Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 14/1 2005, kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Karin Kraft, 073-977 92 68
För godkänt krävs minst 24 poäng.
Lösningar anslås i Matematiskt Centrum efter tentamen.
Resultatet anslås i Matematiskt Centrum senast tre veckor efter tentamen.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm alla stationära punkter för funktionen $f(x, y, z) = (xy + z)e^{x+2y+3z}$ och bestäm deras karaktär. (8p)

2. Låt f vara en C^1-funktion på $\mathbb{R}^2$. Visa att funktionen $u(x, y, z) = \frac{z}{y} f(\frac{xy}{z^2}, \frac{y}{x})$ satisfierar differentialekvationen
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \qquad (7p)$$

3. Beräkna $\iiint_K (xz^2 + y^2)\, dxdydz$, där K är det område som definieras av olikheterna
$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad z \le \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0. \qquad (8p)$$

4. Bestäm minimum av $x^2 + y^2 + z^2$ då $x^2 + 2y^2 + 2z = 10$. (7p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = \big(yz\cos(xy) + y,\ xz\cos(xy) + z,\ \sin(xy) + x\big)$$
och γ är kurvan $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin^2 2t$, $0 \le t \le 2\pi$. (8p)

6. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, då Y är ellipsoiden $4x^2 + y^2 + 3z^2 = 4$ med normalriktning utåt, och
$$\mathbf{F} = \frac{(x, y-1, z)}{(x^2 + (y-1)^2 + z^2)^{3/2}}. \qquad (7p)$$

7. a. Ange vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält. (2p)

   b. Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett potentialfält med potential U. Visa hur $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ kan beräknas med hjälp av U. (6p)

8. Låt $f(x, y)$ vara kontinuerlig på ett kompakt område D. Dela in D i delområden. Vad menas med en Riemannsumma hörande till en viss indelning? Visa att Riemannsummorna konvergerar mot $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ då indelningens finhet går mot noll. (7p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 14/1 2005

1. Bestäm stationära punkter till $f(x,y,z) = (xy+z)e^{x+2y+3z}$. Sätt $g = e^{x+2y+3z}$. Vi har

$$
\begin{gathered}
f'_x = (y+xy+z)g, \quad f'_y = (x+2(xy+z))g, \quad f'_z = (1+3(xy+z))g,\\
f''_{xx} = (y+y+xy+z)g, \quad f''_{xy} = (1+x+2(y+xy+z))g, \quad f''_{xz} = (1+3(y+xy+z))g,\\
f''_{yy} = (2x+2(x+2xy+2z))g, \quad f''_{yz} = (2+3(x+2xy+2z))g, \quad f''_{zz} = (3+3(1+3xy+3z))g.
\end{gathered}
$$

$f'_x = f'_y = f'_z = 0$ ger $xy+z = -y = -\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = -\frac{1}{3} - xy = -\frac{5}{9}$. Det finns alltså endast en stationär punkt, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{9})$. Med derivator i denna punkt skall vi titta på den kvadratiska formen

$$
\begin{aligned}
Q &= f''_{xx}h^2 + f''_{yy}k^2 + f''_{zz}l^2 + 2f''_{xy}hk + 2f''_{xz}hl + 2f''_{yz}kl\\
&= (\frac{1}{3}h^2 + \frac{4}{3}k^2 + 3l^2 + \frac{10}{3}hk + 2hl + 4kl)e^{-1/3}.
\end{aligned}
$$

Kvadratkomplettering ger

$$
\begin{aligned}
e^{1/3}Q &= \frac{1}{3}(h^2 + 10hk + 6hl) + \frac{4}{3}k^2 + 3l^2 + 4kl\\
&= \frac{1}{3}[(h+5k+3l)^2 - 25k^2 - 9l^2 - 30kl] + \frac{4}{3}k^2 + 3l^2 + 4kl\\
&= \frac{1}{3}(h+5k+3l)^2 - 7k^2 - 6kl = \frac{1}{3}(h+5k+3l)^2 - 7(k+\frac{3}{7}l)^2 + \frac{9}{7}l^2.
\end{aligned}
$$

Av detta framgår att Q är indefinit, så att $\underline{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{9}) \text{ är en sadelpunkt}}$.

---

2. $f(s,t)$ är en C^1-funktion. För $u(x,y,z) = \frac{z}{y} f(\frac{xy}{z^2}, \frac{y}{x})$ är

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{z}{y}(f'_s \cdot \frac{y}{z^2} + f'_t \cdot \frac{-y}{x^2}) = \frac{1}{z}f'_s - \frac{z}{x^2}f'_t,\\
u'_y &= -\frac{z}{y^2}f + \frac{z}{y}(f'_s \cdot \frac{x}{z^2} + f'_t \cdot \frac{1}{x}) = -\frac{z}{y^2}f + \frac{x}{yz}f'_s + \frac{z}{xy}f'_t,\\
u'_z &= \frac{1}{y}f + \frac{z}{y}(f'_s \cdot \frac{-2xy}{z^3}) = \frac{1}{y}f - \frac{2x}{z^2}f'_s.
\end{aligned}
$$

Alltså är

$$
xu'_x + yu'_y + zu'_z = \frac{x}{z}f'_s - \frac{z}{x}f'_t - \frac{z}{y}f + \frac{x}{z}f'_s + \frac{z}{x}f'_t + \frac{z}{y}f - \frac{2x}{z}f'_s = 0.
$$

---

3. I rymdpolära koordinater, $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, beskrivs K av $0 \le r \le 1$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Då är

$$
\begin{aligned}
&\iiint_K (xz^2 + y^2)\,dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^3 \sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi) r^2 \sin\theta\,drd\theta d\varphi\\
&= \int_0^1 r^5\,dr \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi + \int_0^1 r^4\,dr \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi\\
&= \frac{1}{6} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi\\
&= \frac{1}{6} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\,d\theta + \frac{1}{5} \cdot [-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \frac{\pi}{4}\\
&= \frac{1}{48}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}) = \underline{\pi(\frac{1}{192} + \frac{\sqrt{2}}{48})}.
\end{aligned}
$$

---

4. Sök minimum av $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ då $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z = 10$. Då minimum antas är $\nabla f = \lambda \nabla g$ för något tal λ, dvs.

$$2x = \lambda \cdot 2x,\ 2y = \lambda \cdot 4y,\ 2z = \lambda \cdot 2,$$

eftersom $\nabla g \neq \mathbf{0}$. Vi har alltså

$$x(\lambda - 1) = 0,\ y(2\lambda - 1) = 0,\ z = \lambda.$$

Den första ekvationen säger att $x = 0$ eller $\lambda = 1$. Antag $x = 0$. Om $y = 0$ är $g = 2z = 10$, $z = 5$, $f = 25$. Om $y \neq 0$ är $z = \lambda = \frac{1}{2}$, $g = 2y^2 + 1 = 10$, $y^2 = \frac{9}{2}$, $f = \frac{9}{2} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$. Antag $x \neq 0$. Då är $z = \lambda = 1$, $2\lambda - 1 \neq 0$, $y = 0$, $g = x^2 + 2 = 10$, $x^2 = 8$, $f = 8 + 1 = 9$. En jämförelse av f-värdena ger att $\underline{\text{minimum är } f(0, \pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = \frac{19}{4}}$.

---

5. $\gamma : x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ z = \sin^2 2t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$. På γ är $z = 4\sin^2 t \cos^2 t = x^2y^2$ och $dz = 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= yz\cos(xy)\,dx + y\,dx + xz\cos(xy)\,dy + z\,dy + \sin(xy)\,dz + x\,dz \\ &= d(z\sin(xy)) + y\,dx + z\,dy + x\,dz.\end{aligned}$$

Då γ är sluten, är $\int_\gamma d(z\sin(xy)) = 0$. Projektionen γ_1 av γ på xy-planet är ellipsen $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ genomlöpt ett varv i positiv led. Om D är området innanför γ_1, ger Greens formel

$$\begin{aligned}\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz &= \int_\gamma y\,dx + x^2y^2\,dy + x(2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy) \\ &= \int_{\gamma_1} (y + 2x^2y^2)dx + (x^2y^2 + 2x^3y)dy = \iint_D [2xy^2 + 6x^2y - (1 + 4x^2y)]dxdy \\ &= \iint_D (2xy^2 + 2x^2y - 1)dxdy = -\iint_D dxdy = -\mu(D) = -\pi \cdot 2 \cdot 1 = -2\pi,\end{aligned}$$

ty $\iint_D xy^2\,dxdy = \iint_D x^2y\,dxdy = 0$ p.g.a. symmetri. Alltså är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \underline{-2\pi}$.

---

6. Med $\mathbf{r} = (x, y-1, z)$ och $r = |\mathbf{r}| = (x^2 + (y-1)^2 + z^2)^{1/2}$ är $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. För $\mathbf{r} \neq (0,1,0)$ är

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} = \frac{r^3 \cdot 1 - x \cdot 3r^2\frac{x}{r}}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

och analogt $\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-1}{r^3} = \frac{r^2 - 3(y-1)^2}{r^5}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3} = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$, så att

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + (y-1)^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

Punkten $(0,1,0)$ ligger innanför Y. Låt Y_1 vara sfären $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a^2$, där radien a är så liten att Y_1 ligger innanför Y. Om Y_1 har utåtriktad normal, så är $Y - Y_1$ rand till området D mellan Y och Y_1, och en tillämpning av Gauss' sats ger att $\iint_{Y-Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dxdydz = 0$, så att $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS$. På Y_1 är $r = |\mathbf{r}| = a$ och $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}}{a}$. Alltså är

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} \frac{\mathbf{r}}{a^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{a}\,dS = \iint_{Y_1} \frac{a^2}{a^4}\,dS = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = \underline{4\pi}.$$
