Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 13/1 2006, kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: 076-272 18 60.
För godkänt krävs minst 24 poäng.
Resultatet anslås senast tre veckor efter tentamen.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{1+2x-2y}\, e^{2x+y^2} - \frac{\ln(1+3x-y)}{1-x+2y}$$

kring origo med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). Visa att origo är en stationär punkt och avgör dess karaktär. (8p)

2. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x^3y$ i området $x^2+2y^2 \le 1$. (8p)

3. Det finns en kontinuerligt deriverbar funktion g av en variabel sådan att vektorfältet $\mathbf{F} = g(xy)(2x + x^2y, x^3)$ är ett potentialfält. Bestäm g och en potential till $\mathbf{F}$. (8p)

4. a. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F} = \big(x^3, y^2, xz\big)$, och γ är skärningen mellan sfären $x^2+y^2+z^2=1$ och cylindern $(x-1)^2+y^2=1$ genomlöpt från $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ till $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ med positiva z-värden. (8p)

   b. Skriv en MATLAB-kod för att plotta ytorna $x^2+y^2+z^2=1$ och $(x-1)^2+y^2=1$, $-1 \le z \le 1$, i samma figur. (4p)

5. Beräkna ytintegralen $\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$, då $K = \big\{(x,y,z) : x^2+4y^2 \le z \le 2x+4y+2\big\}$ (utåtriktad normal), och

$$\mathbf{F} = (xy^2,\, x^3y,\, z).$$ (8p)

6. Hur definieras riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$? Visa hur $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ kan uttryckas med hjälp av gradienten. Vad säger detta om gradientens fysikaliska betydelse? (8p)

7. Visa att om funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln

$$\Delta = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

så är f integrerbar över denna. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 13/1 2006

1. Använd envariabelutvecklingarna $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\frac{1}{1-t} = 1 + t + O(t^2)$ då $t \to 0$. Då fås (då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{1+2x-2y}\; e^{2x+y^2} - \frac{\ln(1+3x-y)}{1-x+2y} \\
&= [1 + \frac{1}{2}(2x-2y) - \frac{1}{8}(2x-2y)^2 + O(r^3)][1 + 2x + y^2 + \frac{1}{2}(2x+y^2)^2 + O(r^3)] \\
&- [3x - y - \frac{1}{2}(3x-y)^2 + O(r^3)][1 + (x-2y) + O(r^2)] \\
&= [1 + x - y - \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + O(r^3)][1 + 2x + y^2 + 2x^2 + O(r^3)] \\
&- [3x - y - \frac{9}{2}x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2 + O(r^3)][1 + x - 2y + O(r^2)] \\
&= 1 + 3x - y + \frac{7}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + O(r^3) - [3x - y - \frac{3}{2}x^2 - 4xy + \frac{3}{2}y^2 + O(r^3)] \\
&= 1 + 5x^2 + 3xy - y^2 + O(r^3).
\end{aligned}$$

Ur detta avläser vi att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, dvs. origo är en stationär punkt. Tillhörande kvadratisk form är $Q = 2(5x^2 + 3xy - y^2) = -2(y - \frac{3x}{2})^2 + \frac{29}{2}x^2$, som är indefinit, varför origo är en sadelpunkt.

---

2. $f(x,y) = x^3y$, $x^2 + 2y^2 \le 1$. Vi har att $\nabla f = (3x^2y, x^3) = \mathbf{0}$ då $x = 0$. Men $f(0,y) = 0$ kan varken vara max. eller min. (ty f antar både positiva och negativa värden). Max. och min. över området antas alltså på randen $x^2+2y^2 = 1$. Vi har att söka max. och min. av $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2+2y^2 = 1$. I punkter där max. och min. antas (sådana punkter finns, eftersom f är kontinuerlig, och randen är kompakt) är ∇f och $\nabla g = (2x, 4y)$ parallella. Vi måste ha

$$\begin{vmatrix} 3x^2y & x^3 \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 12x^2y^2 - 2x^4 = 2x^2(6y^2 - x^2) = 0.$$

Eftersom $x \ne 0$ enligt ovan, får vi $6y^2 - x^2 = 0$. $x^2 = 6y^2$, $x^2 + 2y^2 = 8y^2 = 1$, $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x^2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (alla teckenkombinationer). Motsvarande funktionsvärden är $\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{32}$. Max.värde: $\frac{3\sqrt{6}}{32}$, min.värde: $-\frac{3\sqrt{6}}{32}$.

---

3. $\mathbf{F} = (P, Q)$, där $P = g(xy)(2x + x^2y)$ och $Q = g(xy)x^3$. Villkoret för att $\mathbf{F}$ skall vara ett potentialfält är $P'_y = Q'_x$. Vi har $P'_y = g(xy)x^2 + g'(xy)x(2x + x^2y)$, $Q'_x = g(xy)3x^2 + g'(xy)y \cdot x^3$, varför

$$g(xy)x^2 + 2g'(xy)x^2 + g'(xy)x^3y = 3g(xy)x^2 + g'(xy)x^3y, \qquad 2g'(xy)x^2 = 2g(xy)x^2.$$

Funktionen $g(t)$ satisfierar alltså differentialekvationen $g'(t) = g(t)$, så att $g(t) = Ce^t$. Vi kan ta $g(t) = e^t$, och då blir $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = P dx + Q dy = (2x + x^2y)e^{xy}dx + x^3e^{xy}dy = d(x^2e^{xy})$. Alltså är en potential x^2e^{xy}.

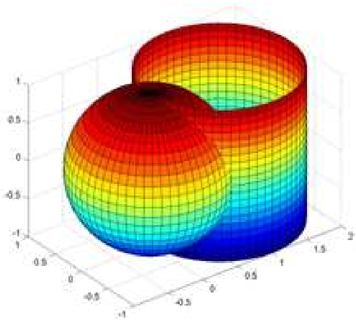
---

4. a. γ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$. Alltså är $(x^2 + y^2 =)\, 1 - z^2 = 2x$ och $-2z\,dz = 2\,dx$, dvs. $z\,dz = -dx$ på γ. Projektionen γ_1 av γ på xy-planet är en del av cirkeln $(x-1)^2 + y^2 = 1$ genomlöpt från $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ till $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ i positiv led.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_\gamma x^3dx + y^2dy + xz\,dz = \int_{\gamma_1} x^3dx + y^2dy - x\,dx \\
&= \int_{\gamma_1} d\Big(\frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big) = \Big[\frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big]_{(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})}^{(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})} \\
&= \Big[\frac{y^3}{3}\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 - \frac{1}{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = -\frac{2}{3}\frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

b. En MATLAB-kod:

```
fi=-pi:pi/30:pi;
th=0:pi/25:pi;
[Th,Fi]=meshgrid(th,fi);
x1=sin(Th).*cos(Fi);
y1=sin(Th).*sin(Fi);
z1=cos(Th);
surf(x1,y1,z1), hold on
[Fi,Z]=meshgrid(fi,-1:1/10:1);
x2=1+cos(Fi);
y2=sin(Fi);
z2=Z;
surf(x2,y2,z2)
axis([-1 2 -1 1]), axis equal
```



---

5. Projektionen D av K på xy-planet fås av $x^2+4y^2 \le 2x+4y+2$, $(x-1)^2+4(y-\frac{1}{2})^2 \le 4$, så att D är en ellips med centrum i $(1, \frac{1}{2})$ och halvaxlar 2 och 1. Enligt Gauss' sats är

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K (y^2+x^3+1)dxdydz \\
&= \iint_D \left\{\int_{x^2+4y^2}^{2x+4y+2} (y^2+x^3+1)dz\right\} dxdy \\
&= \iint_D (y^2+x^3+1)\big(2x+4y+2-(x^2+4y^2)\big)dxdy \\
&= \iint_D (y^2+x^3+1)\big(4-(x-1)^2-4(y-\frac{1}{2})^2\big)dxdy \\
&= \left[x = 1+2r\cos\varphi,\ y = \frac{1}{2}+r\sin\varphi,\ dxdy = 2r\,drd\varphi\right] \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \big[(\frac{1}{2}+r\sin\varphi)^2+(1+2r\cos\varphi)^3+1\big](4-4r^2)2r\,drd\varphi \\
&= 8\int_0^{2\pi}\int_0^1 \big(\frac{9}{4}+r\sin\varphi+r^2\sin^2\varphi+6r\cos\varphi+12r^2\cos^2\varphi+8r^3\cos^3\varphi\big)(r-r^3)\,drd\varphi.
\end{aligned}
$$

Nu är $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\,d\varphi = 0$, $\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi$. Vi får

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= 8\int_0^1 \big(\frac{9}{4}2\pi(r-r^3)+13\pi r^2(r-r^3)\big)\,dr = 8\pi\int_0^1 \big(\frac{9}{2}(r-r^3)+13(r^3-r^5)\big)\,dr \\
&= 8\pi\big(\frac{9}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+13(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\big) = 8\pi(\frac{9}{8}+\frac{13}{12}) = \underline{\frac{53\pi}{3}}.
\end{aligned}
$$
