Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 16/1 2004, kl. 8.45–12.45.
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Micke Persson, tel. 0740-45 90 22, eller Jonas Hartwig, tel. 0740-35 06 46.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm alla stationära punkter för $f(x,y) = x^2y - xy^3 + x^2$ och bestäm deras karaktär. (8p)

2. Beräkna $\iint_D xe^{2x-y}\,dxdy$, då D är fyrhörningen med hörn i $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,2)$ och $(2,3)$. (7p)

3. Taylorutveckla funktionen
$$f(x,y) = \ln\cos(x-2y) - 2\big(\sqrt{1+(x+y)^2} - 1\big)$$
kring origo med termer t.o.m. tredje graden (plus restterm). Det finns en konstant a så att gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)+ay^2}{x^2+y^2}$$
existerar. Bestäm a och gränsvärdet. (8p)

4. Beräkna $\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då K är kroppen
$$K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le 2 - x^2 - y^2\},$$
och $\mathbf{F} = (x^2y, ye^z, z^2)$. (7p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = \big(yz\cos(xy) + (z-1)y,\ xz\cos(xy) + xy^2,\ \sin(xy)\big),$$
och γ är skärningen mellan $x^2+y^2+z^2 = 1$ och planet $2x+z = 1$. Kurvan genomlöps i positiv led sedd ”uppifrån” (från positiva z-axeln). (8p)

6. Lös differentialekvationen
$$\frac{y^2}{2}u'_x - \frac{x}{3}u'_y = y^5.$$
Bestäm en lösning som uppfyller $u(x,0) = x^2$ för $x > 0$. (7p)

7. Vad menas med att en funktion $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt (x_0,y_0)? Visa att om f är av klassen C^1 i en omgivning av (x_0,y_0), så är f differentierbar i (x_0,y_0). (7p)

8. a. Formulera implicita funktionssatsen. (2p)

   b. Betrakta problemet att maximera eller minimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$, där f och g är C^1-funktioner. Antag att punkten (a,b) ger optimum. Visa att $\operatorname{grad} f(a,b)$ och $\operatorname{grad} g(a,b)$ är parallella (linjärt beroende). (6p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 16/1 2004

1. Sök stationära punkter till $f(x,y) = x^2y - xy^3 + x^2$.

$$f'_x = 2xy - y^3 + 2x = 0,$$
$$f'_y = x^2 - 3xy^2 = x(x - 3y^2) = 0.$$

Enligt den andra ekvationen är antingen $x = 0$ eller $x = 3y^2$. Om $x = 0$, ger den första ekvationen $-y^3 = 0$, dvs. $(0,0)$ är en stationär punkt. Om $x \neq 0$, är $x = 3y^2$, $y \neq 0$, och första ekvationen ger $6y^3 - y^3 + 6y^2 = 0$, $5y + 6 = 0$. Vi får den stationära punkten $(\frac{108}{25}, -\frac{6}{5})$. I denna punkt är $A = f''_{xx} = 2y + 2 = -\frac{2}{5}$, $B = f''_{xy} = 2x - 3y^2 = x = \frac{108}{25}$, $C = f''_{yy} = -6xy = \frac{36 \cdot 108}{125}$. Se på den kvadratiska formen $Q = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$. Då A och C har olika tecken, är den indefinit, och $(\frac{108}{25}, -\frac{6}{5})$ är en sadelpunkt. I $(0,0)$ är $A = 2$, $B = C = 0$, och $Q = 2h^2$ är pos. semidefinit. Detta ger ingen upplysning, men eftersom (t.ex.) $f(y^4, y) = y^4(y^5 - y^3 + y^4) = y^7(-1 + y^2 + y)$, vilket antar både positiva och negativa värden för små $|y|$, så är även $(0,0)$ en sadelpunkt.

---

2. Fyrhörningen är en parallellogram som begränsas av linjerna $x + y = 2$, $x + y = 5$, $2x - y = 1$ och $2x - y = 4$. Sätt $u = 2x - y$, $v = x + y$. Då motsvaras D av $D' = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 4,\ 2 \leq v \leq 5\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{3} dudv,$$

och vidare är $x = \frac{1}{3}(u + v)$. Alltså är

$$\begin{aligned}\iint_D xe^{2x-y}\,dxdy &= \frac{1}{3}\iint_{D'} \frac{1}{3}(u+v)e^u\,dudv = \frac{1}{9}\int_2^5 \left\{\int_1^4 (u+v)e^u\,du\right\} dv \\ &= \frac{1}{9}\int_2^5 \left\{[(u+v)e^u]_{u=1}^4 - \int_1^4 e^u\,du\right\} dv = \frac{1}{9}\int_2^5 \{(4+v)e^4 - (1+v)e - e^4 + e\}\,dv \\ &= \frac{1}{9}\int_2^5 \{3e^4 + (e^4 - e)v\}\,dv = \frac{1}{9}[9e^4 + (e^4 - e)\frac{1}{2}(25 - 4)] = \boxed{\frac{1}{6}(13e^4 - 7e)}.\end{aligned}$$

---

3. Med hjälp av envariabelutvecklingarna $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$, $\ln(1 + t) = t + O(t^2)$, $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2)$, då $t \to 0$, fås

$$\cos(x - 2y) = 1 - \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^4) = 1 + v, \text{ där } v = -\frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^4) = O(r^2),$$
$$\ln\cos(x - 2y) = \ln(1 + v) = v + O(v^2) = -\frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^4),$$
$$\sqrt{1 + (x+y)^2} = 1 + \frac{1}{2}(x+y)^2 + O(r^4),$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. Alltså är

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \ln\cos(x-2y) - 2\big(\sqrt{1+(x+y)^2} - 1\big) = -\frac{1}{2}x^2 - 2y^2 + 2xy - x^2 - y^2 - 2xy + O(r^4) \\ &= -\frac{3}{2}x^2 - 3y^2 + O(r^4).\end{aligned}$$

Nu har

$$\frac{f(x,y) + ay^2}{x^2 + y^2} = \frac{-\frac{3}{2}x^2 + (a-3)y^2}{x^2 + y^2} + O(r^2)$$

gränsvärde då $x^2 + y^2 \to 0$ om och endast om $a - 3 = -\frac{3}{2}$, dvs. $\boxed{a = \frac{3}{2}}$, och gränsvärdet är då $\boxed{-\frac{3}{2}}$.

---

4. Kroppens projektion på xy-planet fås av $x^2+y^2 \le 2-x^2-y^2$, dvs. $x^2+y^2 \le 1$; en cirkel D. Gauss' sats ger

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K (2xy+e^z+2z)\,dxdydz = [\text{symmetri}]$$
$$= \iiint_K (e^z+2z)\,dxdydz = \iint_D \left\{\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (e^z+2z)\,dz\right\} dxdy = \iint_D \left[e^z+z^2\right]_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dxdy$$
$$= [\text{polära koord.}] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (e^{2-r^2}+(2-r^2)^2-e^{r^2}-r^4)\,r\,dr\,d\varphi = \ [t=r^2]$$
$$= 2\pi\int_0^1 (e^{2-t}+(2-t)^2-e^t-t^2)\frac{1}{2}dt = \pi\left[-e^{2-t}-\frac{1}{3}(2-t)^3-e^t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$= \pi(-e-\frac{1}{3}-e-\frac{1}{3}+e^2+\frac{8}{3}+1) = \boxed{\pi(e^2-2e+3)}.$$

---

5. Ekvationen för γ: $x^2+y^2+z^2=1$, $2x+z=1$. Eliminera z för att få projektionen γ_1 på xy -planet: $x^2+y^2+(1-2x)^2=1$ eller $5(x-\frac{2}{5})^2-\frac{4}{5}+y^2=0$, vilket ger ellipsen $\frac{(x-\frac{2}{5})^2}{(\frac{2}{5})^2}+\frac{y^2}{(\frac{2}{\sqrt{5}})^2}=1$. Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= yz\cos(xy)\,dx+(z-1)y\,dx+xz\cos(xy)\,dy+xy^2\,dy+\sin(xy)\,dz\\ &= d(z\sin(xy))+(z-1)y\,dx+xy^2\,dy.\end{aligned}$$

Eftersom γ är sluten, och $z=1-2x$ på γ, är

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma ((z-1)y\,dx+xy^2)\,dy = \int_{\gamma_1}((-2xy)\,dx+xy^2\,dy).$$

Om D är området innanför γ_1, ger Greens formel

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (2x+y^2)\,dxdy = \left[x=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}r\cos\varphi,\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}r\sin\varphi,\ dxdy=\frac{4}{5\sqrt{5}}r\,dr\,d\varphi\right]$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(2(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}r\cos\varphi)+\frac{4}{5}r^2\sin^2\varphi\right)\frac{4}{5\sqrt{5}}r\,dr\,d\varphi$$
$$= \frac{4}{5\sqrt{5}}\left[\frac{4}{5}\cdot 2\pi\int_0^1 r\,dr+0+\frac{4}{5}\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\right] = \frac{4}{5\sqrt{5}}(\frac{4}{5}\pi+\frac{1}{5}\pi) = \boxed{\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}}.$$

---

6. Karakteristikernas differentialekvation (i xy-planet) är (för $x>0$ och $y\ne 0$)

$$\frac{2dx}{y^2} = -\frac{3dy}{x}, \qquad 2x\,dx+3y^2dy=0, \qquad d(x^2+y^3)=0.$$

Detta är alltså en exakt differentialekvation med lösning $x^2+y^3=C$. Sätt $s=x^2+y^3$, $t=x$. Då är

$$\begin{aligned}u'_x &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 2x\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t},\\ u'_y &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 3y^2\frac{\partial u}{\partial s},\end{aligned}$$

och

$$\frac{y^2}{2}u'_x-\frac{x}{3}u'_y = \frac{y^2}{2}2x\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{x}{3}3y^2\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{y^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = y^5,$$

dvs. $\frac{\partial u}{\partial t}=2y^3=2(s-t^2)$, $u=2st-\frac{2}{3}t^3+g(s)$, där g är en godtycklig (deriverbar) funktion av en variabel. Alltså är differentialekvationens allmänna lösning $u=2x(x^2+y^3)-\frac{2}{3}x^3+g(x^2+y^3)$. Bestäm g så att $u(x,0)=2x^3-\frac{2}{3}x^3+g(x^2)=x^2$. Med $s=x^2$, $x=\sqrt{s}$, blir $g(s)=s-\frac{4}{3}s^{3/2}$. Då fås lösningen

$$\boxed{u(x,y)=\frac{4}{3}x^3+2xy^3+x^2+y^3-\frac{4}{3}(x^2+y^3)^{3/2}}.$$
