Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 10/3 2003, kl. 8.45–12.45.
Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Niclas Andréasson, tel. 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Betrakta funktionen $f(x,y,z) = xye^{2x+z^2}$.

   a. Vilka av följande uttryck är definierade: $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} f$, $\operatorname{rot} f$, $\operatorname{grad}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$? Beräkna de uttryck som existerar. (3p)

   b. Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(-2,1,2)$ i riktningen $(1,2,3)$. (2p)

   c. Beräkna tangentplanet till ytan $f(x,y,z) = -2$ i punkten $(-2,1,2)$. (2p)

2. Beräkna $\iiint_K (x+y+z)\,dxdydz$, då K är kroppen som definieras av olikheterna

$$\begin{cases} 1 \le x - y \le 2, \\ 1 \le 2x - 3z \le 3, \\ 0 \le x - y + z \le 1. \end{cases} \qquad (8p)$$

3. a. Sök minimum av $x^2 + y^2 + z^2$, då $4x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 3$. (4p)

   b. Skriv en MATLAB-kod för att plotta ytan $4x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 3$. (4p)

4. Beräkna ytintegralen $\iint_Y x^2y^2\,dS$, då Y är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (7p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = (2xyz + y,\ x^2z - \frac{z}{y^2+z^2},\ x^2y + \frac{y}{y^2+z^2}),$$

   och γ är skärningen mellan ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ och planet $x = z$. Kurvan genomlöps i positiv led sedd "uppifrån" (från positiva z-axeln). (8p)

6. Studera ekvationen $ze^{z-x} - xy = 0$ i närheten av punkten $(1,1,1)$. Motivera att ekvationen kan lösas på formen $z = f(x,y)$ i närheten av $(x,y) = (1,1)$. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till $f(x,y)$ i punkten $(1,1)$. (7p)

7. Funktionen f är integrerbar över rektangeln $\{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Formulera och bevisa en sats om upprepad integration. (7p)

8. Formulera och bevisa Gauss' sats. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 10/3 2003

1. a. grad är definierad för skalära funktioner, div för vektorfunktioner och rot för vektorfunktioner med tre komponenter. För $f(x,y,z) = xye^{2x+z^2}$ är

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left((y+2xy)e^{2x+z^2}, xe^{2x+z^2}, 2xyze^{2x+z^2}\right) = \underline{e^{2x+z^2}(2xy+y, x, 2xyz)}.$$

div f, rot f och grad grad f är odefinierade, medan

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla\cdot\nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= (2y + 2(y+2xy))e^{2x+z^2} + 0 + 2xy(1+2z^2)e^{2x+z^2} \\ &= \underline{2y\left(2+3x+2xz^2\right)e^{2x+z^2}},\end{aligned}$$

och $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla\times\nabla f = \underline{\mathbf{0}}$ generellt.

b. Riktningsderivatan är $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}$. Här är $\mathbf{a} = (-2,1,2)$ och $\mathbf{v} = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$ så att $\nabla f(\mathbf{a}) = (-3,-2,-8)$ och $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3-4-24) = \underline{-\frac{31}{\sqrt{14}}}$.

c. Punkten $\mathbf{a} = (-2,1,2)$ ligger på ytan $f(x,y,z) = -2$, och en normalvektor är $\nabla f(\mathbf{a}) = (-3,-2,-8)$. Allltså är tangentplanets ekvation $-3(x+2) - 2(y-1) - 8(z-2) = 0$, eller $\underline{3x+2y+8z-12=0}$.

---

2. Sätt $u = x-y$, $v = 2x-3z$, $w = x-y+z$. Då beskrivs området av $1\le u\le 2$, $1\le v\le 3$, $0\le w\le 1$. Vi har

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

och $z = w-u$, $x = \frac{1}{2}(v+3z) = \frac{1}{2}(v+3w-3u)$, $y = x-u = \frac{1}{2}(v+3w-5u)$. Vid variabelbytet har vi alltså $dxdydz = \frac{1}{2}dudvdw$, så att

$$\begin{aligned}\iiint_K (x+y+z)\,dxdydz &= \int_0^1\int_1^3\int_1^2 (v+4w-5u)\frac{1}{2}dudvdw \\ &= \frac{1}{2}\Big(1\cdot 1\cdot\int_1^3 v\,dv + 1\cdot 2\cdot 4\int_0^1 w\,dw - 1\cdot 2\cdot 5\int_1^2 u\,du\Big) \\ &= \frac{1}{2}(4+4-15) = \underline{-\frac{7}{2}}.\end{aligned}$$

---

3. a. Sök minimum av $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ då $g(x,y,z) = 4x^2+y^2+z^2-2z-3=0$. Där minimum antas är $\nabla f = \lambda\nabla g$ för något tal λ, dvs.

$$2x = 8\lambda x,\ 2y = 2\lambda y,\ 2z = 2\lambda(z-1).$$

Det gäller nämligen att $\nabla g\ne\mathbf{0}$, ty $\nabla g = \mathbf{0}$ endast för $x=y=0$, $z=1$, villket inte uppfyller bivillkoret. Alltså har vi ekvationerna $(1-4\lambda)x=0$, $(1-\lambda)y=0$, $(\lambda-1)z=\lambda$. Den sista av dessa visar att $\lambda\ne 1$, varför den andra ger $y=0$. Första ekvationen ger oss två möjligheter: $x=0$ eller $\lambda=\frac{1}{4}$. I det första fallet ger bivillkoret $z^2-2z-3=0$ med lösningar $z=3$ och $z=-1$, och motsvarande värden på f blir då 9 resp. 1. I fallet $\lambda=\frac{1}{4}$ blir $z=\frac{\lambda}{\lambda-1} = -\frac{1}{3}$, och bivillkoret ger oss nu $4x^2 = 3-\frac{2}{3}-\frac{1}{9} = \frac{20}{9}$, $x^2=\frac{5}{9}$ med tillhörande f-värde $\frac{5}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2}{3}$. Minimum är alltså $\underline{f(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}, 0, -\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}}$.

b. Det bästa är nog att skriva ytans ekvation som $(2x)^2+y^2+(z-1)^2=4$ (en ellipsoid) och använda modifierade rymdpolära koordinater.

```
[fi,theta]=meshgrid(0:2*pi/25:2*pi);
x=cos(fi).*sin(theta);
y=2*sin(fi).*sin(theta);
z=1+2*cos(theta);
mesh(x,y,z)
```

---

4. *Metod 1.* Skriv x^2y^2 som $\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}$ för något $\mathbf{u}$, där $\mathbf{N}=(x,y,z)$ är den utåtriktade enhetsnormalen på Y, och använd Gauss' sats. Tag t.ex. $\mathbf{u}=(xy^2,0,0)$ och låt K vara klotet $x^2+y^2+z^2\le 1$.

$$\begin{aligned}\iint_Y x^2y^2\,dS &= \iint_Y \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{u}\,dxdydz = \iiint_K y^2\,dxdydz = [\text{symmetri}]\\ &= \frac{1}{3}\iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi\\ &= \frac{4\pi}{3}\int_0^1 r^4\,dr = \underline{\frac{4\pi}{15}}.\end{aligned}$$

Metod 2. Direkt beräkning med sfäriska koordinater.

$$\begin{aligned}\iint_Y x^2y^2\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi\sin^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta d\varphi\\ &= \int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)^2\sin\theta\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^2dt\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\\ &= 2\int_0^1(t^4-2t^2+1)\,dt\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\Big) = \underline{\frac{4\pi}{15}}.\end{aligned}$$

---

5. $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma (2xyz+y)dx + \int_\gamma (x^2z-\frac{z}{y^2+z^2})dy + \int_\gamma (x^2y+\frac{y}{y^2+z^2})dz = \int_\gamma (2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz) + \int_\gamma y\,dx + \int_\gamma \frac{-z\,dy+y\,dz}{y^2+z^2} = I_1+I_2+I_3$. Här är $I_1=\int_\gamma d(x^2yz)=0$, eftersom kurvan är sluten. Kurvans projektion γ_1 på xy-planet är ellipsen $4x^2+2y^2=1$ genomlöpt i positiv led. Om D_1 är området innanför γ_1, ger Greens formel, eftersom ellipsens halvaxlar är $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$I_2=\int_{\gamma_1} y\,dx = \iint_{D_1}(-1)dydx = -\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Om γ_2 är kurvans projektion på yz-planet, är γ_2 ellipsen $2y^2+4z^2=1$ genomlöpt i *negativ* led. Då är $I_3=\int_{\gamma_2}\frac{-z\,dy+y\,dz}{y^2+z^2}$. Vektorfältet $(\frac{-z}{y^2+z^2},\frac{y}{y^2+z^2})$ känner man igen som det magnetiska fältet härrörande från en strömgenomfluten ledare längs x-axeln. Om φ är den polära vinkeln i yz-planet, är $I_3=\int_{\gamma_2}d\varphi = -2\pi$ (nettoökningen i φ då man går runt γ_2). Alltså är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-2\pi = \underline{-(2+\frac{\sqrt{2}}{4})\pi}$.

---

6. Sätt $F(x,y,z)=ze^{z-x}-xy$. Då $F'_z(1,1,1)=(z+1)e^{z-x}|_{(1,1,1)}=2\ne 0$, följer av implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y,z)=0$ kan lösas på formen $z=f(x,y)$ i någon omgivning av $(1,1,1)$, där f har kontinuerliga derivator av alla ordningar. Taylorpolynomet av andra graden kring $(1,1)$ är $P(x,y)=f(1,1)+f'_x(1,1)(x-1)+f'_y(1,1)(y-1)+\frac{1}{2}\big(f''_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f''_{yy}(1,1)(y-1)^2\big)$. Här är $f(1,1)=1$ och derivatorna av f fås genom implicit derivering av identiteten $F(x,y,f(x,y))=0$. Vi skriver $z=f(x,y)$ och får ur $ze^{z-x}-xy=0$

$$-ze^{z-x}+(z+1)e^{z-x}z'_x-y=0,\quad (z+1)e^{z-x}z'_y-x=0.$$

För $x=1$, $y=1$ och $z=1$ fås $z'_x=f'_x(1,1)=1$ och $z'_y=f'_y(1,1)=\frac{1}{2}$. Fortsatt derivering ger

$$\begin{aligned} ze^{z-x}-2(z+1)e^{z-x}z'_x+(z+2)e^{z-x}(z'_x)^2+(z+1)e^{z-x}z''_{xx}&=0,\\ -(z+1)e^{z-x}z'_y+(z+2)e^{z-x}z'_yz'_x+(z+1)e^{z-x}z''_{xy}-1&=0,\\ (z+2)e^{z-x}(z'_y)^2+(z+1)e^{z-x}z''_{yy}&=0.\end{aligned}$$

För $x=1$, $y=1$ och $z=1$, $z'_x=1$, $z'_y=\frac{1}{2}$ fås $1-4+3+2z''_{xx}=0$, $-1+\frac{3}{2}+2z''_{xy}-1=0$, $\frac{3}{4}+2z''_{yy}=0$, dvs. $z''_{xx}=f''_{xx}(1,1)=0$, $z''_{xy}=f''_{xy}(1,1)=\frac{1}{4}$, $z''_{yy}=f''_{yy}(1,1)=-\frac{3}{8}$. Alltså är

$$P(x,y)=\underline{1+(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{4}(x-1)(y-1)-\frac{3}{16}(y-1)^2}.$$
