Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 18/1 2002, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Hanna Martinsson, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen
$$f(x,y) = \sin(x+y^2)\ln(1+2x-3y) - \frac{1}{1+x^2+y^2}$$
kring origo med termer t.o.m. tredje graden. Visa att har f en stationär punkt i origo och avgör dess karaktär. (8p)

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\sin(3y-2x)\,dxdy$, då D är fyrhörningen med hörn i $(0,0)$, $(3,2)$, $(0,3)$ och $(-3,1)$. (8p)

3. Bestäm maximum av $x+y-2z$, då $x^2+y^2+3z^2-xy+2xz=5$. (7p)

4. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då Y är halvsfären $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$ med normalriktning uppåt, och
$$\mathbf{F} = \left(xy^2z,\ x^2yz, e^z\right).$$
(8p)

5. Lös differentialekvationen
$$ye^x u'_x + (y^2+1)u'_y = y, \quad y>0,$$
och bestäm en lösning som uppfyller $u(0,y)=y^2$. (7p)

6. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = \frac{(2x-y^2,\ 4y^3+2xy)}{x^2+y^4},$$
och γ är cirkelbågen $x^2+y^2=1$ i första kvadranten från $(1,0)$ till $(0,1)$. (7p)

7. Bevisa kedjeregeln för derivering av den sammansatta funktionen $f(\mathbf{g}(t))$. (7p)

8. a. Ange vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F}=(P,Q)$ är ett potentialfält. (2p)

   b. Låt $\mathbf{F}=(P,Q)$ vara ett potentialfält med potential U. Visa hur $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ kan beräknas med hjälp av U. (6p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 18/1 2002

1. Med hjälp, av envariabelutvecklingarna $\sin t = t + O(t^3)$, $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\frac{1}{1+t} = 1 - t + O(t^2)$, då $t \to 0$, fås

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \Big(x + y^2 + O(r^3)\Big)\Big(2x - 3y - \frac{1}{2}(2x-3y)^2 + O(r^3)\Big) - \Big(1 - (x^2+y^2) + O(r^4)\Big) \\ &= -1 + 3x^2 - 3xy + y^2 - 2x^3 + 6x^2y - \frac{5}{2}xy^2 - 3y^3 + O(r^4), \end{aligned}$$

då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Detta är den sökta Taylorutvecklingen. Det framgår att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, så att origo är en stationär punkt. Eftersom den kvadratiska formen $3x^2 - 3xy + y^2$ kan skrivas $(y - \frac{3}{2}x)^2 + \frac{3}{4}x^2$, är den positivt definit, och origo är en minimipunkt.

---

2. Fyrhörningen är en parallellogram som begränsas av linjerna $3y - 2x = 0$, $3y - 2x = 9$, $x + 3y = 0$ och $x + 3y = 9$. Sätt $u = 3y - 2x$, $v = x + 3y$. Då motsvaras D av $D' = \{(u,v) : 0 \le u \le 9,\ 0 \le v \le 9\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9, \quad dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{9}dudv,$$

och vidare är $y = \frac{1}{9}(u + 2v)$. Alltså är

$$\begin{aligned} \iint_D y\sin(3y-2x)\ dxdy &= \iint_{D'} \frac{1}{9}(u+2v)\sin u\,\frac{1}{9}\,dudv = \frac{1}{81}\int_0^9 \left\{\int_0^9 (u+2v)\sin u\,du\right\} dv \\ &= \frac{1}{81}\int_0^9 \left\{[-(u+2v)\cos u]_0^9 + \int_0^9 \cos u\,du\right\} dv = \frac{1}{81}\int_0^9 (2v(1-\cos 9) - 9\cos 9 + \sin 9)\ dv \\ &= \boxed{1 - 2\cos 9 + \frac{1}{9}\sin 9}. \end{aligned}$$

---

3. Sök maximum av $f(x,y,z) = x + y - 2z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz = 5$. Eftersom $g(x,y,z) = (y - \frac{1}{2}x)^2 + 3(z + \frac{1}{3}x)^2 + \frac{5}{12}x^2$, är mängden $\{(x,y,z) : g(x,y,z) = 5\}$ kompakt. Alltså antas maximum. Enligt Lagranges multiplikatorregel finns ett tal λ så att $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ där maximum antas (såvida inte $\nabla g(x,y,z) = \mathbf{0}$, vilket vi kan utesluta eftersom det skulle ge $2x - y + 2z = 2y - x = 6z + 2x = 0$, $x = y = z = 0$, vilket är oförenligt med $g(x,y,z) = 5$). Vi får då

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x - y + 2z), \\ 1 = \lambda(2y - x), \\ -2 = \lambda(6z + 2x), \end{cases}$$

så att

$$\frac{1}{\lambda} = 2x - y + 2z = 2y - x = -3z - x, \qquad y = -\frac{3z}{2}, x = y - \frac{2z}{3} = -\frac{13z}{6}.$$

Tillsammans med villkoret $g(x,y,z) = 5$ fås $(\frac{169}{36} + \frac{9}{4} + 3 - \frac{13}{4} - \frac{13}{3})z^2 = \frac{85}{36}z^2 = 5$, $z = \pm\frac{6}{\sqrt{17}}$. Vi får punkterna $(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}(-13,-9,6)$ med $f(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}(-13-9-12) = \mp\frac{34}{\sqrt{17}} = \mp 2\sqrt{17}$. Alltså är max.värdet $\boxed{2\sqrt{17}}$.

---

4. Komplettera Y med "botten" $Y_1 = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\}$, så att $Y+Y_1$ blir rand till halvklotet $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$. Använd Gauss' sats:

$$\begin{aligned}
\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K ((x^2+y^2)z + e^z)\,dxdydz \\
&= [\text{rymdpolära koord.}] = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^3\sin^2\theta\cos\theta + e^{r\cos\theta})r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\
&= 2\pi\int_0^1 r^5\,dr \int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta + 2\pi\int_0^1 r\left\{\int_0^{\pi/2} e^{r\cos\theta} r\sin\theta\,d\theta\right\}dr \\
&= 2\pi\frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi/2} + 2\pi\int_0^1 r\left[-e^{r\cos\theta}\right]_0^{\pi/2}dr = \frac{\pi}{12} + 2\pi\int_0^1 (re^r - r)\,dr \\
&= \frac{\pi}{12} + 2\pi\left[(r-1)e^r - \frac{1}{2}r^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}.
\end{aligned}$$

Nu är $\iint_{Y+Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, och

$$\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1}\mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dxdy = -\iint_{Y_1} dxdy = -\pi.$$

Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{13\pi}{12} + \pi = \boxed{\dfrac{25\pi}{12}}$.

---

5. Karakteristikernas differentialekvation i xy-planet:

$$\frac{dx}{ye^x} = \frac{dy}{y^2+1},$$

med lösning $-e^{-x} = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - C$, $e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = C$. Gör variabelbytet $s = e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)$, $t = x$. Då är

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = -e^{-x}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}, \\
u'_y &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{y}{y^2+1}\frac{\partial u}{\partial s},
\end{aligned}$$

och

$$ye^x u'_x + (y^2+1)u'_y = -y\frac{\partial u}{\partial s} + ye^x\frac{\partial u}{\partial t} + y\frac{\partial u}{\partial s} = ye^x\frac{\partial u}{\partial t} = y,$$

dvs. $\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-x} = e^{-t}$. Alltså är $u = -e^{-t} + f(s)$, $u(x,y) = -e^{-x} + f(e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(y^2+1))$. Lösningen skall uppfylla $u(0,y) = -1 + f(1 + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)) = y^2$. Med $s = 1 + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)$ blir $y^2+1 = e^{2(s-1)}$, och vi får $f(s) = e^{2(s-1)}$. Alltså blir lösningen

$$u(x,y) = -e^{-x} + e^{2(e^{-x}+\frac{1}{2}\ln(y^2+1)-1)} = \boxed{(y^2+1)e^{2(e^{-x}-1)} - e^{-x}}.$$

---

6. Med $y^2 = y_1$ är

$$I = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \frac{(2x-y^2)dx + (4y^3+2xy)dy}{x^2+y^4} = \int_{\gamma_1}\frac{(2x-y_1)dx + (2y_1+x)dy_1}{x^2+y_1^2},$$

där γ_1 är en parabelbåge i första kvadranten (i (x,y_1)-planet) från $(1,0)$ till $(0,1)$. Med polära koordinater i (x,y_1)-planet är

$$\frac{(2x-y_1)dx + (2y_1+x)dy_1}{x^2+y_1^2} = 2\frac{xdx + y_1dy_1}{x^2+y_1^2} + \frac{-y_1dx + xdy_1}{x^2+y_1^2} = d\ln r^2 + d\theta,$$

så att

$$I = \int_{\gamma_1} d(\ln r^2 + \theta) = \left[\ln r^2 + \theta\right]_{(1,0)}^{(0,1)} = \ln 1 + \frac{\pi}{2} - \ln 1 - 0 = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$
