Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 8/3 2004, kl. 08.45–12.45.

Hjälpmedel: ”Användarhandledning för MATLAB” av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Anton Evgrafov, tel. 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = e^{x+y}\sin(x+2y) + \frac{2+3x}{1+2x+y}$$

kring origo med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). Visa att origo är en stationär punkt och avgör dess karaktär. (7p)

2. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x^2y - 2xy^3 + 5y$, då $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le \frac{3}{2}$. I vilka punkter antas max resp. min? (8p)

3. Beräkna $\iint_D xye^{-(x^2+xy+y^2)}\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : y \ge 0\}$. (7p)

4. a. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \left(yz^2 + z,\ xz^2,\ 2xyz + x^2z^2\right),$$

och γ är skärningen mellan $x^2+y^2+4z^2 = 4$ och planet $z = y+1$ (kurvans projektion i xy-planet genomlöps i positiv led). (6p)

b. Skriv en MATLAB-kod för att plotta ytan $x^2+y^2+4z^2 = 4$ och kurvan γ i samma figur. (3p)

5. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då Y är ytan $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \ge 1$, med normalriktning bort från origo, och

$$\mathbf{F} = (y^2 + x^3z,\ x^2 + y^3z,\ z^2 + xy).$$

(7p)

6. Transformera differentialekvationen

$$x^2u''_{xx} + y^2u''_{yy} + 2xyu''_{xy} = 0$$

genom att göra variabelbytet $s = \frac{y}{x}$, $t = xy^2$ $(x > 0)$. Lös därefter ekvationen. (7p)

7. Bevisa kedjeregeln för derivering av den sammansatta funktionen $f(\mathbf{g}(t))$ (ange förutsättningar). (7p)

8. Formulera och bevisa Stokes’ sats. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 8/3 2004

1. Använd envariabelutvecklingarna $e^t = 1+t+O(t^2)$, $\sin t = t+O(t^3)$, $\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+O(t^3)$ då $t \to 0$. Då fås (då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= [1+x+y+O(r^2)][x+2y+O(r^3)] + (2+3x)[1-2x-y+4x^2+y^2+4xy+O(r^3)] \\ &= x+2y+x^2+2y^2+3xy+O(r^3)+2-x-2y+2x^2+2y^2+5xy+O(r^3) \\ &= 2+3x^2+8xy+4y^2+O(r^3). \end{aligned}$$

Ur detta avläser vi att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, dvs. origo är en stationär punkt. Tillhörande kvadratisk form är $Q = 2(3x^2+8xy+4y^2) = 6[(x+\frac{4}{3}y)^2 - \frac{4}{9}y^2]$, som är indefinit, varför origo är en sadelpunkt.

---

2. $f(x,y) = x^2y - 2xy^3 + 5y$, $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le \frac{3}{2}$. Sök först inre stationära punkter.

$$f'_x = 2xy - 2y^3 = 2y(x-y^2) = 0, \quad f'_y = x^2 - 6xy^2 + 5 = 0.$$

$y = 0$ skulle ge $x^2+5 = 0$, vilket inte går. Alltså är $x = y^2$ och $x^2 - 6x^2 + 5 = 0$, $x^2 = 1$, $x = 1$, $y = \pm 1$.
Inre stationär punkt: $(1,1)$.
Undersök ran den: a) $x = 0$: $f(0,y) = 5y$ som är strängt växande; b) $y = 0$: $f(x,0) = 0$, konstant; c) $x = 3$: $f(3,y) = 14y - 6y^3 = f_1(y)$, $f_1'(y) = 14 - 18y^2 = 0$ för $y = \frac{\sqrt{7}}{3}$ (som är $< \frac{3}{2}$); d) $y = \frac{3}{2}$: $f(x,\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{15}{2} = f_2(x)$, $f_2'(x) = 3x - \frac{27}{4} = 0$ för $x = \frac{9}{4}$.
Intressanta funktionsvärden: $f(1,1) = 4$, $f(x,0) = 0$, $f(0,\frac{3}{2}) = \frac{15}{2}$, $f(3,\frac{\sqrt{7}}{3}) = \frac{28\sqrt{7}}{9} > 3 \cdot 2,5 = 7,5$, $f(\frac{9}{4},\frac{3}{2}) = -\frac{3}{32}$, $f(3,\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}$.
Alltså: max. är $f(3,\frac{\sqrt{7}}{3}) = \frac{28\sqrt{7}}{9}$, min. är $f(\frac{9}{4},\frac{3}{2}) = -\frac{3}{32}$.

---

3. $I = \iint_{y\ge 0} xye^{-(x^2+xy+y^2)}\,dxdy = \iint_{y\ge 0} xye^{-[(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2]}\,dxdy$.
Integralen är absolutkonvergent (ty $\iint_{y\ge 0}|xy|e^{-(x^2+xy+y^2)}\,dxdy \le \int_0^\pi [\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2} r\,dr]d\varphi < \infty$), och då får man utföra upprepad integration och variabelbyte "som vanligt". Sätt $u = x+\frac{y}{2}$, $v = \frac{\sqrt{3}}{2}y$. Då är $y \ge 0 \Leftrightarrow v \ge 0$, och $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}}dudv$. Sätt sedan $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{v\ge 0} (u - \frac{1}{\sqrt{3}}v)\frac{2}{\sqrt{3}}ve^{-(u^2+v^2)}\frac{2}{\sqrt{3}}\,dudv = \frac{4}{3}\int_0^\pi \int_0^\infty r\sin\varphi(r\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}r\sin\varphi)e^{-r^2}r\,drd\varphi \\ &= \frac{4}{3}\left(\int_0^\infty r^3e^{-r^2}dr\right)\left(\int_0^\pi (\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^2\varphi)d\varphi\right) = \frac{4}{3}(0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2})\int_0^\infty r^3e^{-r^2}dr \\ &= [r^2 = t,\ r\,dr = \frac{1}{2}dt] = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-t}\,dt = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt\right) = \boxed{-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Alternativ lösning: $I = \int_0^\infty ye^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int_{-\infty}^\infty xe^{-(x+\frac{y}{2})^2}dx\right)dy$. För fixt y är $\int_{-\infty}^\infty xe^{-(x+\frac{y}{2})^2}dx = [x + \frac{y}{2} = u] = \int_{-\infty}^\infty (u-\frac{y}{2})e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^\infty ue^{-u^2}du - \frac{y}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du = 0 - \frac{y}{2}\sqrt{\pi} = -\frac{y}{2}\sqrt{\pi}$, så att $I = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty y^2e^{-\frac{3}{4}y^2}dy = [\frac{\sqrt{3}}{2}y = v] = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{4}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^\infty v^2e^{-v^2}dv = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}}\left(\left[-\frac{1}{2}ve^{-v^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-v^2}dv\right) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}}(0 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

---

4. a) $I = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, $\gamma : x^2+y^2+4z^2 = 4$, $z = y+1$. Projektionen γ_1 av γ på xy-planet: $x^2+y^2+4(y+1)^2 = 4$, $x^2+5y^2+8y = 0$, $x^2+5(y+\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{5}$; en ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y+\frac{4}{5})^2}{b^2} = 1$ med $a = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $b = \frac{4}{5}$.

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = yz^2\,dx + z\,dx + xz^2\,dy + 2xyz\,dz + x^2z^2\,dz = d(xyz^2) + z\,dx + x^2z^2\,dz.$$

Då γ är sluten, är $\int_\gamma d(xyz^2) = 0$. På γ är $z = y+1$, $dz = dy$. Alltså är

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma z\,dx + x^2z^2\,dz = \int_{\gamma_1} (y+1)dx + x^2(y+1)^2dy = [\text{Greens formel; } D \text{ är området innanför } \gamma_1] \\ &= \iint_D [2x(y+1)^2 - 1]dxdy = [\text{symmetri}] = 0 - \iint_D dxdy = -\pi ab = -\pi\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{4}{5} = \boxed{-\frac{16\pi}{5\sqrt{5}}}. \end{aligned}$$

b) Exempel på MATLAB-kod:

```
th=[0:pi/20:pi]; fi=[0:pi/20:2*pi]; [Th,Fi]=meshgrid(th,fi);
x=2*cos(Fi).*sin(Th); y=2*sin(Fi).*sin(Th); z=cos(Th);
mesh(x,y,z), axis equal, hold on
t=linspace(0,2*pi);
xc=4/sqrt(5)*cos(t); yc=-0.8+0.8*sin(t); zc=yc+1;
plot3(xc,yc,zc)
```

---

5. Komplettera med den plana ytan $Y_1 : z = 1,\ x^2 + y^2 \leq 3$, så att $Y + Y_1$ blir randen till en kropp K på vilken vi kan använda Gauss' sats.

$$\begin{aligned}
&\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K (3x^2z + 3y^2z + 2z)\,dxdydz \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 3} (3x^2+3y^2+2)\left\{\int_1^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} z\,dz\right\} dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 3} (3x^2+3y^2+2)\frac{1}{2}[4-(x^2+y^2)-1]dxdy = [\text{polära koord.}] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (3r^2+2)(3-r^2)\,rdrd\varphi = [r^2 = t] = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\int_0^3 (3t+2)(3-t)dt \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^3 (6+7t-3t^2)dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{45}{2} = \frac{45\pi}{4}.
\end{aligned}$$

På Y_1 är $z = 1$, $\mathbf{N} = (0,0,-1)$, $dS = dxdy$ så att $\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dS = -\iint_{x^2+y^2\leq 3}(1+xy)dxdy =$ [symmetri] $= -\iint_{x^2+y^2\leq 3} dxdy = -\pi\cdot 3$. Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS - 3\pi = \frac{45\pi}{4}$, och $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \boxed{\frac{57\pi}{4}}$.

---

6. Variabelbytet $s = \frac{y}{x}$, $t = xy^2$, ger $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}u'_s + y^2u'_t$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x}u'_s + 2xyu'_t$.

$$\begin{aligned}
u''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{y}{x^2}u'_s + y^2u'_t) = \frac{2y}{x^3}u'_s - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}u'_s + y^2\frac{\partial}{\partial x}u'_t = \frac{2y}{x^3}u'_s - \frac{y}{x^2}(-\frac{y}{x^2}u''_{ss} + y^2u''_{st}) \\
&+ y^2(-\frac{y}{x^2}u''_{ts} + y^2u''_{tt}) = \frac{2y}{x^3}u'_s + \frac{y^2}{x^4}u''_{ss} + y^4u''_{tt} - \frac{2y^3}{x^2}u''_{st}, \\
u''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x}u'_s + 2xyu'_t) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}u'_s + 2xu'_t + 2xy\frac{\partial}{\partial y}u'_t = 2xu'_t + \frac{1}{x}(\frac{1}{x}u''_{ss} + 2xyu''_{st}) \\
&+ 2xy(\frac{1}{x}u''_{ts} + 2xyu''_{tt}) = 2xu'_t + \frac{1}{x^2}u''_{ss} + 4x^2y^2u''_{tt} + 4yu''_{st}, \\
u''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{x}u'_s + 2xyu'_t) = -\frac{1}{x^2}u'_s + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}u'_s + 2yu'_t + 2xy\frac{\partial}{\partial x}u'_t = -\frac{1}{x^2}u'_s + 2yu'_t + \frac{1}{x}(-\frac{y}{x^2}u''_{ss} + y^2u''_{st}) \\
&+ 2xy(-\frac{y}{x^2}u''_{ts} + y^2u''_{tt}) = -\frac{1}{x^2}u'_s + 2yu'_t - \frac{y}{x^3}u''_{ss} + 2xy^3u''_{tt} - \frac{y^2}{x}u''_{st}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2u''_{xx} + y^2u''_{yy} + 2xyu''_{xy} &= \frac{2y}{x}u'_s + \frac{y^2}{x^2}u''_{ss} + x^2y^4u''_{tt} - 2y^3u''_{st} \\
+2xy^2u'_t + \frac{y^2}{x^2}u''_{ss} + 4x^2y^4u''_{tt} + 4y^3u''_{st} &- \frac{2y}{x}u'_s + 4xy^2u'_t - \frac{2y^2}{x^2}u''_{ss} + 4x^2y^4u''_{tt} - 2y^3u''_{st} \\
&= 9x^2y^4u''_{tt} + 6xy^2u'_t = 9t^2u''_{tt} + 6tu'_t = 3t(3tu''_{tt} + 2u'_t).
\end{aligned}$$

Differentialekvationen övergår i $3tu''_{tt} + 2u'_t = 0$. $u'_t = v$ ger $v'_t + \frac{2}{3t}v = 0$. Multiplicera med integrerande faktorn $e^{\int\frac{2}{3t}dt} = e^{\frac{2}{3}\ln t} = t^{2/3}$: $t^{2/3}v'_t + \frac{2}{3}t^{-1/3}v = \frac{d}{dt}(t^{2/3}v) = 0$, $t^{2/3}v = g_1(s)$, $u'_t = t^{-2/3}g_1(s)$, $u = 3t^{1/3}g_1(s) + h(s) = t^{1/3}g(s) + h(s) = \underline{x^{1/3}y^{2/3}g(\frac{y}{x}) + h(\frac{y}{x})}$, där g och h är godtyckliga C^2-funktioner i en variabel.
