{3}$

### uppg. 4

Lösning 1 (med Lagranges multiplikator metod):

Vi söker det största/minsta värde som  $\Phi = 6xy - z^3$  antar under bivillkoret  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0$ :  $\text{grad}g = 2(x, y, z) \neq \mathbf{0}$  på sfären, alltså gäller för max/min-punkterna att  $\text{grad}\Phi = \lambda \text{grad}g$  ( $\Phi, g$  är  $C^1$ ), dvs.

$$\begin{cases} (1) & 6y = 2\lambda x \\ (2) & 6x = 2\lambda y \\ (3) & -3z^2 = 2\lambda z \end{cases} \xrightarrow{x(1)-y(2)} \begin{cases} 0 = \lambda(x^2 - y^2) \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\lambda \neq 0} x = y \text{ eller } x = -y:$$

$$\begin{aligned} \text{fall 1: } x = y: & \begin{cases} x = y = 0 \xrightarrow{g=0} z = \pm\sqrt{5}, \\ xy \neq 0 \xrightarrow{(1)} \lambda = 3 \xrightarrow{(3)} -z^2 = 2z \end{cases} \\ \Rightarrow z_{1/2} = & \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \xrightarrow{g=0} 2x^2 = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{ger} \\ \text{(kandid.)} \end{array} \right\} \begin{cases} \pm(0, 0, \sqrt{5}) \\ \pm\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) \\ \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right) \\ \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right) \end{cases} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{fall 2: } x = -y, xy \neq 0 &\stackrel{(1)}{\implies} \lambda = -3 \stackrel{(3)}{\implies} z^2 = 2z \implies z_{1/2} = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \\ \implies_{g=0} 2x^2 = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases} &\text{ och det ger (kandidaterna) } \begin{cases} \pm \left( \sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}, 0 \right) \\ \left( \sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 2 \right) \\ \left( -\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 2 \right) \end{cases} . \end{aligned}$$

Då har vi allt: sfären  $Y : x^2 + y^2 + z^2 = 5$  är kompakt,  $\Phi$  är kontinuerlig, antar alltså ett största och ett minsta värde på  $Y$  och dessa måste finnas bland  $\Phi(\pm(0, 0, \sqrt{5})) = \pm 5\sqrt{5}$ ,  $\Phi\left(\pm\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)\right) = \pm 15$ ,  $\Phi\left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right)\right) = \Phi\left(\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right)\right) = 11$ ,  $\Phi\left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right)\right) = \Phi\left(\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right)\right) = -11$ . Det minsta värde resp. det största värde som  $\Phi$  antar på  $Y$  är alltså  $-15$  resp.  $15$  och eftersom  $\Phi$  är kontinuerlig på  $Y$  och  $Y$  bägvis sammanhängande så antar  $\Phi$  även alla värden mellan  $-15$  och  $15$  (s.o.m.v.).

Lösning 2: lös ut  $z = \pm\sqrt{5 - x^2 - y^2}$  ur bivillkoret och bestäm det största/minsta värde som  $6xy \mp (5 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$  antar på  $D : x^2 + y^2 \leq 5$ :

Vi räknar först med  $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$  och  $f(x, y) = 6xy - (5 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$ :

I) inre (stationära!) punkter:

$$\left. \begin{aligned} f'_x = 6y + 3x(5 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \\ f'_y = 6x + 3y(5 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{f'_x - f'_y} (y - x) \left(2 - \sqrt{5 - x^2 - y^2}\right) = 0:$$

fall 1:  $x = y$ :  $f'_x = 3x(2 + \sqrt{5 - 2x^2}) = 0 \implies x = 0$ , det ger kandidaten  $(0, 0)$ .

fall 2:  $x \neq y$ :  $2 - \sqrt{5 - x^2 - y^2} = 0 \implies x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow{f'_x=0} y = -x$ , det ger

$$\text{kandidaterna } \pm \left( \sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}} \right).$$

II) randpunkter: på randen  $y = \pm\sqrt{5 - x^2}$ ,  $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$  är

$$\begin{aligned} f(x, y) = h(x) = \pm 6x\sqrt{5 - x^2} : h'(x) = \pm 6 \left( \sqrt{5 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{5 - x^2}} \right) = \\ = \pm \frac{6}{\sqrt{5 - x^2}} (5 - 2x^2) = 0, \text{ det ger kandidaterna } \pm \left( \sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \right). \end{aligned}$$

Helt analogt fås för  $z = -\sqrt{5 - x^2 - y^2}$  och  $g(x, y) = 6xy + (5 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$  kandidaterna  $(0, 0)$  och  $\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$  (inre punkter), ingen skillnad på randen.

$f(g)$  är kontinuerlig på  $D$ ,  $D$  är kompakt, alltså antar  $f(g)$  på  $D$  ett största och ett minsta värde, dessa måste finnas bland  $f(0, 0) = \mp 5\sqrt{5}$ ,  $f\left(\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) = -11$ ,  $g\left(\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) = 11$ ,  $f\left(\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right) = \pm 15$  och  $f(\sqrt{5}, 0) = f(0, \sqrt{5}) = 0$ . Eftersom  $f(g)$  är kontinuerlig på  $D$  och  $D$  är bägvis sammanhängande så antar  $f(g)$  även alla värden mellan  $-15$  och  $15$ .

Lösning 3: (enklast?) räkna med sfäriska koordinater  $x = \sqrt{5} \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \sqrt{5} \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = \sqrt{5} \cos \theta$ : bestäm det största/minsta värde  $m/M$  som

$$F(\varphi, \theta) = 15 \sin^2 \theta \sin 2\varphi - 5\sqrt{5} \cos^3 \theta \text{ antar på } D_0 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}.$$

$F$  är kontinuerlig på  $D_0$ ,  $D_0$  är kompakt och bågvis sammanhängande, alltså är  $V_{\Phi} = V_F = [m, M]$ . Beräkning av  $m, M$  (som i lösning 2):

I) inre (stationära!) punkter:

$$\left. \begin{aligned} F'_\varphi &= 30 \sin^2 \theta \cos 2\varphi = 0 \\ F'_\theta &= \frac{15}{2} (2 \sin 2\varphi + \sqrt{5} \cos \theta) \sin 2\theta = 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\theta \neq 0, \pi} \begin{cases} \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ eller } \theta = \arccos \frac{\pm 2}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

II) randpunkter:

$$\begin{aligned} F(0, \theta) = F(2\pi, \theta) &= -5\sqrt{5} \cos^3 \theta, \quad F(\varphi, 0) = -5\sqrt{5}, \quad F(\varphi, \pi) = 5\sqrt{5}, \text{ minsta} \\ \text{resp. största värde som } F &\text{ antar på randen är alltså } -5\sqrt{5} \text{ resp. } 5\sqrt{5}, \text{ alltså} \\ \text{finns } m, M &\text{ bland } \pm 5\sqrt{5}, \quad F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = 15, \quad F\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = -15, \\ F\left(\frac{\pi}{4}, \arccos \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) &= F\left(\frac{5\pi}{4}, \arccos \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = 5 \left(3 \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{8}{5}\right) = 11 \text{ och} \\ F\left(\frac{3\pi}{4}, \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right) &= 5 \left(-3 \left(1 - \frac{4}{5}\right) - \frac{8}{5}\right) = -11, \text{ alltså } m = -15 \text{ och } M = 15. \end{aligned}$$

svar:  $[-15, 15]$

## uppg. 5

a) Fältet  $\mathbf{F} = (P, Q) = \left(3x^2y^2 + \frac{\sin x}{1+x^2}, 2yx^3 + 2ye^{-y^4}\right)$  är  $C^2$  i  $\mathbb{R}^2$ ,  
 $P'_y = 6x^2y = Q'_x$ , alltså är  $\mathbf{F}$  konservativt i  $\mathbb{R}^2$ .

b) Vi kan inte ange en potential explicit (integralerna  $\int \frac{\sin x}{1+x^2} dx$  och  $\int ye^{-y^4} dy$  är ej elementära), men vi kan välja en enklare väg från  $(-2, 2)$  till  $(2, -2)$ ,

t. ex. sträckan  $C : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}, -2 \xrightarrow{t} 2$ ; det sökta arbetet längs ellips-

bågen är då lika med arbetet längs  $C = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{-2}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt =$

$$= [\mathbf{r}'(t) = (1, -1)] = \int_{-2}^2 \left(3t^4 + \frac{\sin t}{1+t^2} + 2t^4 + 2te^{-t^4}\right) dt =$$

$$\left[ \frac{\sin t}{1+t^2} \text{ och } te^{-t^4} \text{ är udda, } t^4 \text{ är jämn} \right] = 2 \int_0^2 5t^4 dt = 2 [t^5]_0^2 = \underline{64}.$$

svar: a) ja      b) 64

